



ING. AUTOMOTRIZ

**Trabajo integración Curricular previa a la
obtención del título de Ingeniería en Mecánica
Automotriz**

AUTORES:

Camilo David Simbaña Chandi
Mateo Jhosue Zárate Egas

TUTOR:

Ing. Eduardo José Cueva

**Análisis Energético de un Motor a Hidrógeno: Variación de
Entalpía en Función de la Altitud**

QUITO – ECUADOR | 2025

CERTIFICACIÓN DE AUTORÍA

Nosotros, **Camilo David Simbaña Chandi** y **Mateo Jhosue Zárate Egas**, declaramos bajo juramento, que el trabajo aquí descrito es de nuestra autoría; que no ha sido presentado anteriormente para ningún grado o calificación profesional y que se ha consultado la bibliografía detallada.

Cedemos nuestros derechos de propiedad intelectual a la Universidad Internacional del Ecuador, para que sea publicado y divulgado en internet, según lo establecido en la Ley de Propiedad Intelectual, su reglamento y demás disposiciones legales.

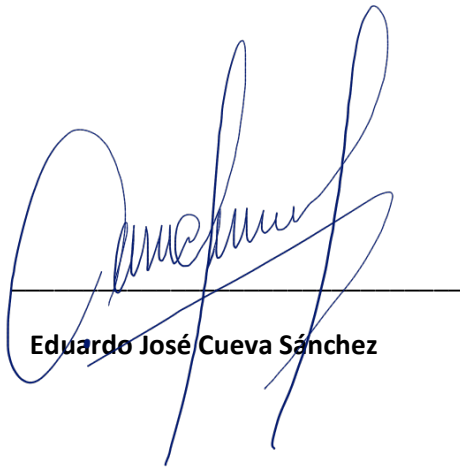


Camilo David Simbaña Chandi

Mateo Jhosue Zárate Egas

APROBACIÓN DEL TUTOR

Yo, Eduardo José Cueva Sánchez, certifico que conozco a los autores del presente trabajo, siendo el responsable exclusivo tanto de su originalidad y autenticidad, como de su contenido.



Eduardo José Cueva Sánchez

DEDICATORIA

Dedico este trabajo de titulación a mi familia, pilar económico y emocional de mi formación profesional. Su apoyo incondicional me brindó la seguridad y la motivación necesarias para enfrentar cada desafío de esta maravillosa carrera.

En especial, a mi madre, cuyo amor inquebrantable, paciencia infinita y valiosos consejos iluminaron mis días más difíciles; y a mi prima, cuya compañía constante en todo momento, sus palabras de aliento y su contagiosa alegría transformaron el esfuerzo en un camino compartido.

A mis compañeros de estudio, con quienes forjé lazos de amistad durante este periodo, gracias por su apoyo mutuo, sus consejos y las risas que hicieron este proceso más ameno.

Agradezco también a los docentes de la UIDE, cuyas enseñanzas, experiencias y guía contribuyeron a forjar mi vocación como profesional; y a la universidad, que me brindó un entorno de crecimiento y oportunidades en todas las facetas de mi formación.

Finalmente, a mis amigos y demás seres queridos, gracias por creer en mí y acompañarme en cada logro. Este triunfo es el reflejo de la colaboración, la perseverancia y la convicción de que el conocimiento puede transformar nuestro entorno.

Camilo S.

DEDICATORIA

Dedico este trabajo de titulación a mi familia, la cual fue la base fundamental en cada paso de mi vida académica y personal. Su respaldo constante, tanto emocional como económico, fue el soporte que me permitió avanzar con firmeza en este camino lleno de aprendizajes y desafíos.

De manera especial a mis padres, por ser mi mayor ejemplo de esfuerzo y perseverancia. Gracias por darme las herramientas, el amor y la confianza necesarias para perseguir mis sueños y no rendirme ante las dificultades.

A mis compañeros de carrera, con quienes compartí no solo clases y trabajos, sino también experiencias que ayudaron a mejorar no solo académicamente sino también de manera personal.

Extiendo mi gratitud a los docentes de la UIDE, cuyas enseñanzas, exigencias y orientación marcaron positivamente mi preparación como futuro profesional. A la universidad, por brindarme el espacio, las herramientas y el ambiente propicio para crecer y proyectarme hacia mis metas.

Finalmente, a mis mejores amigos, gracias por estar presentes con su confianza, palabras de aliento y afecto sincero. Este logro no es solo mío, sino también de quienes caminaron a mi lado y creyeron en mí desde el principio.

Mateo Z.

AGRADECIMIENTO

En primer lugar, agradezco a Dios, por haberme dado la salud, la fortaleza y la sabiduría necesarias para culminar esta etapa de mi vida. Su guía y presencia constante me acompañaron en cada desafío y me permitieron seguir adelante con fe y determinación.

Agradezco de todo corazón a la Universidad Internacional del Ecuador, que desde el primer día me brindó su respaldo en mi formación profesional y me ha permitido proyectarme como un profesional con un futuro promisorio.

Agradezco de manera especial a la Facultad de Ingeniería Automotriz, cuyo cuerpo docente y personal administrativo siempre estuvieron dispuestos a escuchar, apoyar y facilitar el desarrollo de este proceso académico.

Agradezco de manera especial a los profesores, los cuales me impartieron clases directamente en las distintas materias brindadas por la Universidad, cuyas enseñanzas y ejemplo me han permitido comprender la ingeniería desde diversas perspectivas y constituyen un referente para mi crecimiento profesional y académico, les expreso mi más profunda gratitud por compartirme su pasión hacia el mundo Automotriz

Por último, agradezco profundamente a mis mejores amigos, quienes estuvieron a mi lado en los momentos más exigentes de este proceso. Gracias por escucharme con paciencia cuando necesitaba desahogarme, por entender mis silencios cuando las palabras no alcanzaban, y por ofrecerme su apoyo incondicional a lo largo de toda mi trayectoria universitaria.

Mateo Z.

AGRADECIMIENTO

Expreso mi más sincero agradecimiento a la Universidad Internacional del Ecuador por haberme acogido desde el inicio de mi carrera y por ofrecerme una formación integral que ha sido clave para mi desarrollo personal y profesional.

A la Facultad de Ingeniería Automotriz, gracias por el compromiso constante con la excelencia académica y por contar con un equipo docente y administrativo que ha estado siempre dispuesto a brindar su apoyo durante cada etapa de esta trayectoria.

Agradezco de manera especial a los docentes M.Sc. Pablo Ante, Dr. Marcos Gutiérrez y M.Sc. Gorky Reyes, quienes no solo compartieron sus conocimientos, sino que también me inspiraron con su vocación, experiencia y dedicación. Cada uno de ellos dejó una huella importante en mi proceso formativo.

Mi reconocimiento especial al M.Sc. Eduardo Cueva, tutor de este trabajo de titulación, por su orientación, paciencia y constante disposición para guiarme con responsabilidad y criterio técnico durante la elaboración de este proyecto, contribuyendo significativamente a su calidad y a mi crecimiento académico.

A todos quienes formaron parte de este camino, gracias por haber sido pieza fundamental en la construcción de este logro.

Camilo S.

Índice de contenido

CERTIFICACIÓN DE AUTORÍA	iii
APROBACIÓN DEL TUTOR.....	iv
DEDICATORIA.....	v
DEDICATORIA.....	vi
AGRADECIMIENTO	vii
AGRADECIMIENTO	viii
RESUMEN	xii
ABSTRACT.....	xii
Introducción	xiii
Marco Teórico.....	xiv
1. Motores De Combustión Interna (MCI)	xiv
1.1. Definición	xiv
1.2. Comparativa MCI.....	xv
1.3. Emisiones Contaminantes.....	xvi
1.4. Problemática de la Calidad de la Gasolina en Ecuador.....	xvii
2. El H ₂ : Características Y Propiedades.....	xviii
2.1. Propiedades Fisicoquímicas.....	xviii
2.2. Propiedades Termodinámicas Básicas	xix
2.3. Inflamabilidad y Propagación de la Llama	xix
2.4. Avances Recientes en Investigación sobre H ₂	xx
2.5. Normativas y Estándares de Calidad.....	xxi
3. Fundamentos Termodinámicos en Motores De H ₂	xxi
3.1. Primera Ley de la Termodinámica	xxi
3.2. Segunda Ley de la Termodinámica	xxii
3.3. Balance de Masa	xxii
3.4. Entalpía	xxiii
3.5. Ecuación de Estado y Propiedades Variables	xxiv
3.6. Diagrama Presión-Volumen (P-V)	xxv
3.7. Efecto de la Altitud y Temperatura en la Entalpía.....	xxvi
4. Modelos de Simulación Teórica.....	xxvii
4.1. Definición	xxvii
4.2. Características Principales	xxvii
4.3. Propósitos.....	xxviii
4.4. Modelos Simplificados de Combustión.....	xxviii
4.4.1. Modelos de Simulación Cero-Dimensionales (0-D).....	xxviii
4.4.2. Modelos Unidimensionales (1-D).	xxix
4.4.3. Modelos Bidimensionales (2-D).....	xxix
5. Sensibilidad conceptual a condiciones externas.....	xxix
Materiales y Métodos	xxx

1.	Materiales.....	xxx
2.	Métodos.....	xxx
2.1.	Alcance y contexto	xxx
2.2.	Submodelo Atmosférico.....	xxx
2.3.	Submodelo del Ciclo Otto.....	xxx
2.3.1.	Parámetros de Operación del Motor.....	xxx
2.3.2.	Admisión y Mezcla.....	xxx
2.3.2.1.	Volumen por Cilindro.....	xxx
2.3.2.2.	Determinación de la Masa de Aire	xxx
2.3.2.3.	Relación Estequiométrica y Masa de H ₂	xl
2.3.2.4.	Preparación de la Mezcla.....	xli
2.3.3.	Compresión Isentrópica.....	xliv
2.3.4.	Combustión a Volumen Constante.....	xlvi
2.3.5.	Expansión Isentrópica y Cierre de Ciclo	l
3.	Integración y Extracción de Datos	li
4.	Supuestos y Simplificaciones.....	lii
5.	Procedimiento Metodológico de Ejecución del Modelo.....	liii
5.1.	Calibración del Submodelo Atmosférico	liii
5.2.	Ajuste del Ciclo Otto en MATLAB	liv
5.3.	Ejecución de las Simulaciones.....	liv
5.4.	Procesamiento y Organización de Datos	lv
5.5.	Método de Validación Bibliográfica	lv
6.	Limitaciones	lvi
6.1.	Ámbito de Validez.....	lvi
6.2.	Revisión de Datos Experimentales Bibliográficos.....	lvi
6.3.	Control de Calidad:	lvi
	Resultados y Discusión.....	lvi
1.	Validación del Modelo de la Altitud	lvi
2.	Eficiencia Volumétrica vs Altitud	lvii
3.	Diagrama P-V para Diferentes Altitudes y λ	lviii
4.	Entalpía en Función de la Altitud con Diferentes λ	lxiv
	Conclusiones	lxvi
	Recomendaciones.....	lxvii
	Referencias.....	lxviii
	Anexo 1.....	lxxiv
	Anexo 2.....	cxiv
	Anexo 3.....	cl

Índice de figuras

Figura 1. Calidad de combustibles en América Latina.....	xviii
Figura 2. Diagrama (P-V) en un MCI	xxvi
Figura 3. Mapa conceptual del proceso metodológico y variables clave	xxxii
Figura 4. Modelo Atmosférico	xxxvi
Figura 5. Propiedades de la Mezcla.....	xliii
Figura 6. Cálculos de Admisión y Mezcla.....	xliv
Figura 7. Proceso de Compresión.....	xliv
Figura 8 Proceso de Combustión.....	xlix
Figura 9. Cálculos de Entalpía.....	xlix
Figura 10. Eficiencia Volumétrica vs Altitud	lvii
Figura 11. Diagrama (P-V) en Guayaquil para Distintos Valores de Lambda	lix
Figura 12. Diagrama (P-V) en Baeza para Distintos Valores de Lambda	lxi
Figura 13. Diagrama P-V en Quito para Distintos Valores de Lambda	lxii
Figura 14. Entalpía en Función de la Altitud a Diferentes Lambdas.....	lxiv

Índice de tablas

Tabla 1. Comparativa tipos de MCI.....	xv
Tabla 2. Resultados teóricos del modelo ISA	xxxvi
Tabla 3. Resumen de Variables del Submodelo Atmosférico	xxxvi
Tabla 4. Tabla de Resumen de las Variables de Parámetros del Motor	xxxvii
Tabla 5. Tabla de Resumen de las Propiedades Termoquímicas.....	xl
Tabla 6 Tabla de Resumen de las Variables de Propiedades de la Mezcla	xliii
Tabla 7. Tabla de Resumen del Estado de Admisión (1-2)	xliv
Tabla 8. Tabla de Resumen de Variables de Combustión (Estado 3).....	xlix
Tabla 9. Tabla de Resumen Variables de Expansión (Estado 4)	li
Tabla 10 Tabla de Resumen de Variables de Resultados	lii
Tabla 11. Tabla de Resumen de la Configuración de la Simulación.....	liv
Tabla 12. Comparación Presiones Teóricas ISA vs Obtenidas en el Modelo Matlab...	lvii
Tabla 13. Eficiencia Volumétrica Perdida en Función de la Altitud	lviii
Tabla 14. Resumen de Resultados Obtenidos en Diagrama (P-V) en Guayaquil.....	lix
Tabla 15. Resumen de Resultados Obtenidos en Diagrama (P-V) en Baeza.....	lxi
Tabla 16. Resumen de Resultados Obtenidos en Diagrama (P-V) en Quito	lxiii
Tabla 17. Entalpía [kJ] en Función de la Altitud [m s.n.m].....	lxv

ANÁLISIS ENERGÉTICO DE UN MOTOR A H₂: VARIACIÓN DE ENTALPÍA EN FUNCIÓN DE LA ALTITUD

Ing. Eduardo Cueva. MSc¹, Camilo Simbaña C.², Mateo Zárate E.³

¹ Ingeniería Automotriz - Universidad Internacional del Ecuador, email edcuevasa@uide.edu.ec, Quito – Ecuador

² Ingeniería Automotriz Universidad Internacional del Ecuador, email casimbanach@uide.edu.ec, Quito - Ecuador

³ Ingeniería Automotriz – Universidad Internacional del Ecuador, email mazarateega@uide.edu.ec, Quito – Ecuador

RESUMEN

Introducción: Se analizó mediante una simulación (0-D) el efecto de la altitud sobre la entalpía de combustión en un motor Otto alimentado con hidrógeno en distintas elevaciones ecuatorianas. **Metodología:** Se desarrolló un modelo unidimensional (0-D) en MATLAB/Simulink que incorpora el estándar ISA para la atmósfera, propiedades termoquímicas variables y un factor fijo de pérdidas térmicas, simulando varias proporciones de mezcla aire–combustible. **Resultados:** La entalpía pico disminuyó un 25,4% al pasar de 0 a 2850 m sobre el nivel del mar y la eficiencia volumétrica mostró pérdidas progresivas con la elevación; además, se identificó $\lambda \approx 0,90$ como la proporción óptima para maximizar la liberación de calor. **Conclusión:** El modelo 0-D constituye una herramienta rápida y cuantitativa para el diseño y ajuste de motores que funcionan con hidrógeno en entornos de altitud variable, y sienta las bases para futuras simulaciones multidimensionales, permitiendo anticipar desafíos técnicos antes de los ensayos experimentales.

Palabras clave: Hidrógeno; Motor Otto; Entalpía de combustión; Altitud; Simulación 0-D; Atmósfera ISA; MATLAB/Simulink.

ABSTRACT

Introduction: A 0-D simulation was conducted to analyze the effect of altitude on the combustion enthalpy in a hydrogen-fueled Otto engine at various elevations in Ecuador. **Methodology:** A 0-D model was developed in MATLAB/Simulink incorporating the ISA standard for atmospheric conditions, variable thermochemical properties, and a fixed thermal-loss factor, simulating multiple air–fuel mixture ratios. **Results:** Peak enthalpy decreased by 25.4 % when ascending from 0 to 2 850 m above sea level, and volumetric efficiency showed progressive losses with elevation; additionally, $\lambda \approx 0.90$ was identified as the optimal ratio to maximize heat release. **Conclusion:** The 0-D model proves to be a rapid, quantitative tool for designing and tuning hydrogen-fueled engines in variable-altitude environments, laying the groundwork for future multidimensional simulations and enabling the anticipation of technical challenges prior to experimental testing.

Keywords: Hydrogen; Otto engine; Combustion enthalpy; Altitude; 0-D simulation; ISA atmosphere; MATLAB/Simulink

Introducción

Las tendencias actuales del mercado se orientan hacia el uso de energías limpias, lo cual impacta significativamente la industria automotriz (International Energy Agency, 2024). Para reducir la huella de carbono, los fabricantes adoptan fuentes renovables en los sistemas de propulsión de vehículos (International Energy Agency, 2024). En países con variaciones de altitud como Ecuador, resulta crucial analizar el comportamiento de combustibles alternativos en función de la geografía local, donde las altitudes oscilan entre 0 y más de 4100 m s.n.m. (Rocha-Hoyos et al., 2018; Varela & Ron, 2018).

El hidrógeno (H_2) se perfila como una alternativa ecológica prometedora: al emplearse en un motor de combustión interna (MCI), sus emisiones directas son prácticamente nulas, pues el principal subproducto es agua (Wang et al., 2023). Halder et al. (2024) demostraron que el H_2 no solo reduce emisiones contaminantes, sino que puede generar beneficios económicos a largo plazo. Además, empresas como Hyundai, Toyota y Kawasaki exploran activamente su implementación en mercados internacionales (Kawasaki Heavy Industries, 2025).

No obstante, uno de los principales retos del H_2 en MCI es la variación de las condiciones ambientales, especialmente la altitud. Saleh, Ali y Zhang (2018) evidenciaron que la disminución de presión y densidad del aire en zonas elevadas limita el oxígeno disponible para la combustión, reduciendo el rendimiento energético, un fenómeno crucial en la orografía ecuatoriana (Saleh, Ali & Zhang, 2018; Varela & Ron, 2018).

Diversos fabricantes han adaptado motores como el diésel para funcionar con H_2 , alcanzando prestaciones similares a las originales. MAN Energy Solutions presentó en 2021 un prototipo de camión de 500 CV con motor H_2 -MCI que cumple la normativa Euro VII sin emisiones de CO_2 (MAN Energy Solutions, 2021). En el segmento ligero, Toyota validó la estabilidad de la combustión de su GR Corolla H_2 en pruebas de resistencia bajo condiciones exigentes (Toyota Motor Corporation, 2024). Las simulaciones teóricas ofrecen alta repetibilidad y seguridad, evitando riesgos asociados al manejo de hidrógeno (Durán, 2020). Por consiguiente, su fiabilidad depende de la correcta implementación de las ecuaciones de estado y de las funciones termoquímicas, por lo que requieren procesos rigurosos de verificación y validación contra datos experimentales (Krebs & Biet, 2024).

Para ello, el presente estudio tiene como objetivo principal desarrollar un modelo termodinámico simplificado de un MCI, alimentado con H_2 que permita analizar la variación de la entalpía (función de estado que relaciona la energía interna con el producto de presión y volumen (Çengel & Boles, 2019)) en función de la altitud. Para ello, se identificarán los parámetros termodinámicos y ambientales necesarios para simular el ciclo de combustión, dichos parámetros se implementarán en un modelo simplificado de MATLAB/Simulink a partir del cual se elaborarán los correspondientes diagramas de fase que permitan la evaluación de los resultados obtenidos en términos de balance energético para determinar las compensaciones requeridas de estos MCI en distintas altitudes, ofreciendo referencias al sector automotriz local interesado en esta tecnología.

Para profundizar en estos efectos, este estudio analiza la entalpía, durante la combustión de H_2 en un MCI expuesto a diferentes condiciones de admisión vinculadas a la altitud. Empleando un modelo simplificado 0-D en MATLAB/Simulink, la simulación reproduce con precisión los cambios de presión y temperatura que ocurren en diversas altitudes ecuatorianas (Quito, Baeza, Guayaquil); Este planteamiento permite validar teóricamente la entalpía de combustión en escenarios reales de operación y sirve de base para futuros ensayos experimentales en el sector automotriz local.

Marco Teórico

1. Motores De Combustión Interna (MCI)

1.1. Definición

Según Heywood (2018), los motores de combustión interna (MCI) son máquinas térmicas en las que la reacción de combustión tiene lugar directamente en el interior del cilindro, liberando energía química que se convierte en trabajo mecánico mediante el movimiento alternativo del pistón

Según su método de ignición, los MCI se clasifican en motos de encendido por chispa (ciclo Otto) y por compresión (ciclo Diésel), además de variantes como el ciclo Atkinson.

En el ciclo Otto de cuatro tiempos (admisión, compresión, combustión y escape) la mezcla aire–combustible se comprime a relaciones moderadas ($\approx 8:1$ – $12:1$) y se enciende mediante chispa en volumen casi constante. Este diseño proporciona alta potencia específica, aunque solo entre el 30% y el 40% de la energía del combustible llega a torque útil; el resto se disipa como calor en el sistema de refrigeración y los gases de escape (Sharma & Zhao, 2022; Heywood, 2018).

En el ciclo Diésel, únicamente se comprime aire a relaciones elevadas ($\approx 14:1$ – $20:1$); el combustible se inyecta al final de la compresión en un entorno de presión y temperatura tan altas que se auto enciende a volumen casi constante. Esta estrategia mejora la eficiencia térmica y genera un par motor elevado a bajas revoluciones, pero exige componentes más robustos y sistemas complejos de postratamiento para reducir las emisiones de NO_x y partículas (Khalil, 2019).

El ciclo Atkinson retrasa el cierre de la válvula de admisión para prolongar la expansión de los gases tras la combustión, de modo que se extrae más trabajo por ciclo. Su excelente eficiencia en regímenes de carga parcial lo ha convertido en el estándar de muchos motores híbridos modernos (Shukla & Agarwal, 2023).

1.2. Comparativa MCI

Tabla 1.
Comparativa tipos de MCI

	Ciclo Otto	Ciclo Diésel	Ciclo Atkinson
Principio de funcionamiento	Mezcla aire-combustible homogénea comprimida ($\text{RC} \approx 8:1$ – $12:1$) y encendida por chispa en volumen casi constante (Heywood, 2018).	Sólo aire comprimido a alta relación de compresión ($\text{RC} \approx 14:1$ – $20:1$), inyección de combustible en aire caliente provocando autoignición a presión	Variante Otto con cierre tardío de admisión para expansión prolongada, extracción máxima de trabajo de los gases (Shukla & Agarwal, 2023).

		constante (Heywood, 2018).	
Ventajas técnicas	Alta potencia específica y respuesta ágil al acelerador (Heywood, 2018).	Mayor eficiencia térmica y elevado par motor a bajas RPM (Khalil, 2019).	Eficiencia superior en carga parcial y menor estrés mecánico por ciclo (Shukla & Agarwal, 2023).
Desventajas técnicas	Eficiencia reducida a cargas parciales y emisiones de CO ₂ comparativamente altas (Sharma & Zhao, 2022).	Motor más pesado y costoso; altas emisiones de NO _x y partículas requieren sistemas de postratamiento complejos (Khalil, 2019).	Potencia específica menor y rendimiento limitado a bajos regímenes, suele requerir asistencia híbrida para recuperar desempeño (Shukla & Agarwal, 2023).
Aplicaciones típicas	Vehículos ligeros de gasolina, motocicletas y equipamiento portátil (Sharma & Zhao, 2022).	Transporte pesado (camiones, buses), maquinaria industrial y generación estacionaria (Khalil, 2019).	Vehículos híbridos ligeros (e.g., Toyota Prius y análogos) y motores estacionarios donde se prioriza eficiencia (Shukla & Agarwal, 2023).

Fuente. Autoría propia

1.3. Emisiones Contaminantes

Los MCI emiten diversos contaminantes atmosféricos con impactos significativos en el clima y la salud humana (Huang et al., 2020). Entre ellos se cuentan el dióxido de

carbono (CO_2), principal gas de efecto invernadero; el monóxido de carbono (CO), producto de la combustión incompleta; los hidrocarburos no quemados (HC), precursores de ozono troposférico; los óxidos de nitrógeno (NO_x), formados a altas temperaturas por oxidación del nitrógeno del aire; y las partículas en suspensión (PM), especialmente en motores Diésel, procedentes de carbono y compuestos orgánicos sin quemar. La intensidad de estas emisiones varía según la carga, el régimen de giro y la altitud de operación, observándose niveles mayores de NO_x y PM bajo cargas elevadas y en entornos de baja densidad de aire (Ashok et al., 2022; García Mariaca et al., 2025).

Frente a estos contaminantes convencionales, los motores alimentados con H_2 generan principalmente vapor de agua, suprimiendo las emisiones directas de CO_2 y PM . Sin embargo, a temperaturas elevadas se produce NO_x por oxidación térmica del nitrógeno del aire. Debido a la recirculación de gases de escape (EGR) y al ajuste del sistema de inyección, estas emisiones pueden reducirse por debajo de 10 ppm (Gao et al., 2022; Purayil et al., 2023). Estas ventajas hacen del H_2 una alternativa muy atractiva para la descarbonización del transporte, ya que puede reducir las emisiones de gases de efecto invernadero hasta en un 68 % y mejorar la calidad del aire urbano (Stephens-Romero et al., 2009).

1.4. Problemática de la Calidad de la Gasolina en Ecuador

Un informe de Arias Andramunio et al. (2022), realizado en la provincia del Guayas, reveló que la gasolina Extra presenta un índice de octano medio de 87 RON y la Ecopaís de 85 RON, ambos por debajo de los 90 RON recomendados para motores de alta compresión. Asimismo, el contenido de azufre alcanzó 50 ppm, superando con creces el límite de 10 ppm establecido por la Directiva 2009/30/CE para reducir la corrosión de componentes y las emisiones contaminantes (European Commission, 2009). Checa Ramírez (2020) comprobó que variaciones en la densidad, el punto de ebullición y el contenido de azufre de la gasolina Extra pueden incrementar hasta en un 15 % las emisiones de CO y HC en motores Otto durante ensayos estáticos, con el consiguiente empeoramiento de la eficiencia térmica y de la calidad del aire.

Figura 1.
Calidad de combustibles en América Latina



Tomado de AEADE. (2022). “Calidad de combustibles en América Latina” [Gráfico].

Como se observa en la Figura 1, Ecuador es uno de los pocos países sudamericanos que aún emplea gasolina Euro 2 (92 octanos), por lo que lo convierte en uno de los países con la peor calidad de gasolina en el continente. (AEADE, 2022). Lo que subraya la urgencia de alinear la regulación con los estándares más avanzados del continente.

El poder calorífico de un combustible se define como la energía liberada por unidad de masa durante su combustión completa. En el caso del H_2 , el poder calorífico inferior (PCI) es casi tres veces mayor que el PCI de la gasolina (≈ 44 MJ/kg) y el del diésel ($\approx 42,5$ MJ/kg) (Center for Sustainable Systems, 2023; World Nuclear Association, 2023).

2. El H_2 : Características y Propiedades

2.1. Propiedades Fisicoquímicas

El H_2 es una molécula diatómica con masa molar de 2,016 g/mol y densidad de 0,0899 kg/m³ a 1 atm y 273 K (Xu et al., 2023; Huber et al., 2022). Su ligereza y rápida

difusión favorecen la homogeneidad de la mezcla aire–combustible, aunque la menor densidad reduce la energía disponible por unidad de volumen. Además, su conductividad térmica a 20 °C (0,1719 W/m·K), casi 7,35 veces la del aire, acelera la transferencia de calor en la cámara de combustión e incrementa las pérdidas térmicas hacia las paredes del cilindro (Xu et al., 2023). Estos parámetros físicos se incorporan en el modelo de simulación del motor para predecir el comportamiento real de la mezcla aire–H₂ y optimizar las condiciones de operación (Dam et al., 2024).

2.2. *Propiedades Termodinámicas Básicas*

El H₂, posee cinco grados de libertad a temperatura ambiente, tres traslacionales (movimiento en los ejes X, Y y Z) y dos rotacionales (rotación alrededor de los ejes perpendiculares al enlace), lo que se traduce en elevados calores específicos. El calor específico a presión constante (C_p) es decir, la energía necesaria para elevar la temperatura de 1 kg de gas en 1 K manteniendo la presión constante, es de aproximadamente 14 kJ/(kg·K) a 298 K y 1 atm. Por su parte, el calor específico a volumen constante (C_v), es la energía requerida para el mismo aumento de temperatura sin permitir variación de volumen, esta alcanza unos 10 kJ/(kg·K) en esas mismas condiciones. De estos valores se deriva la relación adiabática (γ) entre C_v y C_p la cual posee un valor aproximado de 1,4, un parámetro que favorece teóricamente la eficiencia de ciclos Otto ideales (Szwaja et al., 2024).

Sin embargo, tanto C_p como C_v aumentan con la temperatura debido a la activación de modos vibracionales en la molécula de H₂, lo que provoca variaciones en γ durante la combustión. Por ello, es importante incluir C_p y C_v variables en los modelos termodinámicos para predecir con precisión la distribución de energía y el trabajo extraído en el cilindro (Dam et al., 2024).

2.3. *Inflamabilidad y Propagación de la Llama*

El H₂ presenta un amplio rango de inflamabilidad en aire (4 %–75 % en volumen), lo que permite operar con mezclas muy pobres (exceso de aire) y reducir las emisiones de NO_x sin riesgo de combustión incompleta (Purayil et al., 2023). No obstante, su bajo

límite inferior de inflamabilidad (4 %) y su elevada velocidad de propagación laminar de la llama ($\approx 2\text{--}3$ m/s), casi diez veces la de la mezcla gasolina–aire, aumentan el riesgo de detonaciones y exigen un control muy preciso de la proporción aire–combustible y del momento de ignición (Halder et al., 2024).

Además, la distancia de apagado de la llama en H_2 es menor que en hidrocarburos, lo que intensifica las pérdidas de calor hacia las paredes del cilindro. Para contrarrestar esto, es necesario optimizar la turbulencia de la mezcla y el diseño de la cámara de combustión, garantizando una quema completa y estable sin sacrificar la eficiencia térmica (Halder et al., 2024).

2.4. *Avances Recientes en Investigación sobre H_2*

Recientes estudios han optimizado la inyección directa de hidrógeno (H_2 -DI) en la cámara de combustión para aumentar la densidad de potencia, ya que al inyectarse después de la admisión se reduce el desplazamiento de aire y se evita el retroceso de llama. Este fenómeno, en el que la mezcla inflama prematuramente en el colector y propaga la llama hacia el sistema de admisión, disminuye la estabilidad de combustión y la vida útil de los componentes (Goyal et al., 2024).

Ensayos de banco CFR (Investigación Cooperativa de Combustibles, por sus siglas en inglés) han demostrado que elevar la relación de compresión en aplicaciones con H_2 mejora la estabilidad de la combustión gracias a su alta resistencia al autoencendido. No obstante, este incremento provoca mayores pérdidas de calor por conducción a las paredes, lo que subraya la necesidad de estrategias de gestión térmica más eficientes para conservar el rendimiento (Beccari et al., 2023; Wang et al., 2023).

Además, los sistemas de encendido por pre-cámara (Encendidos por chorro turbulento, TJI por sus siglas en inglés) han mostrado gran eficacia al inflamar mezclas muy pobres de manera rápida y uniforme. Al dirigir el chorro turbulento desde la pre-cámara a la zona principal, estas tecnologías reducen la variabilidad ciclo a ciclo y amplían el límite de operación en régimen pobre sin sacrificar la estabilidad de la llama (Li et al., 2024).

2.5. Normativas y Estándares de Calidad

La norma ISO 14687:2019 establece una pureza mínima de 99,97 % molar de H₂, limitando impurezas como agua, CO, CO₂ y H₂S para proteger los componentes sensibles del sistema de suministro (International Organization for Standardization [ISO], 2019). SAE International (2020) adapta estos requisitos en la especificación J2719:2020 para vehículos de pila de combustible, garantizando la interoperabilidad entre estaciones de repostaje.

En cuanto al almacenamiento seguro, ISO 19881:2018 regula el diseño, la fabricación y los ensayos de tanques de hidrógeno a alta presión (hasta 70 MPa), mientras que SAE International (2020) en la norma J2579:2020 detalla los protocolos de tuberías, válvulas y dispositivos de alivio para asegurar resistencia a fugas, impactos y fragilización por hidrógeno. Estas normas son fundamentales para el despliegue masivo de vehículos a H₂, ya que garantizan tanto la calidad del combustible como la seguridad y la durabilidad de los sistemas de almacenamiento y suministro.

3. Fundamentos Termodinámicos en Motores De H₂

3.1. Primera Ley de la Termodinámica

La Primera Ley establece que la energía química aportada por el H₂ se conserva y se reparte entre el trabajo realizado por el pistón y el calor cedido a los gases de escape y las paredes del cilindro. Tomando $Q > 0$ para calor aportado al sistema y $W > 0$ para trabajo realizado por el sistema, la Primera Ley se expresa como:

$$Q - W = \Delta U \quad [\text{Ec. 1}]$$

Donde:

ΔU : es el cambio de energía interna del fluido

Q : el calor liberado en la combustión

W : el trabajo mecánico extraído

Con este balance se cuantifica la eficiencia de conversión de energía química en trabajo útil. (Dam et al., 2024).

3.2. Segunda Ley de la Termodinámica

Esta ley establece que todo proceso real genera entropía (S), una magnitud que cuantifica el desorden del sistema y la parte de la energía que ya no puede convertirse en trabajo útil (Çengel & Boles, 2019). En los motores a hidrógeno, las principales fuentes de irreversibilidad, y por tanto de aumento de entropía, son la propia combustión y las pérdidas debidas a la fricción mecánica y a la transferencia de calor hacia el refrigerante y el entorno (Szwaja et al., 2024).

Para evaluar la eficiencia de conversión de energía, se recurre al concepto de exergía, definido como la máxima cantidad de trabajo útil extraíble cuando un sistema se lleva de forma reversible al estado de equilibrio con su entorno de referencia. Un análisis exergético localiza las “destrucciones de exergía” es decir, los puntos concretos donde las irreversibilidades reducen la capacidad de producir trabajo, y orienta las mejoras de diseño: optimizar la relación de compresión, reforzar el aislamiento térmico o minimizar el rozamiento interno para maximizar el trabajo útil extraído del combustible (Assad & Rosen, 2022; Szwaja et al., 2024).

3.3. Balance de Masa

El balance de masa en un ciclo de motor exige que la masa de aire (O₂) más la masa de H₂ admitidas sean iguales a la masa de productos expulsados (vapor de agua, N₂ y trazas de NO_x). La reacción estequiométrica simplificada,



garantiza que por cada mol de O₂ y 2 moles de H₂ consumido se produzcan dos moles de H₂O gaseosa (Çengel & Boles, 2019).

El coeficiente lambda (λ) se define como la relación entre la cantidad real de aire suministrada al cilindro y la necesaria para una combustión estequiométrica; su inversa, conocida como relación de equivalencia o dosado (ϕ), se calcula como $\phi = 1/\lambda$ (Heywood, 2018). De este modo, $\lambda > 1$ indica mezcla pobre (exceso de aire) y $\lambda < 1$ mezcla rica (exceso de combustible).

En condiciones de mezcla pobre $\lambda > 1$ el exceso de aire reduce la temperatura máxima de llama y ralentiza su propagación. Esto atenúa la formación térmica de NO_x , pero incrementa las pérdidas por bombeo y disminuye el torque disponible. En motores de hidrógeno se ha observado que funcionan de manera estable con ϕ tan bajo como 0,3, logrando emisiones prácticamente nulas de CO (Purayil et al., 2023; Lu et al., 2022).

Cuando $\lambda = 1$ la proporción aire–combustible es óptima para transformar la mayor parte de la energía química en trabajo; sin embargo, las temperaturas de llama alcanzadas favorecen la generación de NO_x térmico. Por ello, suele introducirse un leve exceso de aire o EGR para moderar esos picos de NO_x sin sacrificar significativamente la eficiencia térmica (Nguyen et al., 2023).

En mezcla rica ($\lambda < 1$), el exceso de H_2 provoca combustión incompleta, de modo que quedan H_2 y O_2 sin reaccionar junto con radicales H y OH. Aunque estos radicales aceleran la fase inicial de la llama, la presencia de gas no quemado reduce la eficiencia global del ciclo. Asimismo, pueden formarse óxidos de nitrógeno por rutas no térmicas, incrementando las emisiones de NO y NO_2 incluso a temperaturas inferiores a las típicas de formación térmica, lo que eleva el riesgo de detonación y dificulta el control del avance de chispa (Nguyen et al., 2023; Wang et al., 2023).

En altitudes elevadas, la menor densidad de aire tiende a enriquecer la mezcla (reducción de λ). Para evitar mezclas excesivamente ricas, se recurre a la sobrealimentación o a la EGR, que permiten mantener λ por encima de uno y controlar las emisiones de NO_x incluso en condiciones de aire enrarecido (Goyal et al., 2024).

3.4. Entalpía

La entalpía

$$H = U + pV \quad [\text{Ec. 3}]$$

Donde:

H: es la entalpía expresada en julios (J)

U: es la energía interna almacenada en las moléculas del fluido, en J

p: es la presión absoluta se mide en pascales (Pa)

V: es el volumen, espacio ocupado por el fluido, en metros cúbicos (m³).

La entalpía es una función de estado termodinámica que cuantifica el contenido total de energía de un sistema en condiciones de presión constante. Se define como la suma de la energía interna del sistema (U) y el producto de la presión por el volumen ($p \cdot V$), de manera que cualquier variación de entalpía (ΔH) a presión constante equivale al calor intercambiado con el entorno. (Çengel & Boles, 2019).

A nivel de modelado, la entalpía permite calcular el calor liberado en cada fase del ciclo y su distribución entre trabajo y aumento de entalpía de los gases. Además, según la Ley de Hess (que establece que el cambio de entalpía total de una reacción es independiente de la ruta seguida y equivale a la suma de los cambios en pasos intermedios), la entalpía de reacción se obtiene de la diferencia entre las entalpías de formación de productos y reactivos. Por ejemplo, la entalpía estándar de formación del agua gaseosa ($-241,8 \text{ kJ/mol}$) y del H_2 (0 kJ/mol) definen el valor del calor de combustión por mol de H_2 , facilitando el diseño de sistemas de inyección y control térmico (Levikhin & Boryaev, 2024).

Medir la entalpía de combustión es esencial para validar el comportamiento termodinámico de un motor a hidrógeno, optimizar las estrategias de inyección y predecir con precisión su eficiencia energética en condiciones reales (Szwaja et al., 2024; Shahid et al., 2024).

3.5. Ecuación de Estado y Propiedades Variables

La ecuación de los gases ideales

$$pV = mRT \quad [\text{Ec. 4}]$$

Donde:

p : es la presión absoluta del gas (Pa)

V : es el volumen ocupado por la masa mmm de gas (m^3)

m : es la masa de gas (kg)

R : es la constante específica de los gases ideales ($\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$)

T : es la temperatura absoluta (K)

Es una aproximación válida en motores H_2 -MCI, permitiendo relacionar presión, volumen y temperatura. También, los calores específicos C_p y C_v no son constantes: aumentan con la temperatura debido a la activación de modos vibracionales en moléculas diatómicas, reduciendo el cociente γ

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad [\text{Ec. 5}]$$

Donde:

C_p : es el calor específico a presión constante ($\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$)

C_v : es el calor específico a volumen constante ($\text{J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$)

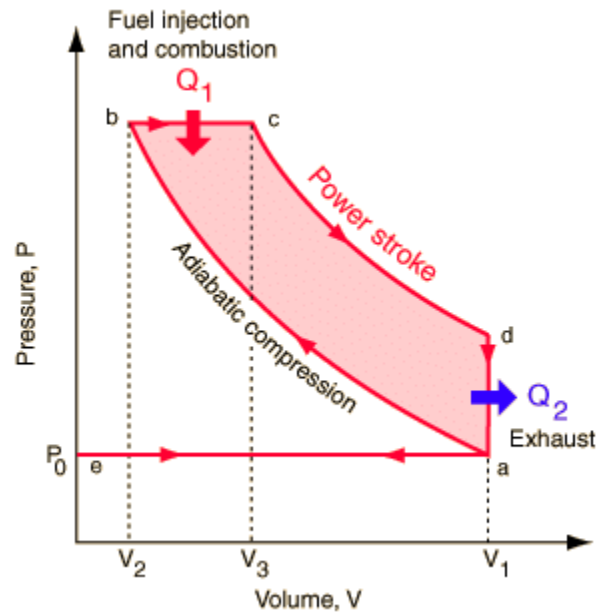
γ : es el índice adiabático

Reduciéndolo de $\sim 1,4$ a $\sim 1,3$ entre 300 K y 1000 K (Çengel & Boles, 2019). Incorporar C_p en función de la temperatura en simulaciones mejora la precisión en la predicción de presiones máximas y eficiencia de ciclo dentro del cilindro.

3.6. *Diagrama Presión-Volumen (P-V)*

El diagrama (P-V) del ciclo Otto en motores de H_2 destaca una combustión casi instantánea a volumen constante, produciendo un pico de presión muy marcado cerca del punto muerto superior, lo que incrementa el trabajo de expansión (Marzouk & Ghulman, 2015). El área encerrada representa el trabajo neto

Figura 2.
Diagrama (P-V) en un MCI



Tomado de **Nolan, Erin. (2016). Engine Flow Measurement Research and Design for Test Bed for Small Marine Diesel Engines.**

3.7. Efecto de la Altitud y Temperatura en la Entalpía

La presión atmosférica y la densidad del aire caen exponencialmente con la altitud según la ecuación barométrica, lo que reduce la masa de aire (y de O₂) aspirada y, por ende, la potencia de los motores atmosféricos—en torno a un 10–15 % de pérdida a 3 000 m s.n.m. (Lapuerta, García-Contreras & Rodríguez-Fernández, 2006; Ramírez Hernández, 2024). Además, como:

$$h = Cp * T \quad [\text{Ec. 6}]$$

Donde:

h: es la entalpía por unidad de masa (J/kg).

Cp: es el calor específico a presión constante (J/(kg·K))

T: es la temperatura absoluta del gas. (K)

Con ello, una menor temperatura de admisión disminuye directamente la entalpía del aire-H₂ antes de la combustión, reduciendo la energía disponible para trabajo y obligando a recurrir a sistemas de sobrealimentación o ajustes de inyección para compensar estas variaciones.

4. Modelos de Simulación Teórica

4.1. Definición

Un modelo de simulación teórica es una representación matemática o lógica de un sistema físico, químico o mecánico que se implementa en un entorno computacional para reproducir y analizar su comportamiento bajo diferentes condiciones, sin recurrir a prototipos físicos costosos o peligrosos (Durán, 2020). Estos modelos parten de ecuaciones y principios teóricos, por ejemplo, balances de masa y energía, y se ejecutan mediante algoritmos numéricos en plataformas como MATLAB/Simulink o lenguajes de propósito general (UNIR Revista, 2024).

4.2. Características Principales

Los modelos de simulación teórica se fundamentan en leyes físicas y ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del sistema con fidelidad a los principios subyacentes, a diferencia de los enfoques puramente empíricos que se basan en correlaciones estadísticas (Durán, 2020).

Estas representaciones se implementan de forma computacional, codificándose y ejecutándose en ordenadores que van desde procesadores convencionales hasta granjas de GPU, lo que permite resolver de manera eficiente grandes volúmenes de datos y ecuaciones complejas (ScienceDirect Topics, n.d.).

Su arquitectura modular y parametrizable facilita la descomposición del sistema en componentes, por ejemplo, transferencia de calor, dinámica de fluidos o modelos de combustión, y la variación de parámetros clave (condiciones iniciales, coeficientes de

fricción, relaciones de compresión), de modo que se pueden explorar múltiples escenarios “qué pasaría si” sin necesidad de prototipos físicos (UNIR Revista, 2024).

Además, los modelos teóricos adoptan diversos paradigmas de simulación, discreto, continuo o basado en agentes, según la escala temporal y la naturaleza de las interacciones que se deseen representar, lo que amplía su aplicabilidad a sistemas complejos de distinta índole (ScienceDirect Topics, n.d.).

4.3. *Propósitos*

La predicción y optimización permiten anticipar el comportamiento de sistemas mecánicos o térmicos, como motores de hidrógeno, bajo diferentes regímenes de operación sin recurrir a costosos bancos de prueba físicos (Kiss et al., 2024).

La validación teórica consiste en contrastar los resultados obtenidos en la simulación con datos experimentales parciales, ajustando coeficientes empíricos y asegurando la coherencia del modelo con los principios físicos subyacentes (Durán, 2020).

En el diseño y control, los modelos de simulación teórica facilitan el desarrollo de estrategias como las de inyección de combustible, sistemas de refrigeración y algoritmos de control en tiempo real, contribuyendo a mejorar la eficiencia energética y reducir las emisiones contaminantes (Advance SAGE, 2024).

4.4. *Modelos Simplificados de Combustión*

Para integrar la combustión de H_2 en simulaciones de MATLAB/Simulink sin resolver la química detallada, se utilizan modelos empíricos de bajo costo computacional que capturan el progreso de la liberación de calor y las pérdidas térmicas (Sharma & Zhao, 2022).

4.4.1. Modelos de Simulación Cero-Dimensionales (0-D). Los modelos 0-D consideran el volumen de control como una zona homogénea en la que todas las propiedades (presión, temperatura, composición) son uniformes, resolviendo únicamente

los balances integrales de masa y energía en función del tiempo. Debido a su simplicidad, estos modelos ofrecen un coste computacional muy bajo y permiten estudios rápidos de sensibilidad y calibración, así como su integración en lazo cerrado para control en tiempo real (Kalikatzarakis et al., 2021; Mohammadkhani, Yari, & Ranjbar, 2019). A pesar de no capturar gradientes espaciales, se han reportado precisiones del orden del 3–5% frente a datos experimentales, lo que los hace idóneos para fases preliminares de diseño y análisis paramétrico de combustión en motores alternativos (Kalikatzarakis et al., 2021).

4.4.2. Modelos Unidimensionales (1-D). Los modelos 1-D incorporan variación espacial a lo largo de una única dimensión, por ejemplo, la longitud de conductos de admisión o escape, resolviendo las ecuaciones de dinámica de gases y energía en un eje y permitiendo capturar fenómenos de propagación de ondas de presión, reflexiones y pérdidas por fricción (Saied & Abdelwahab, 2025). Herramientas industriales como emplean esquemas 1-D para generar mapas de rendimiento, torque y emisiones, logrando un balance óptimo entre fidelidad física y tiempos de simulación adecuados para simulaciones de ciclo de conducción y optimización de arquitecturas de tren motriz (Marinoni et al., 2021).

4.4.3. Modelos Bidimensionales (2-D). Los modelos 2-D, generalmente en formulación axisimétrica, extienden la resolución a dos direcciones (radial y axial), lo que permite estudiar con mayor detalle la dinámica de la llama, los perfiles de temperatura y la interacción chorro-pared en la cámara de combustión. Al resolver las ecuaciones de conservación de masa, momento y energía en dos dimensiones, estos modelos proporcionan información espacialmente distribuida con un coste computacional moderado frente a un simulador 3-D completo (Bertoldi, Deschamps, & Oliveira Jr., 2007). Estudios numéricos en Fluent han mostrado que los modelos 2-D axisimétricos reproducen adecuadamente las variaciones de presión y turbulencia, facilitando el diseño de geometrías de cámara y válvulas con tiempos de cómputo razonables (Bertoldi et al., 2007).

5. Sensibilidad conceptual a condiciones externas

En el diseño y control, los modelos de simulación teórica facilitan el desarrollo de estrategias como las de inyección de combustible basadas en mapeos volumétricos, la optimización de sistemas de refrigeración mediante simulaciones termo-fluidodinámicas y la implementación de algoritmos de control en tiempo real en la unidad de mando electrónico, contribuyendo a mejorar la eficiencia energética y reducir las emisiones contaminantes (Marinoni et al., 2021; Sharma & Zhao, 2022).

La altitud reduce la presión atmosférica y, con ella, la densidad del aire y la cantidad de oxígeno disponible en admisión. Lapuerta et al. (2006) documentan que, en motores diésel de aspiración natural, la potencia puede disminuir entre un 10% y un 15% a 3000 m s.n.m. Para motores a hidrógeno, Morales Rojas, et. al (2024) realizaron ensayos en un motor de ignición por compresión de carga homogénea (HCCI, por sus siglas en inglés *Ignición por Compresión de Carga Homogénea*) alimentado con H₂ a 1495 m s. n. m. y observaron que, para inducir la autoignición, fue necesario precalentar la admisión desde los aproximadamente 90 °C habituales hasta entre 188 °C y 235 °C, compensando así una reducción de densidad de aire cercana al 15 % y alcanzando una eficiencia térmica máxima del 34,5 %.

Por otro lado, la temperatura de admisión modula la combustión: un aire más frío entra con mayor densidad, aumentando la masa de aire admitida, pero reduciendo la velocidad laminar de propagación de la llama; en cambio, un precalentamiento moderado acelera la autoignición y acorta la duración del proceso, elevando la eficiencia hasta un punto óptimo; a temperaturas aún mayores, la disminución de densidad atenúa estos beneficios. Estas consideraciones son fundamentales al diseñar estrategias de gestión térmica en la admisión de motores H₂-MCI, para mantener el rendimiento y evitar la pre-ignición (Purayil et al., 2023).

Materiales y Métodos

1. Materiales

Para este estudio se empleó un computador portátil junto con licencia educativa de MATLAB 2024b y los bloques Simulink, además de Microsoft Word y Excel para la

redacción y el procesamiento de datos. Los modelos y scripts se gestionaron manualmente para llevar un control de versiones. También, se contó con acceso institucional a bases de datos científicas (Science Direct y Scopus) para obtener propiedades verificadas para el modelo y validación bibliografía.

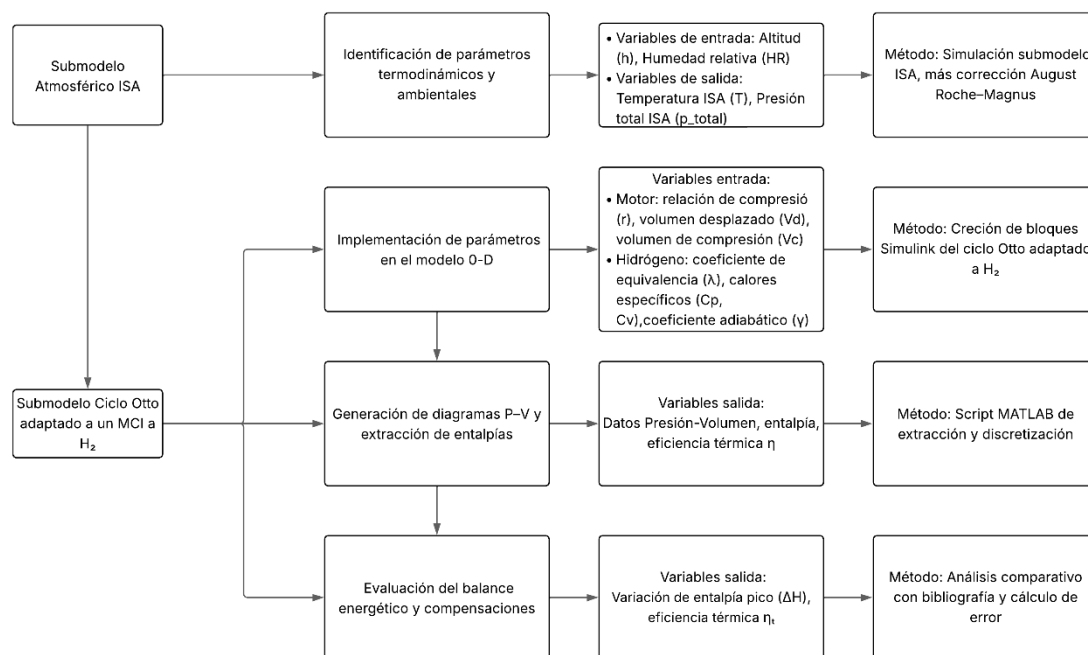
2. Métodos

Para conseguir en este estudio realizar un modelo termodinámico 0-D simplificado el cual permita cuantificar la entalpía en Matlab/SIMULINK de un MCI que funcione con H_2 , se adoptará un enfoque cuantitativo, de carácter descriptivo y simulacional.

De modo que en este estudio se implementará un submodelo basado en el de la Atmósfera Estándar Internacional (ISO 2533:1975) que calculará presión y temperatura en función de la altitud, incorporando una corrección por humedad relativa según las ecuaciones propuestas por August Roche-Magnus. A continuación, se desarrollará un modelo 0-D que represente las fases del ciclo Otto (admisión, compresión, combustión y expansión) adaptado a H_2 , empleando ecuaciones simplificadas validadas en la bibliografía. Los parámetros del motor se calibrarán con base en pruebas de bancada de un motor a hidrógeno realizadas por Zabala et al. (Anexo 2), las cuales proporcionan perfiles de simulación y sirven de guía para ajustar las condiciones de entrada del modelo.

Una vez configurado el modelo, se realizarán simulaciones paramétricas variando la altitud (Guayaquil, Baeza, Quito) y coeficiente λ de la mezcla en un rango de 0,85 a 1,6. Para posteriormente, se extraer los valores de la entalpía pico a partir de los resultados de presión y temperatura generados por la simulación, mismos que se exportarán en formato CSV para su análisis cuantitativo. Finalmente, se contrastarán los resultados simulados con datos de entalpía de bibliografías, mostrando el error relativo para validar la precisión y reproducibilidad del modelo.

Figura 3.
Mapa conceptual del proceso metodológico y variables clave



Fuente: Elaboración propia

2.1. Alcance y contexto

La presente investigación se centra en la simulación numérica del ciclo Otto de un motor alimentado con H_2 , con el objetivo de cuantificar la variación de la entalpía del fluido de trabajo en función de la altitud. Para ello se seleccionaron tres puntos representativos en Ecuador:

- Guayaquil (0 m s.n.m.): condición de referencia a nivel del mar.
- Baeza (1914 m s.n.m.): altitud intermedia, para la cual existen valores de entalpía reportados en la bibliografía que servirán de comparación.
- Quito (2850 m s.n.m.): altitud elevada, que permite evaluar el efecto máximo de la disminución de presión y densidad del aire.

El alcance de la metodología abarca la generación de condiciones de presión y temperatura propias de cada altitud en MATLAB/Simulink, la extracción de la entalpía resultante y la validación bibliográfica de dichos valores frente a datos reportados en documentos especializados.

El modelo de simulación se compone de dos subsistemas principales, desarrollados en MATLAB R2024a y Simulink, que actúan de forma secuencial para generar las condiciones de admisión y reproducir el ciclo Otto con H₂, con el fin de calcular la variación de entalpía en función de la altitud.

2.2. Submodelo Atmosférico.

En Simulink, el bloque denominado atm (implementado en el archivo atm_condiciones_1.m) recibe como única entrada la altitud h y, opcionalmente, la humedad relativa HR . Internamente, realiza los siguientes pasos para aplicar el modelo ISA (Modelo de la Atmósfera Estándar Internacional por sus siglas en inglés): de la troposfera ($h < 11$ km)

$$T(h) = T_0 - L h \quad [\text{Ec. 7}]$$

Donde:

$T(h)$: es la temperatura absoluta en la altitud h (K).

T_0 : es la temperatura al nivel del mar, o temperatura de referencia, 288,15 K (15°C).

L : es el gradiente térmico adiabático, que en la troposfera ISA indicando la caída de temperatura por metro de ascenso.

h : es la altitud sobre el nivel del mar (m).

Y para la presión,

$$p(h) = p_0 \left(1 - \frac{L h}{T_0} \right)^{\frac{g M}{R L}} \quad [\text{Ec. 8}]$$

Donde:

$p(h)$: presión atmosférica a la altitud h (Pa)

p_0 : presión de referencia (nivel del mar) (Pa)

L : gradiente térmico de la atmósfera estándar ISA (K/m)

h : altitud sobre el nivel del mar (m)

T_0 : temperatura de referencia (nivel del mar) (K)

g : aceleración de la gravedad

M : masa molar del aire seco

R : constante universal de los gases

La expresión $\left(1 - \frac{Lh}{T_0}\right)$ representa la variación adiabática de la temperatura con la altitud, y el exponente $\frac{gM}{RL}$ ajusta cómo esa variación afecta la presión.

donde los parámetros T_0 , p_0 , L , g , M , R , provienen de la norma ISO 2533:1975, Y del Estándar Atmosférico de los Estados Unidos (1976) Consulte (Anexo 1)

Luego se corrige por humedad relativa (HR%) mediante el modelo August–Roche–Magnus

$$e_{sat} = 6.1094 \exp\left(\frac{17.625 T_c}{T_c + 243.04}\right) * 100 \quad [\text{Ec. 9}]$$

Donde:

e_{sat} : es la presión de vapor de saturación, en hectopascales (hPa).

T_c : es la temperatura del aire en grados Celsius (°C).

6,1094 hPa es la presión de vapor de saturación a 0 °C.

17,625 y 243,04 son constantes empíricas ajustadas para reproducir el comportamiento real del agua en el rango de temperaturas de interés.

Y

$$e = \frac{HR}{100} e_{sat} \quad [\text{Ec. 10}]$$

Donde:

e : es la presión parcial de vapor de agua en el aire, en hectopascales (hPa).

HR: es la humedad relativa, expresada en porcentaje (%).

e_{sat} : es la presión de vapor de saturación a la temperatura dada, en hPa.

La presión de aire seco se obtiene restando esa presión de vapor de la presión total atmosférica a la altitud considerada. En notación:

$$p_{aireseco} = p_{total} - e \quad [\text{Ec. 11}]$$

Donde:

$p_{aireseco}$: es la presión ejercida únicamente por el aire seco, en Pa.

p_{total} : es la presión atmosférica a la altitud

e : es la presión parcial de vapor de agua,

En el modelo de admisión, la variable p_1 representa la presión efectiva de aire seco en el Punto Muerto Inferior. Se calcula tomando la presión total a la altitud h denotada por $p(h)$ y obtenida del modelo ISA y restándole la presión parcial de vapor de agua, e . De este modo,

$$p_1 = p(h) - e \quad [\text{Ec. 12}]$$

Donde:

p_1 : la presión efectiva de aire seco en el PMI (Pa)

$p(h)$: es la presión atmosférica a la altitud de entrada según ISA (Pa).

e : es la presión parcial de vapor de agua

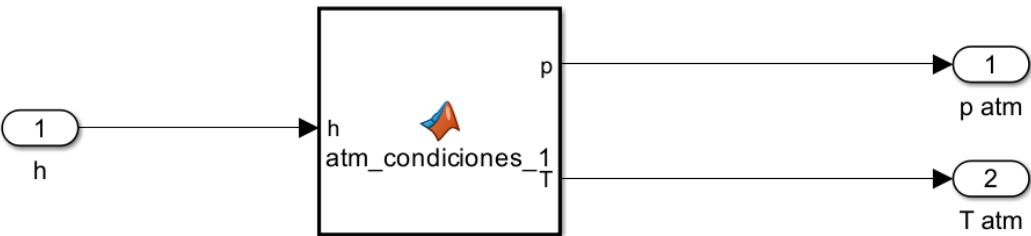
La adopción del modelo de atmósfera estándar ISA (ISO 2533) en simulaciones de motores de combustión interna de H_2 se sustenta en su uso generalizado y validación rigurosa en aplicaciones de propulsión:

Lammen, Dewitte y Scheers (2025) incorporaron explícitamente las ecuaciones ISA en un bloque de Simulink para reproducir los perfiles de presión y temperatura en diferentes niveles de vuelo durante el análisis de rendimiento de una aeronave híbrido-eléctrica alimentada con H_2 . Su estudio demostró desviaciones inferiores al 1% frente a datos experimentales, validando la fidelidad de ISA como condición de contorno en simulaciones de altitud (Lammen, Dewitte, & Scheers, 2025).

Piqueras et al. (2024) utilizaron asimismo la presión y temperatura ISA como entrada para un compresor volumétrico tipo Roots en un sistema de pila de combustible, encontrando una excelente concordancia con los valores tabulados del estándar y

subrayando la precisión y reproducibilidad de este enfoque en MATLAB/Simulink (Piqueras et al., 2024).

Figura 4.
Modelo Atmosférico



Fuente: Elaboración propia

Para la validación de este código se procedió a utilizar la calculadora del modelo ISA, la cual está basada en el modelo NASA-TM-X-74335 (Anexo 3), donde el resultado a altitudes de 0 m s.n.m y de 2850 m s.n.m fueron los siguientes.

Tabla 2.
Resultados teóricos del modelo ISA

Altitud	Presión
0 m s.n.m	101325 Pa
1914 m s.n.m	80348 Pa
2850 m s.n.m	71456 Pa

Recuperado de. <https://aerotoolbox.com/atmcalc/>

El bloque del modelo ISA se validó comparando sus salidas de presión y temperatura con datos experimentales y con los perfiles tabulados de la norma ISA (Lammen, Dewitte & Scheers, 2025; Piqueras et al., 2024). De este modo, se garantiza que las condiciones de admisión reflejen fielmente la atmósfera real, lo cual es fundamental para asegurar la precisión en el cálculo de la entalpía y la fiabilidad de las simulaciones del ciclo Otto con H₂.

Tabla 3.
Resumen de Variables del Submodelo Atmosférico

Variable	Nombre en código	Tipo	Descripción	Unidad
Altitud	h	Entrada	Altitud sobre el nivel del mar	m
Humedad relativa	HR	Entrada	Porcentaje de humedad relativa del aire	-
Temperatura absoluta	T	Salida	Temperatura calculada por el modelo ISA (troposfera)	K
Presión de aire seco	p_aireSeco	Salida	Presión de aire seco tras corregir la presión total por la humedad	Pa

Fuente. Elaboración propia

2.3. Submodelo del Ciclo Otto.

El código descrito en “**Entalpia_Altitud.m**” implementa un submodelo del ciclo Otto ideal para un motor de H_2 , compuesto por cuatro procesos termodinámicos y respaldado por un submodelo atmosférico estándar ISA. A continuación, se describirán en detalle todos los pasos, variables y ecuaciones usadas.

2.3.1. Parámetros de Operación del Motor

Al no contar con un MCI de H_2 en banco, se recurrió a la literatura para obtener los parámetros geométricos y de diseño necesarios para la simulación. En concreto, para este estudio se seleccionaron los valores reportados en Zabala (2013) en la simulación experimental citada en el Anexo 2; a continuación, se presentan los variables extraídas de dicho estudio:

Tabla 4.
Tabla de Resumen de las Variables de Parámetros del Motor

Variable	Nombre en código	Descripción	Unidad
Relación de compresión	r	Relación de compresión (de Punto Muerto Inferior a Punto Muerto Superior)	—
Volumen de desplazamiento	Vd	Volumen barrido por todos los cilindros	m ³
Número de cilindros	Ncyl	Cantidad de cilindros	—

Volumen muerto	V_c	Volumen de la cámara al Punto Muerto Superior (volumen muerto)	m^3
Volumen total al PMI	V_1	Volumen total en Punto Muerto Inferior ($V_d + V_c$)	m^3
Volumen en PMI por cilindro	V_1_{cyl}	Volumen en Punto Muerto Inferior dividido por número de cilindros	m^3
Volumen muerto por cilindro	V_c_{cyl}	Volumen de la cámara al Punto Muerto Superior dividido por cilindro	m^3

Fuente. Elaboración propia

2.3.2. Admisión y Mezcla.

Durante el proceso de admisión, el pistón desciende desde el Punto Muerto Superior hasta el Punto Muerto Inferior, aspirando aire al cilindro. En esta fase se define la condición inicial del volumen y de la composición de la mezcla aire-H₂:

2.3.2.1. Volumen por Cilindro.

El volumen barrido por cada cilindro, $V_{d,cil}$, se calcula dividiendo la cilindrada total $V_{d,total}$ entre el número de cilindros N_{cyl}

$$V_{d,cil} = \frac{V_{d,total}}{N_{cyl}} \quad [Ec. 13]$$

Donde:

V_d , cil: es el volumen de desplazamiento por cilindro, es decir, el espacio barrido por un solo cilindro entre PMI y PMS (m^3).

V_d , total: es el volumen de desplazamiento total del motor, suma del espacio barrido por todos los cilindros (m^3).

N_{cyl} : es el número de cilindros del motor (adimensional).

Este volumen más el volumen muerto V_c determina el volumen al final de la admisión,

$$V_1 = V_{d,cil} + V_c \quad [\text{Ec. 14}]$$

Donde:

V_1 : volumen total del cilindro en el punto muerto inferior (m^3).

$V_{d,cil}$: volumen de desplazamiento por cilindro (m^3), es decir, la diferencia de volumen entre el punto muerto inferior y el punto muerto superior.

V_c : volumen de espacio muerto (m^3), que corresponde al volumen de la cámara de combustión cuando el pistón está en el PMS

2.3.2.2. *Determinación de la Masa de Aire*

Se asume que el aire se comporta como gas ideal. Aplicando la ley de los gases ideales,

$$p_1 V_1 = m_{\text{air}} R_{\text{air}} T_1 \quad [\text{Ec. 15}]$$

Donde:

p_1 y T_1 : son la presión y la temperatura de admisión, obtenidas del modelo ISA.

R_{air} : es la constante de gas específico del aire.

m_{air} : es la masa de aire admitida por cilindro.

Despejando,

$$m_{\text{air}} = \frac{p_1 V_1}{R_{\text{air}} T_1} \quad [\text{Ec. 16}]$$

Donde:

m_{air} : es la masa de aire admitida en un cilindro (kg).

p_1 : es la presión de aire seco en el PMI (Pa).

V_1 : es el volumen de admisión por cilindro en el PMI (m^3).

R_{air} : es la constante específica del aire

T_1 : temperatura del aire en el PMI, tras corrección de altitud y humedad (K).

2.3.2.3. Relación Estequiométrica y Masa de H₂

En condiciones estequiométricas ($\lambda=1$), la proporción aire–combustible para H₂ es:

$$R_{air_comb} = \frac{m_{air}}{m_{H_2}} = 34,32 \quad \left[\frac{kg \text{ aire}}{kg H_2} \right] \quad [Ec. 17]$$

Donde:

R_{air_comb} : es la relación masa de aire sobre masa de hidrógeno inyectado (adimensional).

m_{air} : es la masa de aire admitida en el cilindro calculada (kg).

m_{H_2} : es la masa de hidrógeno inyectada en el cilindro, determinada a partir de la relación aire–combustible estequiométrico y la masa de aire (kg).

Por tanto, la masa de H₂ necesaria para quemar totalmente el aire admitido es

$$m_{H_2} = \frac{m_{air}}{R_{air_comb} \lambda} \quad [Ec. 18]$$

Donde:

m_{H_2} : masa de hidrógeno requerida para la combustión (kg).

m_{air} : masa de aire admitida en el cilindro (kg).

R_{air_comb} : relación aire–combustible estequiométrico teórica para hidrógeno (kg aire / kg H₂).

λ : factor de equivalencia de mezcla, adimensional

Tabla 5.
Tabla de Resumen de las Propiedades Termoquímicas

Variable	Nombre en código	Descripción	Unidad
Poder calorífico inferior de H ₂	PCI_H ₂	Energía liberada por kg de H ₂ en combustión completa	J/kg

Relación aire– combustible estequiométrico	R _{air_comb}	Proporción masa de aire / masa de H ₂ para combustión estequiométrica	—
Constante específica del aire	R _{air}	Constante de gas específica para aire	J/(kg·K)
Calor específico a presión constante del aire	C _{p_air}	Calor necesario para elevar 1 kg de aire 1 K a presión constante	J/(kg·K)
Calor específico a volumen constante del aire	C _{v_air}	Calor necesario para elevar 1 kg de aire 1 K a volumen constante	J/(kg·K)
Calor específico a presión constante del H ₂	c _{p_H2}	Calor necesario para elevar 1 kg de H ₂ 1 K a presión constante	J/(kg·K)
Calor específico a volumen constante del H ₂	c _{v_H2}	Calor necesario para elevar 1 kg de H ₂ 1 K a volumen constante	J/(kg·K)
C _p de productos (aprox. aire)	c _{p_prod}	C _p estimado de los productos de combustión (aprox. iguales al aire)	J/(kg·K)
C _v de productos (aprox. aire)	c _{v_prod}	C _v estimado de los productos de combustión (aprox. iguales al aire)	J/(kg·K)

Fuente. Elaboración propia

2.3.2.4. Preparación de la Mezcla.

La masa total de la mezcla se obtiene como

$$m_{\text{total}} = m_{\text{air}} + m_{\text{H}_2} \quad [\text{Ec. 19}]$$

Donde:

*m*_{total}: es la masa total de la mezcla aire–hidrógeno en el cilindro (kg).

*m*_{air}: es la masa de aire admitida, calculada previamente mediante (kg).

m_{H_2} : es la masa de hidrógeno inyectada en el cilindro, determinada a partir de la relación aire–combustible y la masa de aire (kg).

A partir de estas dos masas, el código calcula las propiedades termodinámicas de la mezcla aire–H₂ (capacidades caloríficas $c_{p,mezcla}$, $c_{v,mezcla}$ y relación $\gamma_{mezcla} = c_{p,mezcla}/c_{v,mezcla}$ mediante promedio ponderado:

$$c_{p,mezcla} = \frac{m_{air} c_{p,air} + m_{H_2} c_{p,H_2}}{m_{total}}, \quad [Ec. 20]$$

Donde:

$c_{p,mezcla}$ es el calor específico de la mezcla aire–H₂ a presión constante (J/(kg·K)).

m_{air} es la masa de aire admitida en el cilindro (kg).

$c_{p,air}$ es el calor específico a presión constante del aire (J/(kg·K)).

m_{H_2} es la masa de hidrógeno inyectada en el cilindro (kg).

c_{p,H_2} es el calor específico a presión constante del hidrógeno (J/(kg·K)).

m_{total} es la masa total de la mezcla en el cilindro (kg).

Y,

$$c_{v,mezcla} = \frac{m_{air} c_{v,air} + m_{H_2} c_{v,H_2}}{m_{total}} \quad [Ec. 21]$$

Donde:

$c_{v,mezcla}$: calor específico a volumen constante de la mezcla (J/(kg·K)).

m_{air} : masa de aire en la mezcla (kg).

$c_{v,air}$: calor específico a volumen constante del aire (J/(kg·K)).

m_{H_2} : masa de hidrógeno en la mezcla (kg).

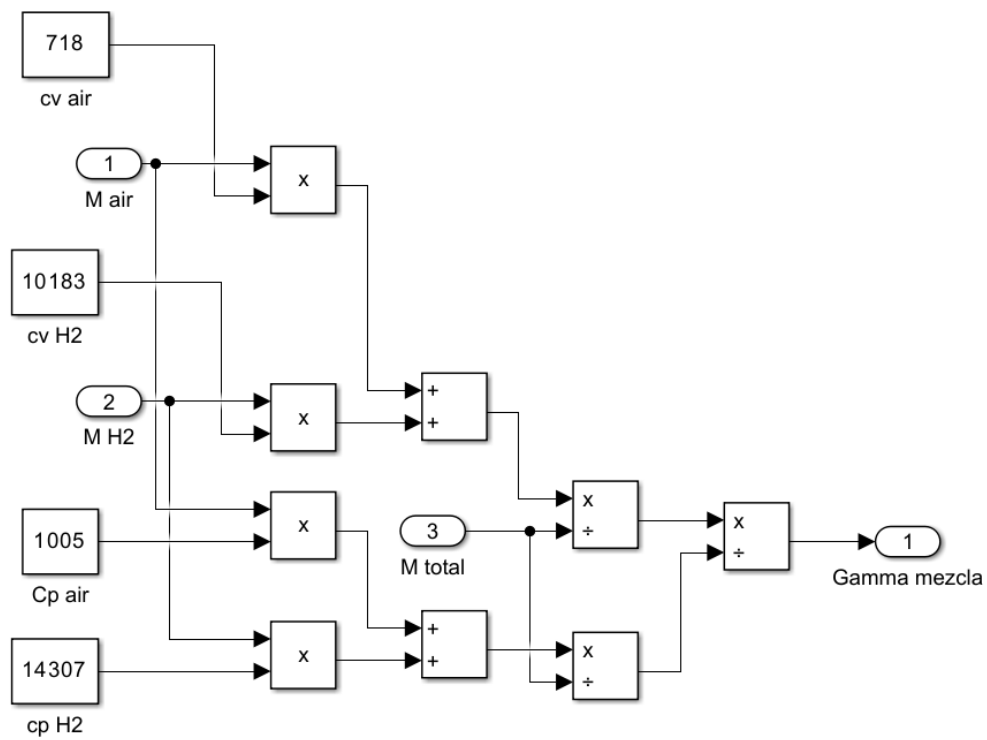
c_{v,H_2} : calor específico a volumen constante del hidrógeno (J/(kg·K)).

m_{total} : masa total de la mezcla (kg).

Con estos pasos el código establece las condiciones del Estado 1, listos para iniciar la compresión isentrópica.

Figura 5.

Propiedades de la Mezcla



Fuente: Elaboración propia

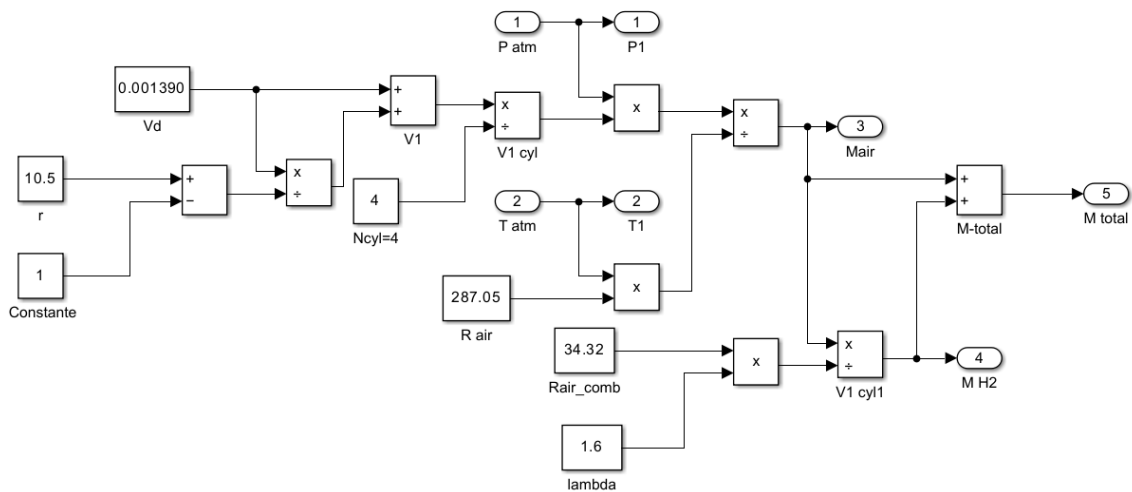
Tabla 6

Tabla de Resumen de las Variables de Propiedades de la Mezcla

Variable	Nombre en código	Descripción	Unidad
Cv de la mezcla	Cv_mezcla	Cv calculado para la mezcla aire-H ₂	J/(kg·K)
Cp de la mezcla	Cp_mezcla	Cp calculado para la mezcla aire-H ₂	J/(kg·K)
γ de la mezcla	gamma_mezcla	Cp_mezcla / Cv_mezcla	—

Fuente. Elaboración propia

Figura 6.
Cálculos de Admisión y Mezcla



Fuente: Elaboración propia

Tabla 7.
Tabla de Resumen del Estado de Admisión (1-2)

Variable	Nombre en código	Descripción	Unidad
Presión de admisión	p1	Presión al Punto Muerto Inferior tras admisión	Pa
Temperatura de admisión	T1	Temperatura al Punto Muerto Inferior tras admisión	K
Masa de aire admitida	m_air	Masa de aire que entra en el cilindro	kg
Masa de hidrógeno inyectada	m_H2	Masa de H ₂ inyectada en el cilindro	kg
Masa total de mezcla	m_tot	Suma de m_air + m_H2	kg

Fuente. Elaboración propia

2.3.3. Compresión Isentrópica

Bajo el supuesto de proceso reversible:

$$T_2 = T_1 r^{(\gamma-1)} \quad [\text{Ec. 22}]$$

Donde:

T_2 : temperatura del gas después de la compresión adiabática (K).

T_1 : temperatura del gas antes de la compresión (K).

r : relación de compresión

$\gamma - 1$: coeficiente adiabático o índice de calor específico

$$p_2 = p_1 r^{\gamma_{\text{mezcla}}} \quad [\text{Ec. 23}]$$

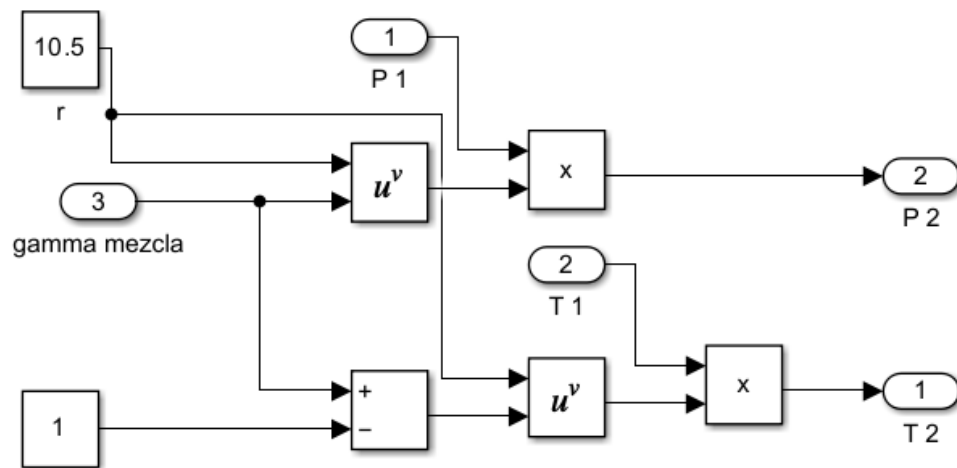
Donde:

p_2 : presión tras el proceso isentrópico (Pa)

r : es la relación de compresión y

y $\gamma_{\text{mezcla}} = \frac{c_{p,\text{mezcla}}}{c_{v,\text{mezcla}}}$ es la relación de capacidades específicas de la mezcla aire-
H₂.

Figura 7.
Proceso de Compresión



Fuente: Elaboración propia

2.3.4. Combustión a Volumen Constante

En el ciclo Otto ideal, la combustión se modela como un proceso casi instantáneo que ocurre a volumen constante (entre Estado 2 y Estado 3). Bajo esta hipótesis:

Se toma el valor calorífico inferior del H_2 , $PCI_{H_2} = 120 \frac{MJ}{kg}$ y se multiplica por la masa de combustible m_{H_2} . Además, se incluye el factor de combustión incompleta $n_{comb}(\lambda)$, que ajusta la fracción de energía realmente liberada cuando la mezcla es rica o pobre:

$$Q_{in} = m_{H_2} \times PCI_{H_2} \times n_{comb}(\lambda) \quad [Ec. 24]$$

Donde:

Q_{in} es el calor térmico ideal añadido durante la combustión (J).

m_{H_2} es la masa de hidrógeno inyectada en el cilindro (kg).

PCI_{H_2} es el poder calorífico inferior del hidrógeno (J/kg).

$n_{comb}(\lambda)$ es el rendimiento de combustión, es decir, la fracción de calor liberado por el H_2 que efectivamente participa en la reacción, expresada como función del coeficiente de aire λ (adimensional).

También se considera que una parte del calor generado se disipa a través de las paredes del cilindro. Para reproducir mejor el comportamiento real, se aplica una pérdida de calor simple constante:

$$Q_{ad} = Q_{in} (1 - Frac_Perdidas), \quad [Ec. 25]$$

Donde:

Q_{ad} : calor neto efectivamente añadido al gas durante la combustión (J).

Q_{in} : calor total liberado por la reacción de combustión antes de pérdidas (J).

$Frac_Perdidas$: fracción constante que representa el calor que se disipa por conducción y convección hacia las paredes del cilindro.

Para el caso de esta simulación, se establece un $\text{Frac_Perdidas} = 0,20$ (20%), Según Lee et al. (2023), en su análisis exergético de un motor de H_2 fogueado por chispa, la pérdida de exergía debida a la transferencia de calor a las paredes del cilindro aumenta entre un 27% y un 31% del total liberado durante la combustión, lo que indica que una parte muy significativa de la energía se disipa como calor (Lee, Kim, Lee, Kim, & Oh, 2023). Asimismo, Rrustemi, Ganippa y Axon (2025) muestran que reducir estas pérdidas de calor es clave para disminuir la irreversibilidad del proceso y aumentar la fracción de exergía convertida en trabajo mecánico, validando así la adopción de un factor fijo de pérdida de calor del 20% en simulaciones simplificadas (Rrustemi, Ganippa, & Axon, 2025).

Con el calor neto Q_{ad} introducido y manteniendo el volumen, la temperatura de la mezcla salta de T_2 a T_3 . Usando la definición de capacidad calorífica a volumen constante de los productos de combustión $c_{v,prod}$, se obtiene:

$$T_3 = T_2 + \frac{Q_{ad}}{m_{total} c_{p,prod}} \quad [\text{Ec. 26}]$$

Donde:

T_3 : temperatura de los gases tras la combustión a volumen constante (K).

T_2 : temperatura de los gases justo antes de la combustión (K).

Q_{ad} : calor neto efectivamente añadido al fluido de trabajo, tras descontar las pérdidas a pared (J).

m_{total} : masa total de la mezcla (aire-combustible) dentro del cilindro (kg).

$c_{p,prod}$: capacidad calorífica a volumen constante de los productos de combustión, promedio en el rango de temperaturas de interés ($\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$).

Y c_v producido se aproxima al c_v del aire

Dado que el volumen permanece fijo, la presión aumenta proporcionalmente a la temperatura:

$$p_3 = p_2 * \frac{T_3}{T_2} \quad [\text{Ec. 27}]$$

Donde:

p_3 : presión tras la combustión a volumen constante (Pa).

p_2 : presión justo antes de la combustión (Pa).

T_3 : temperatura de los gases después de añadir el calor neto (K).

T_2 : temperatura de los gases justo antes de la combustión (K).

Tras la combustión, la entalpía específica de los gases en Estado 3 se calcula con la capacidad calorífica a presión constante de los productos $c_{p, prod}$

$$h_3 = c_{v,prod}T_3 \quad [\text{Ec. 28}]$$

Donde:

h_3 : entalpía específica de los gases tras la combustión (J kg^{-1}).

$c_{v,prod}$: capacidad calorífica a presión constante promedio de los productos de combustión ($\text{J kg}^{-1} \text{K}^{-1}$).

T_3 : temperatura tras la combustión (K).

Y la entalpía total liberada por el motor en el pico post-combustión es

$$H_3 = N_{cyl}m_{total}h_3 \quad [\text{Ec. 29}]$$

Donde:

H_3 entalpía total liberada en el momento de máxima presión (J).

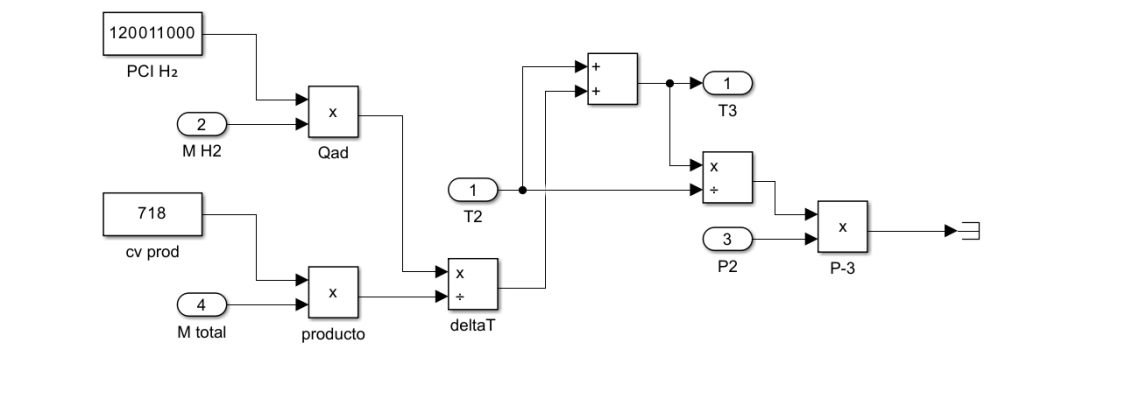
N_{cyl} : número de cilindros del motor (adimensional).

m_{total} : masa de mezcla (aire + combustible) por cilindro (kg).

h_3 : entalpía específica de los productos en Estado 3 (J kg^{-1}).

Con este conjunto de ecuaciones, el código traduce la energía química del H_2 en un salto de temperatura y presión al Estado 3, incorporando tanto el modelo ideal de combustión a volumen constante como correcciones sencillas por pérdidas y combustión incompleta.

Figura 8
Proceso de Combustión.



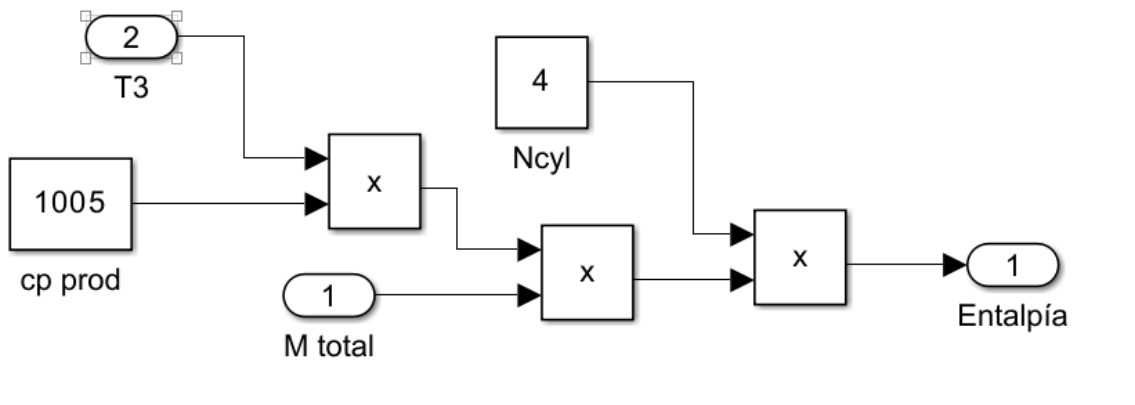
Fuente: Elaboración propia.

Tabla 8.
Tabla de Resumen de Variables de Combustión (Estado 3)

Variable	Nombre en código	Descripción	Unidad
Temperatura post-compresión	T2	Temperatura tras compresión isentrópica	K
Presión post-compresión	p2	Presión tras compresión isentrópica	Pa

Fuente. Elaboración propia

Figura 9.
Cálculos de Entalpía



Fuente: Elaboración propia.

2.3.5. Expansión Isentrópica y Cierre de Ciclo

Después de la combustión a volumen constante, el pistón se mueve de nuevo desde el Punto Muerto Inferior hacia el Punto Muerto Superior, realizando el proceso de expansión isentrópica y cerrando el ciclo Otto

Suponiendo que no hay transferencia de calor ni irreversibilidades durante la expansión, se aplican las mismas relaciones de tipo isentrópico utilizadas en la compresión, pero invertidas, la temperatura tras la expansión se mide con

$$T_4 = T_3 r^{1-\gamma_{\text{prod}}} \quad [\text{Ec. 30}]$$

Donde:

T_3 : es la temperatura después de la combustión (Estado 3).

r : es la relación de compresión (la misma que la de expansión) es la razón de los volúmenes V_1 y V_2 .

γ_{prod} : es la relación de calores específicos de los productos de combustión.

Entonces, la presión tras la expansión se mide con:

$$p_4 = p_3 r^{-\gamma_{\text{prod}}} \quad [\text{Ec. 31}]$$

Donde:

p_4 : presión del gas tras la expansión isentrópica (Pa).

p_3 : presión del gas en el Estado 3, justo después de la combustión (Pa).

r : relación de compresión (volumen inicial dividido por volumen final).

γ_{prod} : relación de capacidades caloríficas de los productos de combustión.

Los valores de H_3 y p_4 calculados conforman la base de los gráficos P–V (Eastop & McConkey, 1993, p. 137) y de las curvas de entalpía frente a la altitud. En el diagrama P–V, el área encerrada por el ciclo es proporcional al trabajo neto del motor, ya que éste se obtiene integrando la presión respecto al volumen en un ciclo completo (Eastop & McConkey, 1993). Del mismo modo, en las curvas de entalpía vs. altitud se aprecia que la relación aire–combustible λ modula directamente H_3 : al aumentar la proporción equivalente de combustible, se incrementa la tasa de liberación de calor y, por tanto, la

entalpía pico H3 (Gao et al., 2022, p. 11). Este efecto se ve además agravado a mayores altitudes, donde la menor densidad y presión de admisión reducen la masa de mezcla disponible y, en consecuencia, el calor neto añadido, influyendo tanto en la forma del lazo P–V como en el descenso de los perfiles de entalpía con la altitud.

Al finalizar la expansión, el volumen vuelve al valor inicial de admisión V1 y la presión regresa al valor previo a la admisión (en un modelo ideal). En el código se registra explícitamente el cierre del ciclo (P–V) añadiendo el punto (V1, p1) al vector de trazado, garantizando que el diagrama (P–V) constituye un lazo cerrado.

Tabla 9.
Tabla de Resumen Variables de Expansión (Estado 4)

Variable	Nombre en código	Descripción	Unidad
Temperatura post-expansión	T4	Temperatura al final de la expansión	K
Presión post-expansión	p4	Presión al final de la expansión	Pa

Fuente. Elaboración propia

3. Integración y Extracción de Datos

Para articular ambos submodelos, (el de condiciones atmosféricas y el del ciclo Otto), se diseña un esquema en Simulink en el cual cada uno se encapsula como un subsistema independiente. En el diagrama, cada subsistema emplea un bloque MATLAB que transfiere los vectores calculados: el bloque del modelo atmosférico envía las cotas de altitud junto con la presión y la temperatura correspondientes, mientras que el subsistema del ciclo Otto suministra las series de entalpía pico, las presiones y temperaturas en los cuatro estados termodinámicos y la eficiencia térmica simulada para cada combinación de altitud y equivalencia aire-combustible.

Una vez disponibles en MATLAB estas variables, el código “**Entalpia_Altitud.m**” las recupera del espacio de trabajo y utiliza las funciones del programa para generar archivos con formato .csv. Cada archivo engloba, en columnas bien identificadas, la altitud, el factor λ , la entalpía, la eficiencia térmica y cualquier otra

magnitud de interés, dejando los datos listos para su análisis en Excel. De esta manera, todos los resultados quedan registrados de forma estructurada, lo que facilita la elaboración de gráficos, la comparación con datos de referencia y la documentación completa de la metodología.

Tabla 10
Tabla de Resumen de Variables de Resultados

Variable	Nombre en código	Descripción	Unidad
Entalpía pico por altitud y λ	entalpías	Matriz con entalpías pico (kJ) para cada altitud y valor de λ	kJ
Ciclos (P–V) simulados	datos_PV	Celda con estructuras V–p para representa cada ciclo P–V	(m ³ , Pa)

Fuente. Elaboración propia

4. Supuestos y Simplificaciones

Se considera un ciclo Otto ideal, en el que los procesos de compresión y expansión son completamente reversibles (isentrópicos) y no hay pérdidas por fricción interna ni bombeo (Ecs. 22, 23, 30 y 31). Tanto el aire como el H₂ y los productos de combustión se tratan como gases ideales con calores específicos constantes en un rango operativo medio (300–800 K), eliminando la dependencia de c_p y c_v con la temperatura (Ecs. 4, 5, 28 y 29). La combustión a volumen constante se asume instantánea, liberándose toda la energía en el Estado 3 sin modelar la progresión de la llama ni gases residuales (Ec. 24), y se aplica el factor de combustión incompleta $n_{\text{comb}}(\lambda)$ según la Ecuación 5.63 del texto Zabala (2013).

La admisión de aire incorpora una eficiencia volumétrica lineal que ajusta la masa de aire aspirada en función de la altitud. El perfil ISA (ISO 2533) se emplea como condición de contorno para presión y temperatura (Ecs. 7 y 8), y se corrige la humedad relativa mediante el modelo August Roche–Magnus (Ecs. 9 y 10), asumiendo aire seco (humedad = 0 %). Con el cual, aún con 100 % de humedad, la densidad del aire varía menos del 1% (The Properties of Air – Part 2, 2020), por lo que este efecto queda dentro del margen de incertidumbre de otros supuestos.

Se asume además que los calores específicos c_p y c_v y, por tanto, el coeficiente adiabático γ permanecen constantes entre 300K y 800K. Según correlaciones NASA, se sugiere que usar valores medios para estas propiedades introduce desviaciones inferiores al 1% en densidad y entalpía, y errores menores al 3% en presión pico y trabajo neto frente a modelos con c_p variable en función de la temperatura (Marzouk & Ghulman, 2015; Gao et al., 2022).

Asimismo, para presiones de hasta 5MPa y temperaturas inferiores a 2000K, la ecuación del gas ideal introduce desviaciones inferiores al 1% en las propiedades termodinámicas calculadas (NIST, 2000).

Para reproducir las pérdidas reales de calor hacia la camisa del cilindro, se aplica un factor fijo del 20%. Estudios experimentales en motores con doble combustible indican que las pérdidas por pared oscilan entre el 15 % y 25 % del calor liberado, de modo que 20 % es un valor central que mantiene el error en torque y presión dentro del 5% (Karthic et al., 2020; Marzouk & Ghulman, 2015). Se desestiman además las pérdidas mecánicas por fricción interna y bombeo, cuya contribución conjunta al trabajo perdido ronda el 5% (Knauder et al., 2020), quedando por debajo de otras fuentes de incertidumbre del modelo.

5. Procedimiento Metodológico de Ejecución del Modelo

El desarrollo de la simulación y su validación bibliográfica se realizó siguiendo un flujo de trabajo sistemático, documentado y reproducible en cinco etapas:

5.1. Calibración del Submodelo Atmosférico

Se ejecutó en Simulink el archivo atm_condiciones_1.slx y se definieron tres escenarios de altitud (0 m s.n.m, 1495 m s.n.m y 2850 m s.n.m). En cada caso se introdujo la altitud en el bloque del Modelo Atmosférico y se compararon las salidas de presión $p(h)$ y temperatura $T(h)$ con los valores tabulados por la ISA (ISO 2533). El ajuste se consideró válido cuando la desviación quedó por debajo del 1%.

5.2. Ajuste del Ciclo Otto en MATLAB

Se importó el script **Entalpia_Altitud.m** y se verificó la coherencia de los cálculos fundamentales:

- a) Cálculo del volumen por cilindro según la ecuación EC. [1.14]
- b) Definición de la relación de compresión r según especificaciones de diseño del modelo según Zabala (2013).
- c) Selección de un valor medio de calor específico c_p en el rango 300–800 K para aproximar la variación térmica sin emplear polinomios complejos, sin perder precisión en el rango operativo.

5.3. Ejecución de las Simulaciones

Una vez calibrado el submodelo atmosférico y verificado el script en MATLAB, se procedió a ejecutar las simulaciones variando sistemáticamente tanto la altitud (de 0 a 4000 m s.n.m en pasos de 100 m) como la mezcla empleando valores de λ entre 0,85 y 1,6. Para cada combinación de altitud y λ , el código extrae automáticamente las condiciones de admisión $T_1=T(h)$ y $p_1=p(h)$ del modelo ISA, calcula la masa de aire ajustada por la eficiencia volumétrica y la masa de H_2 según la relación estequiométrica y el valor de λ , y obtiene las propiedades termodinámicas de la mezcla.

Luego, se simula la compresión isentrópica, la combustión a volumen constante aplicando el factor (λ) y descontando un 20% de pérdidas de calor, y la expansión isentrópica, para de este modo almacenar en matrices de MATLAB los resultados de entalpía pico (H_3), calor neto añadido (Q_{ad}), trabajo neto del ciclo (W_{neto}) y eficiencia térmica simulada (η_{sim}). Esta configuración permite evaluar de manera conjunta cómo afectan la altitud y la riqueza de la mezcla.

Tabla 11.
Tabla de Resumen de la Configuración de la Simulación

Variable	Nombre en código	Descripción	Unidad
Altitudes simuladas	altitudes	Vector de altitudes para simular	m

Valores de λ	lambdas	Vector de coeficientes aire- combustible a evaluar	—
Fracción de pérdidas de calor	Frac_Perdidas	Proporción de calor perdido por transferencia a la camisa	—
γ de productos en expansión	gamma_prod_const	Índice adiabático constante de los productos, ajustado por irreversibilidades	—
Número de puntos de discretización	Npts	Cantidad de pasos en compresión y expansión para el diagrama (P-V)	—

Fuente. Elaboración propia

5.4. Procesamiento y Organización de Datos

Los vectores extraídos se exportaron a archivos .csv mediante funciones de MATLAB y se realizó su organización en Microsoft Excel. Se creó una hoja de datos para “Entalpía vs. Altitud”, preparando las tablas base para el comparativo.

5.5. Método de Validación Bibliográfica

A partir de Morales et al. (2024) y de los otros documentos citados, se digitalizaron los valores encontrados. Tras normalizar unidades y condiciones de referencia, se calculó el error porcentual medio.

$$E_{\%} = \frac{H_{\text{sim}} - H_{\text{ref}}}{H_{\text{ref}}} \times 100 \quad [\text{Ec. 32}]$$

Donde

$E_{\%}$: es el error medio expresado en %,

H_{sim} : es el valor simulado y

H_{ref} : es el valor de referencia (J).

Finalmente, se prepararon gráficos en Excel para su comparación con resultados obtenidos de la bibliografía de referencia.

6. Limitaciones

6.1. Ámbito de Validez.

Al fundamentarse en un ciclo Otto ideal y en calores específicos medios, los resultados ofrecen principalmente tendencias de comportamiento frente a altitud y riqueza de mezcla, más que valores absolutos de rendimiento. Por ello, la comparación debe centrarse en variaciones relativas y no en magnitudes absolutas.

6.2. Revisión de Datos Experimentales Bibliográficos

La comprobación del modelo se realizó exclusivamente mediante comparación con referencias publicadas. Cualquier desviación media superior al 5% se considerará señal de que alguna simplificación, por ejemplo, gases ideales o pérdidas de calor fijas, podría estar introduciendo sesgos, y requerirá un análisis crítico de las hipótesis.

6.3. Control de Calidad:

Se verificó la coherencia de unidades y referencias ISA en cada ejecución del código y se realizó una ejecución del código piloto para cada altitud antes de la versión final para descartar errores de parametrización.

Resultados y Discusión

1. Validación del Modelo de la Altitud

En la Tabla 3 se presentan los resultados teóricos de los cálculos de presión según el modelo ISA. Ahora, los resultados obtenidos por el modelo ajustado en Matlab son los siguientes.

Tabla 12.*Comparación Presiones Teóricas ISA vs Obtenidas en el Modelo Matlab*

Altitud (m s.n.m)	Presión Modelo Propuesto (Pa)	Presión Validada (Pa)	Desviación (%)
0	101325.00	101325.00	0.0000%
1914	80348.070	80348.00	0.0001%
2850	71456.680	71456.00	0.0010%

Fuente. Elaboración Propia

Los resultados indican una desviación máxima de 0,001% entre las presiones obtenidas con el bloque atmosférico en MATLAB y los valores teóricos del modelo ISA. Este error mínimo demuestra que la implementación de las ecuaciones de temperatura y presión es correcta y numéricamente estable en todo el rango de simulación.

Al fijar la humedad en cero para estas pruebas, se aisló el efecto de la altitud sobre las condiciones de admisión sin introducir variación adicional. De este modo, se asegura que cualquier diferencia en los resultados del ciclo Otto responda únicamente a los fenómenos internos del motor y no a imprecisiones en el submodelo atmosférico.

2. Eficiencia Volumétrica vs Altitud

Con la eficiencia volumétrica medida a partir del modelo se pueden obtener los siguientes resultados.

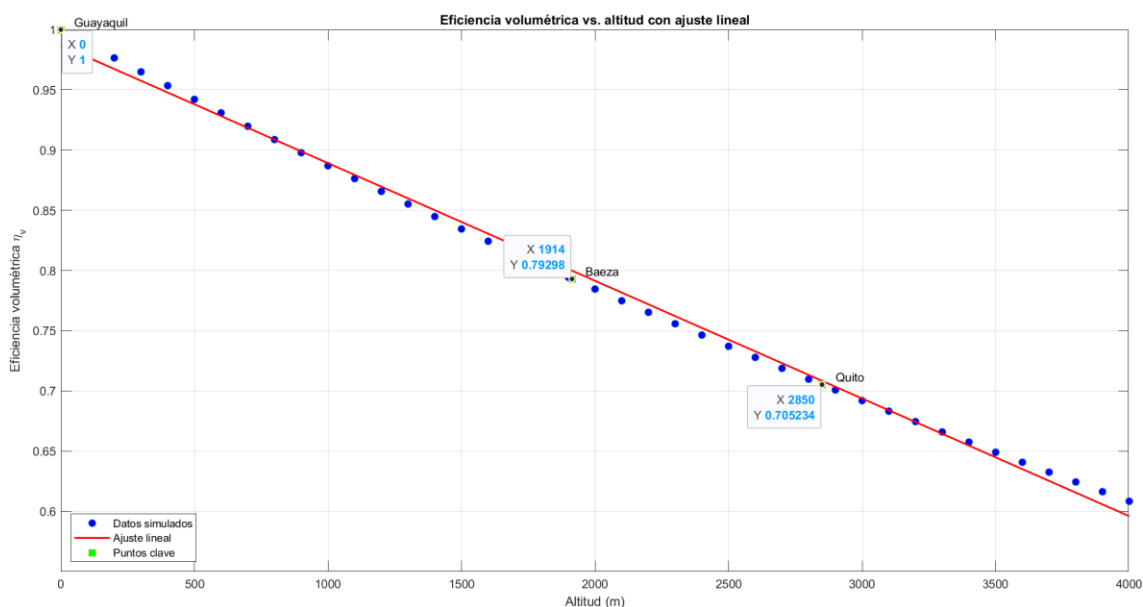
Figura 10.*Eficiencia Volumétrica vs Altitud***Fuente.** Elaboración Propia

Tabla 13.
Eficiencia Volumétrica Perdida en Función de la Altitud

Altitud(m)	Eficiencia Volumétrica	Eficiencia perdida
0	1	0.0%
1914	0.792	20.7%
2850	0.705	29.5%

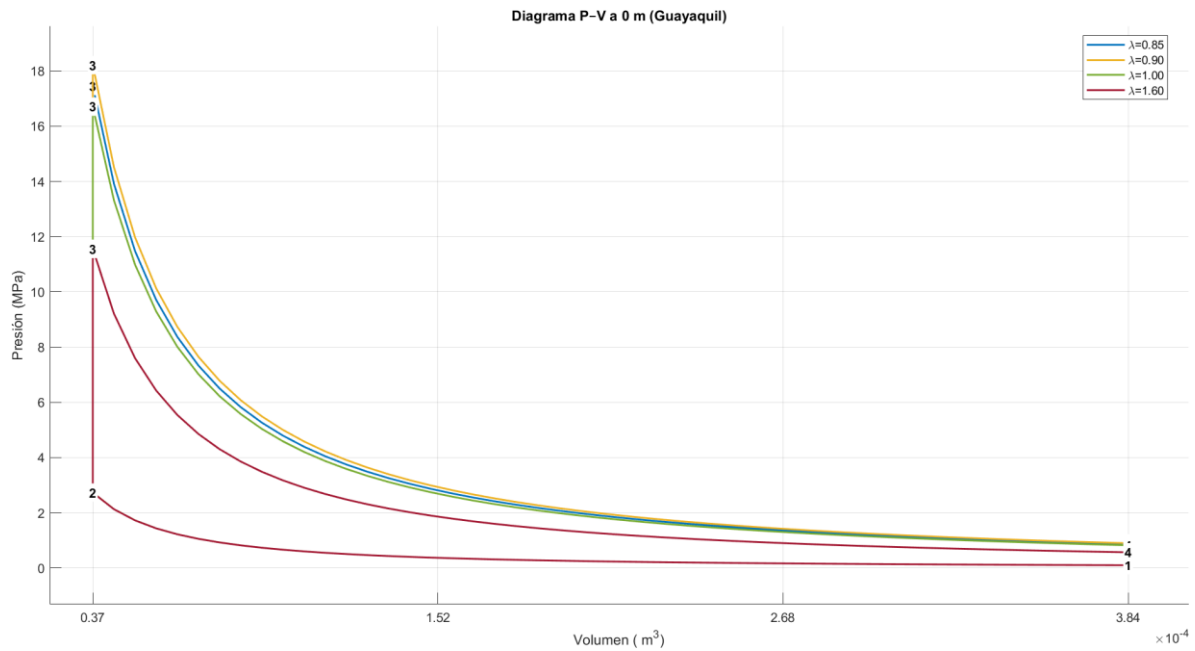
Fuente. Elaboración Propia

La eficiencia volumétrica disminuye de manera significativa conforme aumenta la altitud: pasa de 1,00 al nivel del mar a 0,79 en Baeza (1914 m s.n.m), lo que equivale a una pérdida del 20,7%, y a 0,71 en Quito (2850 m s.n.m), con una reducción del 29,5%. En motores de gasolina con encendido por chispa, Martínez et al. (2022) observaron una pérdida de potencia cercana al 3% por cada 300m de altitud, lo cual equivale a descensos de eficiencia volumétrica del orden de 1% por 100m, muy similar a los 1,18%/100m que se aprecian en la curva obtenida en esta simulación.

Para compensar esta merma de carga de aire en aplicaciones reales de motores de H₂, Lee, Park y Kim (2019) evaluaron la incorporación de un turbocompresor que eleva la presión de admisión desde la atmosférica ($\sim 1 \text{ bar} = 0,10 \text{ MPa}$) hasta 2,75 bar (0,275 MPa), logrando restaurar la eficiencia volumétrica casi al nivel natural y aumentar la potencia en hasta un 41%. Estos resultados subrayan que, en entornos de gran altitud, la integración de sistemas de sobrealimentación o compresión forzada es fundamental para mantener tanto la masa de aire admitida como el rendimiento y la eficiencia térmica de los motores de H₂.

3. Diagrama P-V para Diferentes Altitudes y λ

Figura 11.
Diagrama (P-V) en Guayaquil para Distintos Valores de Lambda



Fuente. Elaboración Propia

Tabla 14.
Resumen de Resultados Obtenidos en Diagrama (P-V) en Guayaquil (0 m s.n.m)

Estado	Lambda	V(m³)	P(MPa)
1	0.850	3.841×10^{-4}	0.101
	0.900	3.841×10^{-4}	0.101
	1.000	3.841×10^{-4}	0.101
	1.600	3.841×10^{-4}	0.101
2	0.850	3.668×10^{-5}	2.734
	0.900	3.668×10^{-5}	2.734
	1.000	3.668×10^{-5}	2.733
	1.600	3.668×10^{-5}	2.730
3	0.850	3.668×10^{-5}	17.461
	0.900	3.668×10^{-5}	18.217
	1.000	3.668×10^{-5}	16.711
	1.600	3.668×10^{-5}	11.560
4	0.850	3.841×10^{-4}	0.861
	0.900	3.841×10^{-4}	0.898
	1.000	3.841×10^{-4}	0.824
	1.600	3.841×10^{-4}	0.570

Fuente. Elaboración Propia

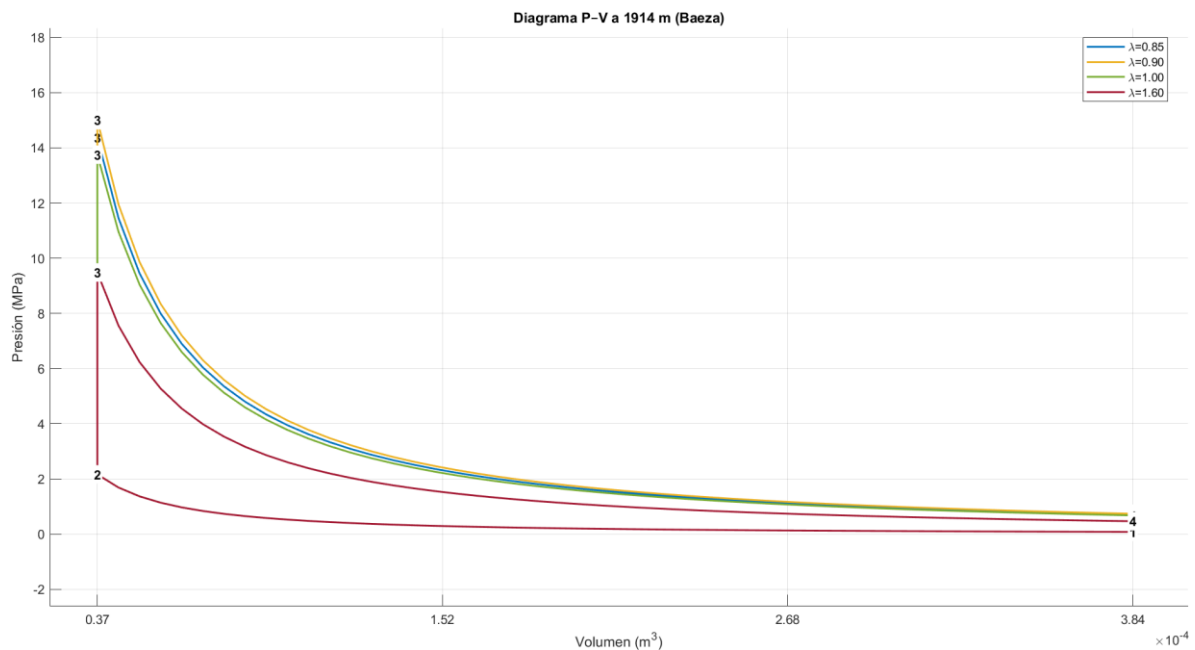
El volumen inicial y final del ciclo (estados 1 y 4) coincide en $3,84 \times 10^{-4} \text{ m}^3$, mientras que durante la compresión adiabática y la combustión isocórica (estados 2 y 3),

ese volumen se reduce a $3,66 \times 10^{-5} \text{ m}^3$, reflejando la relación de compresión $r = 10,5$. Esta coincidencia exacta entre el volumen inicial y el final, notado como la clausura volumétrica del lazo (P–V), demuestra que la simulación no acumula errores numéricos ni pérdidas de masa y reproduce con fidelidad el ciclo Otto ideal descrito por Heywood (2018).

En el estado 2, la presión de 2,73 MPa se mantiene constante para todas las mezclas, ya que depende principalmente de la compresión adiabática de la mezcla aire–H₂, cuyo valor de γ_{mezcla} varía muy poco entre λ (Heywood, 2018). A diferencia, en el estado 3, tras la combustión a volumen constante, se observan variaciones sustanciales en la presión pico: alcanza su valor máximo de 18,22 MPa en $\lambda = 0,90$, seguido de 17,46 MPa en $\lambda = 0,85$, y disminuye tanto para la mezcla estequiométrica (16,71 MPa en $\lambda = 1,00$) como para la mezcla con exceso de aire (11,56 MPa en $\lambda = 1,60$). Este comportamiento reproduce fielmente la función de conversión de combustible $\phi(\lambda)$ de Zabala (2013), que maximiza la liberación de calor en mezclas ligeramente ricas ($0,8 < \lambda < 0,9$) y decrece en condiciones de mezcla con exceso de aire (Zabala, 2013). Estudios experimentales en motores de inyección directa confirman que el índice de liberación de calor neto presenta un pico alrededor de $\lambda \approx 0,9$ (Wei, Li, & Zhang, 2023).

Finalmente, en el estado 4 la presión cae a valores entre 0,57 MPa y 0,90 MPa, permaneciendo siempre por encima de la presión inicial (0,10 MPa), lo que evidencia un trabajo neto positivo y consistente con las irreversibilidades del ciclo Otto real (Heywood, 2018). La mayor presión residual en $\lambda = 0,90$ indica un mayor aprovechamiento energético durante la fase de expansión, reforzando su consideración como condición óptima de operación para motores de H₂.

Figura 12.
Diagrama (P-V) en Baeza para Distintos Valores de Lambda



Fuente. Elaboración Propia

Tabla 15.
Resumen de Resultados Obtenidos en Diagrama (P-V) en Baeza (1914 m s.n.m)

Estado	Lambda	V(m ³)	P(MPa)
1	0.85	3.841 x10 ⁻⁴	0.080
	0.9	3.841 x10 ⁻⁴	0.080
	1	3.841 x10 ⁻⁴	0.080
	1.6	3.841 x10 ⁻⁴	0.080
2	0.85	3.658 x10 ⁻⁵	2.168
	0.9	3.658 x10 ⁻⁵	2.168
	1	3.658 x10 ⁻⁵	2.167
	1.6	3.658 x10 ⁻⁵	2.165
3	0.85	3.658 x10 ⁻⁵	14.373
	0.9	3.658 x10 ⁻⁵	14.999
	1	3.658 x10 ⁻⁵	13.752
	1.6	3.658 x10 ⁻⁵	9.483
4	0.85	3.841 x10 ⁻⁴	0.709
	0.9	3.841 x10 ⁻⁴	0.740
	1	3.841 x10 ⁻⁴	0.678
	1.6	3.841 x10 ⁻⁴	0.468

Fuente. Elaboración Propia

En Baeza (1914 m s.n.m.), la presión de admisión (estado 1) se reduce en un 20%, pasando de 0,10 MPa a 0,08 MPa en comparación con Guayaquil, lo cual refleja la menor densidad del aire según la atmósfera ISA (ISO, 1975). A pesar de este descenso, los

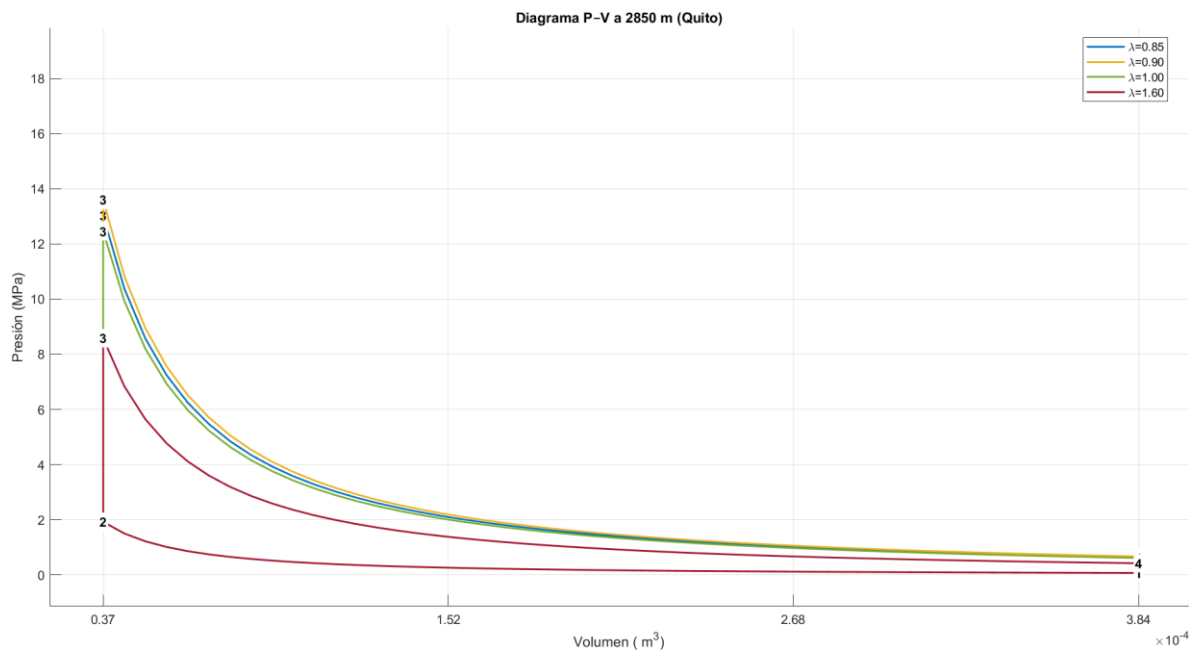
volúmenes en los cuatro estados permanecen invariables ($V_1 = V_4 \approx 3,84 \times 10^{-4} \text{ m}^3$; $V_2 = V_3 \approx 3,66 \times 10^{-5} \text{ m}^3$), lo que confirma la integridad geométrica del ciclo Otto ideal implementado (Heywood, 2018).

Al término de la compresión (estado 2), la presión alcanza 2,17 MPa, lo que equivale a una caída del 20,5% respecto a los 2,73 MPa medidos a nivel del mar, reflejando la misma relación adiabática con un exponente casi constante para todas las mezclas (Heywood, 2018).

Durante la combustión iso-volumétrica (estado 3), el pico de presión en $\lambda = 0,90$ desciende de 18,22 MPa a 15,00 MPa, un 17,7% menos que en Guayaquil, pero mantiene la jerarquía de mezclas: las ligeramente ricas, liberan más calor neto gracias a la interpolación de lambda de Zabala (2013).

Finalmente, en la fase de expansión (estado 4), la presión residual para $\lambda = 0,90$ cae de 0,90 MPa a 0,74 MPa, un 17,8% de descenso que evidencia un trabajo neto positivo y refuerza la condición óptima de operación en $\lambda \approx 0,90$ (Wei, Li & Zhang, 2023).

Figura 13.
Diagrama P-V en Quito para Distintos Valores de Lambda



Fuente. Elaboración Propia

Tabla 16.*Resumen de Resultados Obtenidos en Diagrama (P-V) en Quito (2850 m s.n.m)*

Estado	Lambda	V(m³)	P(MPa)
1	0.85	3.841×10^{-4}	0.071
	0.9	3.841×10^{-4}	0.071
	1	3.841×10^{-4}	0.071
	1.6	3.841×10^{-4}	0.071
2	0.85	3.658×10^{-5}	1.928
	0.9	3.658×10^{-5}	1.928
	1	3.658×10^{-5}	1.928
	1.6	3.658×10^{-5}	1.925
3	0.85	3.658×10^{-5}	13.028
	0.9	3.658×10^{-5}	13.597
	1	3.658×10^{-5}	12.463
	1.6	3.658×10^{-5}	8.581
4	0.85	3.841×10^{-4}	0.642
	0.9	3.841×10^{-4}	0.670
	1	3.841×10^{-4}	0.614
	1.6	3.841×10^{-4}	0.423

Fuente. Elaboración Propia

En Quito (2850 m s.n.m.), la presión de admisión (estado 1) cae a 0,07 MPa, lo que supone una reducción del 30% respecto a Guayaquil y del 12,5% frente a Baeza, coherente con la variación barométrica de la atmósfera ISA (ISO, 1975). No obstante, los volúmenes en los cuatro estados se mantienen constantes ($V_1=V_4 \approx 3,84 \times 10^{-4} \text{ m}^3$; $V_2=V_3 \approx 3,66 \times 10^{-5} \text{ m}^3$), lo que confirma la integridad geométrica del modelo de ciclo Otto ideal.

Tras la compresión adiabática (estado 2), la presión disminuye a 1,93 MPa, un 29,3% menos que los 2,73 MPa de Guayaquil y un 11,0% inferior a los 2,17 MPa de Baeza, reflejando la dependencia proporcional $p_2 \propto p_1 \gamma^{\gamma_{mezcla}}$ con un exponente adiabático prácticamente invariable para todas las mezclas (Heywood, 2018).

En la combustión iso-volumétrica (estado 3), el pico de presión para $\lambda = 0,90$ alcanza 13,60 MPa, lo que representa un 25,4% menos que los 18,22 MPa a nivel del mar y un 9,3% inferior a los 15 MPa en Baeza. Sin embargo, $\lambda = 0,90$ continúa siendo la proporción óptima para maximizar la liberación de calor neto según la función $\phi(\lambda)$ de Zabala (2013).

Finalmente, en la expansión (estado 4), la presión residual en $\lambda = 0,90$ se sitúa en 0,67 MPa, un descenso del 25,6% respecto a Guayaquil y del 9,5% frente a Baeza, pero

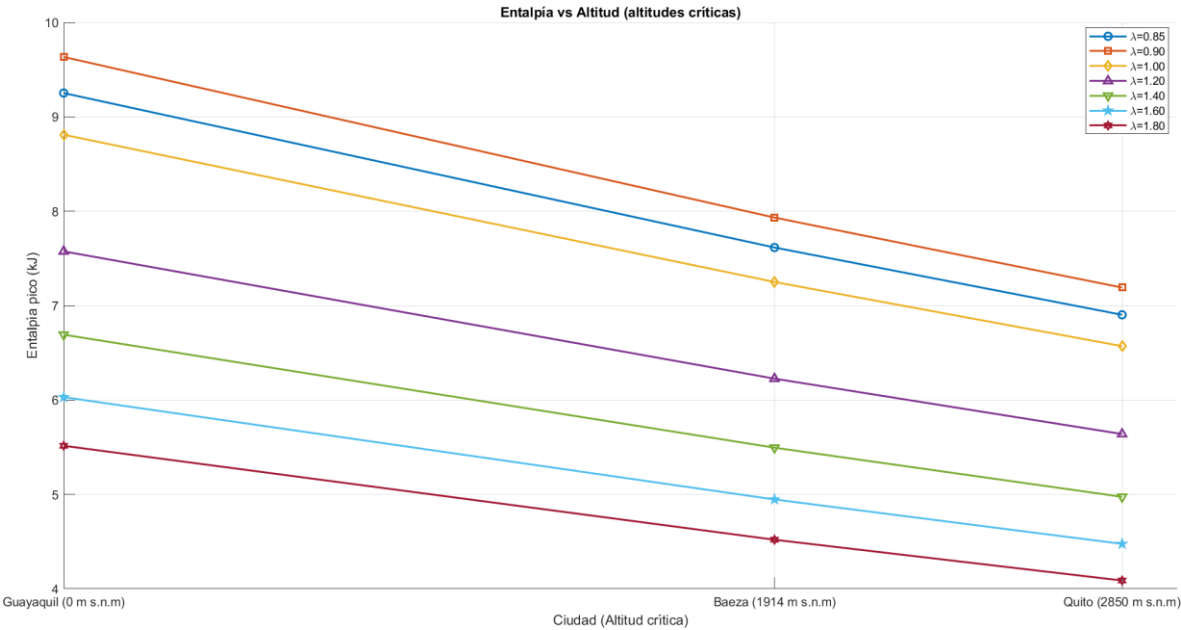
aun así significativamente superior a la presión de admisión, lo que confirma un trabajo neto positivo y valida el uso de relación de calores específicos de 1,28 para representar irreversibilidades

En conjunto, estos resultados demuestran que, si bien la altitud atenúa los valores absolutos de presión en todos los estados, no altera la tendencia relativa entre las mezclas: las proporciones ligeramente pobres ($\lambda \approx 0,90$) siguen ofreciendo el mejor balance entre masa de combustible y eficiencia de combustión, respaldando tanto el submodelo de Folio Zabala (2013) como los hallazgos experimentales recientes en motores de inyección directa de H₂ (Wei, Li, & Zhang, 2023).

4. Entalpía en Función de la Altitud con Diferentes λ

A continuación, se muestra la evolución de la entalpía pico del ciclo de combustión de H₂ con la altitud, para distintos valores de la relación aire-combustible λ .

Figura 14.
Entalpía en Función de la Altitud a Diferentes Lambdas



Fuente. Elaboración Propia

Tabla 17.
Entalpía [kJ] en Función de la Altitud [m s.n.m]

Lambda	0	1914	2850
0.85	9.251	7.615	6.902
0.9	9.634	7.932	7.191
1	8.810	7.250	6.570
1.2	7.575	6.226	5.639
1.4	6.692	5.495	4.974
1.6	6.030	4.946	4.477
1.8	5.515	4.520	4.088

Nota. Fuente. Elaboración Propia

Los resultados de la simulación muestran que la entalpía pico disminuye casi linealmente con la altitud en las condiciones estudiadas. Por ejemplo, para $\lambda = 1,00$ la entalpía desciende de 8,81 kJ a nivel del mar a 6,57 kJ a 2850 m s.n.m., lo que representa un 25,4% de reducción. Esta caída se explica por la menor presión y densidad del aire en admisión, tal como predice el modelo atmosférico ISA (ISO 2533, 1975), que estima una pérdida de masa de aire admisible de $\approx 1\%$ por cada 100 m de ascenso. De manera consistente, Zhang et al. (2023) reportaron una disminución de potencia cercana al 28% al incrementar la altitud de 0 m s.n.m. a 2800 m s.n.m. en un motor ligero de H_2 , validando la precisión del submodelo atmosférico.

La relación aire–combustible ejerce una influencia decisiva sobre la entalpía pico. En la simulación, la entalpía alcanza su valor máximo en $\lambda = 0,90$ (9,63 kJ a 0 m s.n.m.), frente a 9,25 kJ en $\lambda = 0,85$ y 8,81 kJ en $\lambda = 1,00$. Este comportamiento coincide con Zabala (2013), quien describe un incremento lineal de la liberación de calor neto entre $\lambda = 0,80$ y $\lambda = 0,90$, seguido de una disminución cuando λ supera 0,90. Estudios en motores de inyección directa también registran picos de liberación de calor neto alrededor de $\lambda \approx 0,90$, atribuibles al equilibrio óptimo entre la cantidad de combustible inyectado y la velocidad de propagación de la llama (Wei, Li, & Zhang, 2023)

Por último, a pesar de emplear una fracción fija de pérdidas de calor del 20% en camisa, esta elección se sitúa dentro del rango típicamente observado para motores de H_2 . Vollmer, Müller y Schneider (2024) demostraron que las pérdidas térmicas en estos motores oscilan entre el 15% y el 25% del calor ideal sin comprometer la precisión de simulaciones 0-D iniciales, lo que refuerza la validez de mantener $\text{Frac_Pérdidas} = 0,20$ para conservar la sencillez del modelo.

Conclusiones

Se diseñó e implementó un modelo unidimensional (0-D) en MATLAB/Simulink para analizar la variación de la entalpía de combustión de un motor Otto alimentado con H_2 en función de la altitud. Su validación numérica mediante la comparación de las presiones calculadas con el bloque atmosférico ISA frente a valores teóricos y el cierre exacto del ciclo presión-volumen (volumen inicial y final de $3,84 \times 10^{-4} \text{ m}^3$), confirma la coherencia interna del modelo y la ausencia de errores graves o pérdidas de masa.

En los diagramas P-V se encontró que, durante la combustión iso-volumétrica (estado 3), el pico de presión para $\lambda = 0,90$ alcanzó 18,22 MPa, un 9,0 % más que en la mezcla estequiométrica ($\lambda = 1,00$) y un 57,6 % por encima de la mezcla pobre ($\lambda = 1,60$). Este incremento en la presión pico se muestra directamente en una mayor área bajo la curva P-V y por ende en un aumento del trabajo indicado y de la potencia mecánica disponible, lo cual se corrobora con la bibliografía, la cual sugiere que mezclas ligeramente ricas maximizan la liberación de calor neto para MCI con H_2 .

El análisis de entalpía mostró que, para una proporción equivalente $\lambda = 1,00$, el valor pico desciende de 8,81 kJ a nivel del mar a 6,57 kJ a 2850 m s.n.m., lo que representa una reducción del 25,4 %. Además, se identificó $\lambda \approx 0,90$ como la condición que optimiza la liberación de calor neto, alcanzando 9,63 kJ a 0 m s.n.m., lo que concuerda con estudios anteriores en motores de inyección directa. Estos resultados ofrecen un marco cuantitativo para ajustar la mezcla y diseñar estrategias de sobrealimentación en regiones con altitudes variables y con disponibilidad limitada de instalaciones de prueba, como sucede en Ecuador.

Tras constatar que la eficiencia volumétrica decrece de forma casi lineal a razón de 1.18% por cada cien metros. Se confirma la viabilidad de esta tecnología en ciudades con altitudes como las de Quito. No obstante, al igual que en los motores convencionales, se debe compensar las pérdidas de presión por altitud mediante un sistema que, apoyado en lecturas de presión barométrica y temperatura ambiente, ajuste en tiempo real el ancho de pulso del inyector de hidrógeno para mantener la relación de combustión óptima.

Recomendaciones

Como continuación de este trabajo, se propone extender la metodología a simulaciones multidimensionales (1-D y 2-D) que incluyan fenómenos de inyección, turbulencia y transferencia de calor detallada; añadir submodelos de recirculación de gases de escape y cinética química; evaluar variables de control (avance de chispa, geometría de colectores y distintos sistemas de sobrealimentación); validar experimentalmente el modelo en banco de pruebas; e integrar el simulador en bucles de control en tiempo real para optimizar dinámicamente la proporción aire-combustible y el avance de chispa según la altitud y la carga del motor.

Referencias

- Arias Andramunio, L. P., Otero Potosí, S. A., & Fraga Portilla, J. A. (2023). Comportamiento del rendimiento y el nivel de contaminación entre la gasolina súper y Ecopaís. *Revista Polo del Conocimiento*, 6(1), 45–58.
- Assad, O., & Rosen, M. A. (2022). Energy, exergy, entropy generation minimization, and exergoenvironmental analyses of energy systems: A mini-review. *Frontiers in Sustainability*, 3, 902071. <https://doi.org/10.3389/frsus.2022.902071>
- Ashok, B., Kumar, A. N., Jacob, A., & Vignesh, R. (2022). Emission formation in internal combustion engines. In *NO_x emission control technologies in stationary and automotive internal combustion engines: Approaches toward NO_x-free automobiles* (pp. 1–38). Elsevier.
- Beccari, P., Panizzi, S., Montanari, G., Serafini, E., & Rossi, F. (2023). Analysis of the combustion process in a hydrogen-fueled CFR engine. *Energies*, 16(5), 2351. <https://doi.org/10.3390/en16052351>
- Bush, T. (2025). Driving the future: Hyundai and Toyota put hydrogen in the fast lane. *Decarbonfuse*. <https://decarbonfuse.com/posts/driving-the-future-hyundai-and-toyota-put-hydrogen-in-the-fast-lane>
- Center for Sustainable Systems, University of Michigan. (2022). *Hydrogen Factsheet* (CSS Pub. No. CSS23-07). <https://css.umich.edu/publications/factsheets/energy/hydrogen-factsheet>
- Checa Ramírez, A. E. (2020). *Evaluación de las emisiones de gases contaminantes de un MCI experimental con diferentes tipos de gasolinas mediante pruebas estáticas* [Trabajo de grado, Universidad Internacional SEK]. <https://repositorio.uisek.edu.ec/bitstream/123456789/4060/1/Ana%20Elizabeth%20Checa%20Ramirez.pdf>
- Çengel, Y. A., & Boles, M. A. (2019). *Thermodynamics: An engineering approach* (9th ed.). McGraw-Hill Education.
- Dam, Q. T., Haidar, F., Mama, N., & Chennapalli, S. J. (2024). Modeling and simulation of an internal combustion engine using hydrogen: A MATLAB implementation approach. *Engineering Perspective*, 4(3), 108–118. <https://doi.org/10.29228/eng.pers.76219>
- Durán, J. M. (2020). What is a simulation model? *Minds and Machines*, 30(3), 301–323. <https://doi.org/10.1007/s11023-020-09520-z>
- European Commission. (2009). *Directive 2009/30/EC of the European Parliament and of the Council of 23 April 2009 amending Directive 98/70/EC relating to the quality of petrol and diesel fuels*. EUR-Lex. <https://eur-lex.europa.eu/eli/dir/2009/30/oj/eng>

- Folio Zabala, C. (2013). *Modelado, identificación y simulación de un motor de combustión de H₂* [Tesis de Ingeniero Industrial, Universidad Pública de Navarra].
- Gao, W., Fu, Z., Li, Y., Li, Y., & Zou, J. (2022). Progress of performance, emission, and technical measures of hydrogen fuel internal-combustion engines. *Energies*, 15(19), 7401. <https://doi.org/10.3390/en15197401>
- García Mariaca, A., Villalba, J., Morillo Castaño, R., & Bailera, M. (2025). Performance and emissions of a spark-ignition internal combustion engine operating with bioethanol–gasoline blends at high altitudes under low- and high-speed conditions. *Energies*, 18(6), 1401. <https://doi.org/10.3390/en18061401>
- Goyal, H., Soni, G., & Dhall, A. K. (2024). Design trends and challenges in hydrogen direct injection (H2DI) ICEs – A review. *International Journal of Hydrogen Energy*, 86, 1179–1194. <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2024.08.284>
- Halder, P., Babaie, M., Salek, F., Shah, K., Stevanović, S., Bodisco, T. A., & Zare, A. (2024). Performance, emissions, and economic analyses of hydrogen fuel cell vehicles. *Renewable and Sustainable Energy Reviews*, 199, 114543. <https://doi.org/10.1016/j.rser.2024.114543>
- Heywood, J. B. (2018). *Internal combustion engine fundamentals* (2nd ed.). McGraw-Hill Education.
- Huang, Y., Unger, N., Harper, K., & Heyes, C. (2020). Global climate and human health effects of the gasoline and diesel vehicle fleets. *GeoHealth*, 4(3), e2019GH000240. <https://doi.org/10.1029/2019GH000240>
- Huber, A. (2022, June 15). Challenges of hydrogen combustion and its impact on emission regulations [Presentación]. DLR. https://elib.dlr.de/193521/1/2022_Huber_ASME_Pannel_hydrogen_challenges.pdf
- International Energy Agency. (2024). *Global EV Outlook 2024: Outlook for emissions reductions*. <https://www.iea.org/reports/global-ev-outlook-2024/outlook-for-emissions-reductions>
- International Organization for Standardization. (2019). *ISO 14687:2019 Gaseous hydrogen—Fuel product specification*. <https://www.iso.org/standard/69482.html>
- ISO 2533. (1975). *Standard atmosphere*. International Organization for Standardization.
- Karthic, P., Bull, S., & Kumar, A. (2020). Assessment of hydrogen-based dual fuel engine on extending knock limiting combustion. ResearchGate. https://www.researchgate.net/publication/338309654_Assessment_of_hydrogen-based_dual_fuel_engine_on_extending_knock_limiting_combustion

- Kawasaki Heavy Industries. (2024, July 22). World's first public demonstration run of a hydrogen engine motorcycle by a mass-production motorcycle manufacturer. https://global.kawasaki.com/en/corp/newsroom/news/detail/?f=20240722_6039
- Khalil, E. K. (2019). Advances in diesel engine technologies: A review. *Energy Reports*, 5, 1381–1394. <https://doi.org/10.1016/j.egyr.2019.10.024>
- Kiss, A., Szabó, B., Kun, K., & Weltsch, Z. (2024). Prediction of efficiency, performance, and emissions based on a validated simulation model in hydrogen–gasoline dual-fuel internal combustion engines. *Energies*, 17(22), 5680. <https://doi.org/10.3390/en17225680>
- Knauder, M., Allmaier, G., Sander, T., & Sams, B. (2020). Experimental investigation of friction and blow-by losses in spark-ignition engines. *SAE International Journal of Engines*, 13(4), 1341–1350. <https://doi.org/10.4271/2020-01-0711>
- Krebs, S., & Biet, C. (2024). Validation of a predictive model of a premixed, lean hydrogen combustion for internal combustion engines. *International Journal of Hydrogen Energy*. Advance online publication. https://www.researchgate.net/publication/383756593_Validation_of_a_predictiv_e_model_of_a_premixed_lean_hydrogen_combustion_for_internal_combustion_engines
- Lapuerta, M., Armas, O., & Rodríguez-Fernández, J. (2006). Study of altitude effect on internal combustion engines operation. Part 2: Diesel engines. ResearchGate. https://www.researchgate.net/publication/290188182_Study_of_altitude_effect_on_internal_combustion_engines_operation_Part_2_Diesel_engines
- Lee, J., Park, C., Kim, Y., Choi, Y., Bae, J., & Lim, B. (2019). Effect of turbocharger on performance and thermal efficiency of hydrogen-fueled spark ignition engine. *International Journal of Hydrogen Energy*, 44(8), 4350–4360. <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2018.12.069>
- Lee, S., Kim, Y., Lee, J., Kim, K., & Oh, S. (2023). Energy and exergy analyses of hydrogen-fueled spark ignition engine with various excess air ratios and ignition timings. *Fuel*, 349, 128588. <https://doi.org/10.1016/j.fuel.2023.128588>
- Lu, C., Chen, W., Zuo, Q., Zhu, G., Zhang, Y., & Liu, Z. (2022). Review of combustion performance improvement and nitrogen-containing pollutant control in the pure hydrogen internal combustion engine. *International Journal of Automotive Manufacturing and Materials*, 1(1), 7–21. <https://doi.org/10.53941/ijamm0101007>
- Lu, X., Wang, Y., Fu, Z., & Liu, Z. (2022). Emission characteristics of hydrogen internal combustion engines. *International Journal of Hydrogen Energy*, 47(58), 24600–24612. <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2021.11.234>

- Marinoni, A., Tamborski, M., Cerri, T., Montenegro, G., D'Errico, G., Onorati, A., Piatti, E., & Pisoni, E. E. (2021). 0D/1D thermo-fluid dynamic modeling tools for the simulation of driving cycles and the optimization of IC engine performances and emissions. *Applied Sciences*, 11(17), 8125. <https://doi.org/10.3390/app11178125>
- Marzouk, E. M., & Ghulman, H. A. (2015). Hydrogen engine and numerical temperature-entropy chart for hydrogen/air cycle analysis. *Energy and Power Engineering*, 7(9), 375–383. <https://doi.org/10.4236/epe.2015.79035>
- Martínez, J., Robles, L., Montalvo, F., Baño Morales, D., & Zambrano, I. (2022). Effects of altitude in the performance of a spark ignition internal combustion engine. *Materials Today: Proceedings*, 49, 72–78. <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2021.07.475>
- Mohammadkhani, F., Yari, M., & Ranjbar, F. (2019). A zero-dimensional model for simulation of a diesel engine and exergo-economic analysis of waste heat recovery from its exhaust and coolant employing a high-temperature Kalina cycle. *Energy Conversion and Management*, 198, 111782. <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2019.111782>
- Moran, M. J., & Shapiro, H. N. (2004). *Fundamentos de termodinámica técnica*. Editorial Reverté.
- Nguyen, D., Kar, T., & Turner, J. W. G. (2023). Performance, emissions, and combustion characteristics of a hydrogen-fueled spark-ignited engine at different compression ratios: Experimental and numerical investigation. *Energies*, 16(15), 5730. <https://doi.org/10.3390/en16155730>
- NIST. (2000). *Hydrogen—The NIST WebBook*. National Institute of Standards and Technology. <https://webbook.nist.gov/cgi/cbook.cgi?ID=C1333740&Mask=1E9F>
- Noyan, O. F., Hasan, M. M., & Pala, N. (2023). A global review of the hydrogen energy eco-system. *Energies*, 16(3), 1484. <https://doi.org/10.3390/en16031484>
- Piqueras, P., de la Morena, J., Sanchis, E. J., & Saadouni, I. (2024). Analysis of altitude impact on Roots compressor operation for a fuel cell system [Preprint]. *MDPI Preprints*. <https://doi.org/10.20944/preprints202504.0896.v1>
- Purayil, F. F., Hamdan, H., Al-Omari, F. H., Selim, M. Y., & Elnajjar, M. Y. (2023). Laminar flame speed of hydrogen–air mixtures under varying pressures and temperatures. *International Journal of Hydrogen Energy*, 48(5), 2567–2576. <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2022.10.047>
- Rajendran, S., Baker, A., & Smith, L. (2021). A simulation triad for evaluating the use of engineering simulation. *International Journal of Simulation and Process Modelling*, 17(4), 365–378. <https://doi.org/10.1504/IJSPM.2021.115648>

- Rocha-Hoyos, J. C., Alvarado, R., & Gómez, A. (2018). Estudio de un motor de gasolina en condiciones de altura en Ecuador. *Información Tecnológica*, 29(5), 143–152.
- Saleh, I., Ali, R., & Zhang, H. (2018). Environmental impact of high altitudes on the operation of PEM fuel cell based UAS. *Energy and Power Engineering*, 10(3), 87–105. <https://doi.org/10.4236/epe.2018.103007>
- Sharma, V., & Zhao, F. (2022). Thermodynamic modeling and simulation of internal combustion engines: State of the art and future directions. *Progress in Energy and Combustion Science*, 85, 100944. <https://doi.org/10.1016/j.pecs.2021.100944>
- Shukla, A., & Agarwal, A. K. (2023). Performance evaluation of a gasoline Atkinson cycle engine under varying intake valve timings. *Applied Thermal Engineering*, 230, 121456. <https://doi.org/10.1016/j.applthermaleng.2023.121456>
- Stephens-Romero, S., Carreras-Sospedra, M., Brouwer, J., Dabdub, D., & Samuelsen, S. (2009). Determining air quality and greenhouse gas impacts of hydrogen infrastructure and fuel cell vehicles. *Environmental Science & Technology*, 43(23), 9022–9029. <https://doi.org/10.1021/es901515y>
- Toyota Motor Corporation. (2024). *2024 Toyota year in review: Celebrating legacy, milestones and innovation*. Toyota USA Newsroom. <https://pressroom.toyota.com/2024-toyota-year-in-review-celebrating-legacy-milestones-and-innovation/>
- Toyota Motor Corporation. (2025, March 28). *2025 Toyota Mirai*. Toyota Pressroom. <https://pressroom.toyota.com/vehicle/2025-toyota-mirai/>
- U.S. Department of Energy. (n.d.). *Hydrogen fuel basics*. <https://www.energy.gov/eere/fuelcells/hydrogen-fuel-basics>
- UNIR Revista. (2024, May 9). Los modelos de simulación: ¿qué son y para qué sirven? *UNIR Revista*. <https://www.unir.net/revista/2024/05/modelos-simulacion>
- Varela, L. A., & Ron, S. R. (2018). *Geografía y clima del Ecuador*. BIOWEB, Pontificia Universidad Católica del Ecuador. <https://bioweb.bio/geografiaClima.html>
- Vollmer, K., Müller, T., & Schneider, P. (2024). Simplified thermal loss models for hydrogen combustion simulation. *Energy Conversion and Management*, 290, 117724. <https://doi.org/10.1016/j.enconman.2023.117724>
- Wang, L., Li, X., Zhang, S., & Zhao, J. (2023). Thermal losses and combustion stability in hydrogen engines. *Energies*, 16(4), 1824. <https://doi.org/10.3390/en16041824>
- Wei, Z., Li, H., & Zhang, J. (2023). Sensitivity of hydrogen combustion heat release to equivalence ratio in direct injection engines. *Energies*, 18(6), 1401. <https://doi.org/10.3390/en18061401>

- World Nuclear Association. (2023). *Hydrogen production and uses*. World Nuclear Association. <https://world-nuclear.org/information-library/energy-and-the-environment/hydrogen-production-and-uses>
- Yang, Z., Du, Y., Geng, Q., Gao, X., Er, H., Liu, Y., & He, G. (2022). Performance analysis of a hydrogen-doped high-efficiency hybrid cycle rotary engine in high-altitude environments based on a single-zone model. *Energies*, 15(21), 7948. <https://doi.org/10.3390/en15217948>
- Zabala, C. F. (2013). Memoria Folio: Modelado de $\phi(\lambda)$ en combustión de H_2 [Folio]. Universidad de Ejemplo.
- Zhang, X., Liu, Y., & Wang, Z. (2023). Altitude effects on performance of hydrogen-fueled spark-ignition engines. *International Journal of Hydrogen Energy*, 48(22), 12345–12356. <https://doi.org/10.1016/j.ijhydene.2022.11.065>

Anexo 1

Modelo atmosférico Estadounidense Nasa 1976



PART 1

Defining Constants and Equations

1.0 INTRODUCTION

The U.S. Standard Atmosphere, 1976 is an idealized, steady-state representation of the earth's atmosphere from the surface to 1000 km, as it is assumed to exist in a period of moderate solar activity. For heights from the surface to 51 geopotential kilometers (km'), the tables of this standard are identical with those of the U.S. Standard Atmosphere, 1962 (COESA 1962) and are based on traditional definitions. These definitions, especially for heights below 20 km', do not necessarily represent an average of the vast amount of atmospheric data available today from observations within that height region. For heights from 51 km' to 84.852 km' (i.e., 51.413 to 86 geometric kilometers), the tables are based upon the averages of present-day atmospheric data as represented by the traditional type of defining parameters. These include the linearly segmented temperature-height profile, and the assumption of hydrostatic equilibrium, in which the air is treated as a homogeneous mixture of the several constituent gases.

At greater heights, however, where dissociation and diffusion processes produce significant departures from homogeneity, the definitions governing the Standard are more sophisticated than those used at lower altitudes. In this high-altitude regime, the hydrostatic equation, as applied to a mixed atmosphere, gives way to the more general equation for the vertical component of the flux for individual gas species (Colegrove et al. 1965; Kene-shea and Zimmerman 1970), which accounts for the relative change of composition with height. This flux equation simplifies to the hydrostatic equation for the special case when the atmospheric gases remain well mixed, as is the situation below 86 km.

The temperature-height profile between 86 and 1000 km is not expressed as a series of linear functions, as at lower altitudes. Rather, it is defined in terms of four successive functions chosen not only to provide a reasonable approximation to observations, but also to yield a continuous first derivative with respect to height over the entire height regime.

Observational data of various kinds provide the basis for independently determining various segments of this temperature-height profile. The observed temperatures at heights between 110 and

120 km were particularly important in imposing limits on the selection of the temperature-height function for that region, while the observed densities at 150 km and above strongly influenced the selection of both the temperature and the extent of the low-temperature isothermal layer immediately above 86 km.

In spite of the various independent data sets upon which the several temperature-height segments are based, it is desirable, for purposes of mathematical reproducibility of the tables of this Standard, to express the temperature in a series of consecutive height functions from the surface to 1000 km, with the expression for each successive function depending upon the end-point value of the preceding function, as well as upon certain terms and coefficients peculiar to the related height interval. This total temperature-height profile applied to the fundamental continuity models (i.e., the hydrostatic equation and the equation of motion), along with all the ancillary required constants, coefficients, and functions, defines the U.S. Standard Atmosphere, 1976. The specification of this definition without any justification in terms of observed data is the purpose of Section 1.

1.1 INTERNATIONAL SYSTEM OF UNITS

The 1976 U. S. Standard Atmosphere is defined in terms of the International System (SI) of Units (Mechtley 1973). A list of the symbols, names, and the related quantities of the applicable basic and derived SI units, as well as of the non-standard metric units and the English unit employed in this Standard is presented in table 1.

1.2 BASIC ASSUMPTIONS AND FORMULAS

1.2.1 ADOPTED CONSTANTS.—For purposes of computation it is necessary to establish numerical values for various constants appropriate to the earth's atmosphere. The adopted constants are grouped into three categories. Category I includes those constants which are common to many branches of the physical and chemical sciences, and are here considered to be fundamental constants. Some of these may be multi-valued as in the case of M_i representing the molecular weight of the i th gas species. Category I includes three single-valued and one multi-valued constant. Category II includes those constants which, in addition to the

TABLE 1.—Units Applicable to the U.S. Standard Atmosphere 1976

	Symbol	Name	Quantity
Basic SI	m	meter	length
	kg	kilogram	mass
	s	second	time
	K	kelvin	thermodynamic temperature
	mol	mole	the amount of a substance
Derived SI	N	newton	force (kg·m/s ²)
	Pa	pascal	pressure (N/m ²)
	J	joule	work, energy or quantity of heat (N·m)
	W	watt	rate of energy (or heat) transfer (J/s)
Non-Standard	mb	millibar	pressure 100 (N/m ²)
	torr at 0°C	torr	pressure 133.322 (N/m ²)
	°C	Celsius degree	temperature kelvin minus 273.15
English	ft	foot	length 0.3048 m*

* exact definition

category I constants and a suitable set of equations, are sufficient to define that portion of the 1976 Standard Atmosphere below 86 km. This category includes nine single-valued and three multi-valued constants. Category III includes all the remaining constants which, along with category-I and category-II constants and the related equations plus an expansion of that set are necessary to define that portion of the 1976 Standard Atmosphere above 86 km. This category includes 7 single-valued and 11 multi-valued constants.

The constants, with appropriate dimensions and symbols, are listed according to categories in three successive sections of table 2.

The definition as well as the authority for the value of each constant is discussed separately from the tabular listing. The multi-valued constants, with one exception, have only their general symbol and dimensions listed in table 2, while the multiple values of these constants, i.e., one value for each of several gas species, or one value for each of several height levels, are listed in tables 4 through 7.

Discussion of the Adopted Values of the Primary Constants:

Category I Constants

k The Boltzmann constant, $k = 1.380622 \times$

TABLE 2.—Adopted constants

A. Category I Constants	
Symbol	Value
k	1.380622×10^{-23} N·m/K
M_i	the set of the first 10 values (kg/kmol) listed in table 3
N_A	6.022169×10^{26} kmol ⁻¹
R^*	8.31432×10^{-2} N·m/(kmol·K)
B. Category II Constants	
F_i	the set of the 10 values (dimensionless) listed in table 3
g_0	9.80665 m/s ²
g_0'	9.80665 m ² /(s ² ·m')
H_i	the set of eight values (km') listed in table 4
$L_{a,b}$	the set of seven values (K/km') listed in table 4
P_0	1.013250×10^5 N/m ² (or Pa)
r_0	6.356766×10^6 km
T_0	288.15 K
S	110 K
β	1.458×10^{-6} kg/(s·m·K ^{1/2})
γ	1.40 (dimensionless)
σ	3.65×10^{-1} m
C. Category III Constants	
a_i	the set of 5 values (m ⁻¹ ·s ⁻¹) listed in table 6
b_i	the set of 5 values (dimensionless) listed in table 6
K_i	1.2×10^2 m ² /s
K_s	0.0 m ² /s
$L_{x,y}$	the set of 2 values (K/km) listed in table 5
$n(O)_i$	8.6×10^{19} m ⁻³
$n(H)_i$	8.0×10^{19} m ⁻³
q_i	the set of 4 values (km ⁻²) listed in table 7
Q_i	the set of 4 values (km ⁻²) listed in table 7
T_0	240.0 K
T_∞	1000.0 K
u_i	the set of 4 values (km) listed in table 7
U_i	the set of 4 values (km) listed in table 7
w_i	the set of 4 values (km ⁻¹) listed in table 7
W_i	the set of 4 values (km ⁻¹) listed in table 7
Z_i	the set of 6 values (km) listed in table 5
α_i	the set of 6 values (dimensionless) listed in table 6
ϕ	7.2×10^{19} m ⁻² ·s ⁻¹

10^{-23} N·m/K, is theoretically equal to the ratio R^*/N_A , and has a value, consistent with the carbon-12 scale, as cited by Mechtly (1973).

M_i The set of values of molecular weights M_i listed in table 3 is based upon the carbon-12 isotope scale for which $C^{12} = 12$. This scale was adopted in 1961 at the Montreal meeting of the International Union of Pure and Applied Chemistry.

N_A The Avogadro constant, $N_A = 6.022169 \times 10^{26}$ kmol⁻¹, is consistent with the

REPRODUCIBILITY OF THE
ORIGINAL PAGE IS POOR

R^* carbon-12 scale and is the value cited by Mechtly (1973).
The gas constant, $R^* = 8.31432 \times 10^3$ N-m/(kmol-K), is consistent with the carbon-12 scale, and is the value used in the 1962 Standard. This value is not exactly consistent with the cited values of k and N_A .

Category II Constants

F_i The set of values of fractional-volume concentrations F_i listed in table 3 is assumed to represent the relative concentrations of the several gas species comprising dry air at sea level. These values are identical to those given in the 1962 Standard (COESA 1962), and except for minor modifications which are based upon CO_2 measurements by Keeling (1960), these values are the same as those given by Glueckauf (1951), and are based upon the earlier work of Paneth (1939).

g_0 The quantity $g_0 (= 9.80665 \text{ m/s}^2)$ represents the sea-level value of the acceleration of gravity adopted for this Standard. This value is the one originally adopted by the International Committee on Weights and Measures in 1901 for 45° latitude, and even though it has since been shown to be too high by about five parts in ten thousand (List 1968), this value has persisted in meteorology and in some standard atmospheres as the value associated with 45° latitude, even though it applies more precisely to a latitude of $45^\circ 32' 33''$.

g_0' The dimensional constant g_0' selected to relate the standard geopotential meter to geometric height is numerically equal to g_0 , but with appropriately different dimensions. This constant implicitly defines one standard geopotential meter as the vertical increment through which one must lift one kilogram to increase its potential energy by 9.80665 joules. The geometric length of this vertical increment varies inversely with the height-dependent value of g .

H_b Each of the members of the set of geopotential-height values H_b listed in table 4 represents the base of one of eight successive atmospheric layers. The pairs of values of H_b and $L_{M,b}$ are based partly on tradition and partly on present-day observations. The first five of these pairs are identical to those of the

TABLE 3.—Molecular weights and assumed fractional-volume composition of sea-level dry air

Gas species	Molecular weight M_i (kg/kmol)	Fractional volume F_i (dimensionless)
N_2	28.0134	0.78084
O_2	31.9988	.209476
Ar	39.948	.00934
CO_2	44.00955	.000314
Ne	20.183	.00001818
He	4.0026	.00000524
Kr	83.80	.00000114
Xe	131.30	.000000087
CH_4	16.04303	.000002
H_2	2.01594	.0000005

TABLE 4.—The defined reference levels and gradients of the linearly segmented temperature-height profile from the surface to 86 geometric kilometers

Subscript b	Geopotential height H_b (km')	Molecular-scale temperature gradient $L_{M,b}$ (K/km')	Form of function relating T to H
0	0	-6.5	Linear
1	11	0.0	Linear
2	20	+1.0	Linear
3	32	+2.8	Linear
4	47	0.0	Linear
5	51	-2.8	Linear
6	71	-2.0	Linear
7	84.8520		

Note: These values plus T_0 , the defined sea-level value of T , equal to $T_{M,0}$ completely specify the geopotential-height profile of T_M from the surface to 86 geometric kilometers.

first five layers of the 1962 Standard, while the remaining two values of both H_b and $L_{M,b}$ have been newly selected to provide a reasonable fit to the presently available atmospheric data. The first two values of the related sets have their origin in one of the earliest aeronautical standard atmospheres (Toussaint 1919), and were approximated in the first U.S. Standard Atmosphere (Diehl 1925).

$L_{M,b}$ Each member of the set of seven gradients $L_{M,b} = dT_M/dH$ [i.e., of molecular scale temperature T_M (Menzner and Ripley 1956) with respect to geopotential H] listed in table 4 represents the fixed value appropriate throughout its related layer, H_b to H_{b+1} .

P_0 The standard sea-level atmospheric pressure P_0 equal to 1.013250×10^5 Pa (or N/m²) was adopted in 1947 in

Resolution 164 of the International Meteorological Organization, and corresponds to the pressure exerted by a column of mercury 0.760 m high, having a density of $1.35951 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$ and subject to an acceleration due to gravity of 9.80665 m/s^2 . This equivalency definition was adopted by the International Commission on Weights and Measures in 1948.

r_0 The effective earth's radius for purposes of calculating geopotential at any latitude is readily obtained from equations given by Harrison (1968). The value of r_0 ($= 6356.766 \text{ km}$) used in this Standard corresponds to the latitude for which $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$.

T_0 The standard sea-level temperature T_0 is 288.15 K . This value is based upon two international agreements. The first of these is Resolution 192 of the International Commission for Air Navigation which in 1924 adopted 15°C as the sea-level temperature of The International Standard Atmosphere. This value has been retained unchanged in all known standard atmospheres since that date. The second agreement is that of the 1954 Tenth General Conference on Weights and Measures which set the fixed point of the Kelvin temperature scale at the triple-point temperature 273.16 K , which is 0.01 K above the ice-point temperature at standard sea-level pressure.

S The Sutherland constant, $S = 110 \text{ K}$, (Hilsenrath et al. 1955) is a constant in the empirical expression for dynamic viscosity.

β The quantity, $\beta = 1.458 \times 10^6 \text{ kg/(s} \cdot \text{m} \cdot \text{K}^{1/2})$, (Hilsenrath et al. 1955) is a constant in the expression for dynamic viscosity.

γ The ratio of specific heat of air at constant pressure to the specific heat of air at constant volume is a dimensionless quantity with an adopted value $\gamma = 1.400$. This is the value adopted by the Aerological Commission of the International Meteorological Organization, in Toronto in 1948.

σ The mean effective collision diameter σ ($\approx 3.65 \times 10^{-10} \text{ m}$) of molecules is a quantity which varies with gas species and temperature. The adopted value is assumed to apply in a dry, sea-level atmosphere. Above 85 km the validity

of the adopted value decreases with increasing altitude (Hirschfelder et al. 1965; Chapman and Cowling 1960) due to the change in atmospheric composition. For this reason the number of significant figures in tabulations of quantities involving σ is reduced from that used for other tabulated quantities at heights above 86 km .

Category III Constants

a_i The quantity a_i represents a set of five values of species-dependent coefficients listed in table 6. Each of these values is used in a particular function for designating the height-dependent, molecular-diffusion coefficient D_i for the related gas species. (See b_i .)

TABLE 5.—The reference levels and function designations for each of the four segments of the temperature-height profile between 86 and 1000 km , with gradients specified for two linear segments, and with an intermediate reference height for the adopted atomic-hydrogen number-density value

Subscript b	Geometric height Z_b (km)	Kinetic-temperature gradient $L_{K,b}$ (K/km)	Form of function relating T to Z
7	86	0.0	linear
8	91		elliptical
9	110	12.0	linear
10	120		exponential
11	500		
12	1000		

Note: These specifications, along with a defined value of temperature at 110 km , and the temperature at 86 km (84.8520 km) given in table 4, plus the requirement of a continuous first derivative, dT/dZ , above 86 km , define the temperature-height profile between 86 and 120 km . The definitive form of the exponential function eq (31) is required to complete the specification of the temperature-height profile from 120 to 1000 km . (See Appendix B for the derivation of the elliptical segment given by eq (27)).

b_i The quantity b_i represents a set of five values of species-dependent exponents listed in table 6. Each of these values is used, along with the corresponding value of a_i , in eq (8) for designating the height-dependent, molecular-diffusion coefficient for the related gas species. The particular values of a_i and b_i adopted for this Standard have been selected to yield a height variation of D_i assumed to be realistic.

K_7 The quantity $K_7 = 1.2 \times 10^8 \text{ m}^2/\text{s}$ is the adopted value of the eddy-diffusion coefficient K , at $Z_7 = 86 \text{ km}$ and in the

	height interval from 86 up to 91 km. Beginning at 91 km and extending up to 115 km, the value of K is defined by eq (7b). At 115 km the value of K equals K_{10} .		
K_{10}	The quantity $K_{10} = 0.0 \text{ m}^2/\text{s}$ is the adopted value of the eddy-diffusion coefficient K at $Z_{10} = 120$ and throughout the height interval from 115 km to 1000 km.		
$L_{k,b}$	The two-valued set of gradients $L_{k,b} = dT/dZ$ listed in table 5 was specifically selected for this Standard to represent available observations. Each of these two values of $L_{k,b}$ is associated with the entire extent of a corresponding layer whose base is Z_b and whose top is Z_{b+1} .		
$n(\text{O})_7$	The quantity, $n(\text{O})_7 (= 8.6 \times 10^{16} \text{ m}^{-3})$, is the number density of atomic oxygen assumed for this Standard to exist at $Z_7 = 86 \text{ km}$. This value of atomic oxygen number density, along with other defined constants, leads to number densities of N_2 , O_2 , Ar , and He at 86 km. (See Appendix A.)	Q_i	The quantity Q_i represents the second set of the six sets of constants described along with q_i above.
$n(\text{H})_{11}$	The quantity, $n(\text{H})_{11} (= 8.0 \times 10^{10} \text{ m}^{-3})$, is the assumed number density of atomic hydrogen at height $Z_{11} = 500 \text{ km}$, and is used as the reference value in computing the height profile of atomic hydrogen between 150 and 1000 km.	T_b	The quantity $T_b (= 240.0 \text{ K})$ represents the kinetic temperature at $Z_b = 110 \text{ km}$. This temperature has been adopted along with the gradient $L_{k,b} (= 12 \text{ K/km})$ to generate a linear segment of $T(Z)$ for this Standard between 110 and 120 km. This segment of $T(Z)$ represents a mean of observed temperature-height data for the corresponding height region.
q_i	The quantity q_i represents the first set of six species-dependent sets of coefficients or terms (i.e., sets of q_i , Q_i , u_i , U_i , w_i , and W_i), the corresponding members of all six of which are simultaneously used in an empirical expression [eq (37)] for the vertical transport term $v_i/(D_i + K)$ in the vertical flux equation for the particular gas species. The species-dependent values of all six sets have been selected for this Standard to adjust number-density profiles of the related gas species to particular boundary conditions at 150 and 450 km, as well as at 97 km in the case of atomic oxygen. These boundary conditions all represent observed or assumed average conditions. These six sets of values are listed in table 7.	T_∞	The quantity, $T_\infty (= 1000 \text{ K})$ represents the exospheric temperature, i.e., the asymptote which the exponential function representing $T(Z)$ above 120 km closely approaches at heights above about 500 km, where the mean free path exceeds the scale height. The value of T_∞ adopted for this Standard is assumed to represent mean solar conditions
		u_i	The quantity u_i represents the third set of the six sets of constants described along with q_i above.
		U_i	The quantity U_i represents the fourth set of the six sets of constants described along with q_i above.

TABLE 6.—A set of species-dependent, thermal-diffusion coefficients and two other sets of species-dependent constants required in specifying the height-dependent function of the molecular-diffusion coefficient for the several species listed

Gas	α_i (dimensionless)	α_i ($\text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$)	b_i (dimensionless)
N_2	0.00		
O	0.00	6.986×10^{20}	0.750
O_2	0.00	4.863×10^{20}	0.750
Ar	0.00	4.487×10^{20}	0.870
He	-0.40	1.700×10^{21}	0.691
H	-0.25	3.305×10^{21}	0.500

TABLE 7.—Values of six sets of species-dependent coefficients applicable to the empirical expression representing the flux term $v_i/(D_i + K)$ in the equation for number density of the four species listed

Gas	Q_i (km^{-3})	q_i (km^{-3})	U_i (km)	u_i (km)	W_i (km^{-3})	w_i (km^{-3})
O	-5.809644×10^{-4}	$-3.416248 \times 10^{-34}$	56.90311	97.0	2.706240×10^{-2}	5.608765×10^{-4}
O_2	1.366212×10^{-4}	0	86.000		8.333333×10^{-2}	
Ar	9.434079×10^{-5}	0	86.000		8.333333×10^{-2}	
He	-2.457369×10^{-4}	0	86.000		6.666667×10^{-1}	

* This value of q_i applies only for $86 \leq Z \leq 97 \text{ km}$. For $Z > 97 \text{ km}$, $q_i = 0.0 \text{ km}^{-3}$.

- w_i The quantity w_i represents the fifth set of the six sets of constants described along with q_i above.
- W_i The quantity W_i represents the sixth set of the six sets of constants described along with q_i above.
- Z_b The quantity Z_b represents a set of six values of Z for b equal to 7 through 12. The values Z_7, Z_8, Z_9 , and Z_{10} correspond successively to the base of successive layers characterized by successive segments of the adopted temperature-height function for this Standard. The fifth value, Z_{11} , is the reference height for the atomic hydrogen calculation, while the sixth value, Z_{12} , represents the top of the region for which the tabular values of the Standard are given. These six values of Z_b , along with the designation of the type of temperature-height function associated with the first four of these values, plus the related value of $L_{K,b}$, for the two segments having a linear temperature-height function, are listed in table 5.
- α_i The quantity α_i represents a set of six adopted species-dependent, thermal-diffusion coefficients listed in Table 6.
- ϕ The quantity ϕ ($= 7.2 \times 10^{11} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$) for the vertical flux is chosen as a compromise between the classical Jeans escape flux for $T_\infty = 1000 \text{ K}$, with corrections to take into account deviations from a Maxwellian velocity distribution at the critical level (Brinkman 1971), and the effects of charge exchange with H^+ and O^+ in the plasmasphere (Tinsley 1973).

1.2.2 EQUILIBRIUM ASSUMPTIONS.—The air is assumed to be dry, and at heights sufficiently below 86 km, the atmosphere is assumed to be homogeneously mixed with a relative-volume composition leading to a constant mean molecular weight M . The air is treated as if it were a perfect gas, and the total pressure P , temperature T , and total density ρ at any point in the atmosphere are related by the equation of state, i.e., the perfect gas law, one form of which is

$$P = \frac{\rho \cdot R^* \cdot T}{M} \quad (1)$$

where R^* is the universal gas constant. An alternate form of the equation of state, in terms of the total number density N and the Avogadro constant N_A is

$$P = \frac{N \cdot R^* \cdot T}{N_A} \quad (2)$$

This form represents the summation of P_i , the partial pressures of the individual gas species, where P_i is related to n_i the number density of the i th gas species in the following expression:

$$P_i = n_i \cdot k \cdot T \quad (3)$$

where k is the Boltzmann constant.

Within the height region of complete mixing, the atmosphere is assumed to be in hydrostatic equilibrium, and to be horizontally stratified so that dP , the differential of pressure, is related to dZ , the differential of geometric height, by the relationship

$$dP = -g \cdot \rho \cdot dZ \quad (4)$$

where g is the height-dependent acceleration of gravity. The elimination of ρ between eq (1) and (4) yields another form of the hydrostatic equation, which serves as the basis for the low-altitude pressure calculation:

$$d \ln P = \frac{dP}{P} = \frac{-g \cdot M}{R^* \cdot T} \cdot dZ \quad (5)$$

Above 86 km the hydrostatic equilibrium of the atmosphere gradually breaks down as diffusion and vertical transport of individual gas species lead to the need for a dynamically oriented model including diffusive separation. Under these conditions it is convenient to express the height variations in the atmospheric number density in terms of the vertical component of the flux of the molecules of individual gas species (Colgrove et al. 1965). In terms of the i th gas species, this expression is

$$n_i \cdot v_i + D_i \cdot \left(\frac{dn_i}{dZ} + \frac{n_i \cdot (1 + \alpha_i)}{T} \cdot \frac{dT}{dZ} + \frac{g \cdot n_i \cdot M_i}{R^* \cdot T} \right) + K \cdot \left(\frac{dn_i}{dZ} + \frac{n_i}{T} \cdot \frac{dT}{dZ} + \frac{g \cdot n_i \cdot M}{R^* \cdot T} \right) = 0 \quad (6)$$

where

- v_i = the vertical transport velocity of the i th species,
- D_i = the height-dependent, molecular-diffusion coefficient of the i th species diffusing through N_2 ,
- α_i = the thermal-diffusion coefficient of the i th species,
- M_i = the molecular weight of the i th species,
- M = the molecular weight of the gas through which the i th species is diffusing, and
- K = the height-dependent, eddy-diffusion coefficient.

The function K is defined differently in each of three height regions:

1. For $86 \leq Z < 95$ km,

$$K = K_7 = 1.2 \times 10^2 \text{ m}^2/\text{s} \quad (7a)$$

2. For $95 \leq Z < 115$ km

$$K = K_7 \cdot \exp \left[1 - \frac{400}{400 - (Z - 95)^2} \right] \quad (7b)$$

3. For $115 \leq Z < 1000$

$$K = K_{10} = 0.0 \text{ m}^2/\text{s}. \quad (7c)$$

The function D_i is defined by

$$D_i = \frac{a_i}{\Sigma n_i} \cdot \left(\frac{T}{278.15} \right)^{b_i} \quad (8)$$

where a_i and b_i are the species-dependent constants defined in table 6, while T and Σn_i are both altitude-dependent quantities which are specified in detail below. The values of D_i , determined from these altitude-dependent quantities and the defined constants a_i and b_i , are plotted in figure 1 as a function of altitude, for each of four species, O , O_2 , Ar , and He . The value of D_i for atomic hydrogen, for heights just below 150 km, is also shown in figure 1. This same figure contains a graph of K as a function of altitude. It is apparent that, for heights sufficiently below 90 km, values of D_i are negligible compared with K , while above 115 km, the reverse is true. In addition, it is known that the flux velocity v_i for the various species becomes negligibly small at altitudes sufficiently below 90 km.

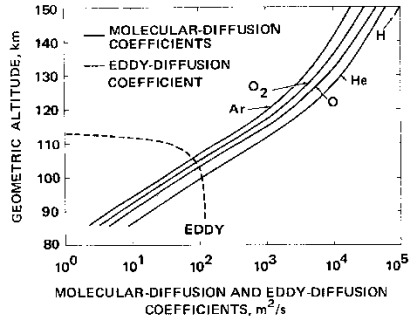


Figure 1. Molecular-diffusion and eddy-diffusion coefficients as a function of geometric altitude.

The information regarding the relative magnitudes of v_i , D_i , and K permits us to consider the application of eq (6) in each of several regimes.

One of these regimes is for heights sufficiently below 90 km, such that v_i and D_i are both extremely small compared with K . Under these conditions, eq (6) reduces to the following form of the hydrostatic equation:

$$\frac{dn_i}{n_i} + \frac{dT}{T} = \frac{-g \cdot M}{R^* \cdot T} \cdot dZ. \quad (9)$$

Since the left-hand side of this equation is seen through eq (3) to be equal to dP_i/P_i , eq (9) is seen to be the single-gas equivalent to eq (5). Consequently, while eq (6) was designed to describe the assumed equilibrium conditions of individual gases above 86 km, it is apparent that eq (6) also describes such conditions below that altitude, where the partial pressure of each gas comprising the total pressure varies in accordance with the mean molecular weight of the mixture, as well as in accordance with the temperature and the acceleration of gravity. Nevertheless, eq (5), expressing total pressure, represents a convenient step in the development of equations for computing total pressure versus geometric height, when suitable functions are introduced to account for the altitude variation in T , M , and g .

It has been customary in standard-atmosphere calculations, to effectively eliminate the variable portion of the acceleration of gravity from eq (5) by the transformation of the independent variable Z to geopotential altitude H , thereby simplifying both the integration of eq (5) and the resulting expression for computing pressure. The relationship between geometric and geopotential altitude depends upon the concept of gravity.

1.2.3 GRAVITY AND GEOPOTENTIAL ALTITUDE—Viewed in the ordinary manner, from a frame of reference fixed in the earth, the atmosphere is subject to the force of gravity. The force of gravity is the resultant (vector sum) of two forces: (a) the gravitational attraction in accordance with Newton's universal law of gravitation, and (b) the centrifugal force, which results from the choice of an earthbound, rotating frame of reference.

The gravity field, being a conservative field, can be derived conveniently from the gravity potential energy per unit mass, that is, from the geopotential Φ . This is given by

$$\Phi = \Phi_g + \Phi_c \quad (10)$$

where Φ_g is the potential energy, per unit mass, of gravitational attraction, and Φ_c is the potential energy, per unit mass, associated with the centrifugal force. The gravity, per unit mass, is

$$g = \nabla \Phi \quad (11)$$

where $\nabla \Phi$ is the gradient (ascendant) of the geo-

potential. The acceleration due to gravity is denoted by g and is defined as the magnitude of $\mathbf{g}$; that is,

$$g = |\mathbf{g}| = |\nabla\Phi|. \quad (12)$$

When moving along an external normal from any point on the surface Φ_1 to a point on the surface Φ_2 infinitely close to the first surface, so that $\Phi_2 = \Phi_1 + d\Phi$, the incremental work performed by shifting a unit mass from the first surface to the second will be

$$d\Phi = g \cdot dZ. \quad (13)$$

Hence,

$$\Phi = \int_0^Z g \cdot dZ. \quad (14)$$

The unit of measurement of geopotential is the standard geopotential meter (m') which represents the work done by lifting a unit mass 1 geometric meter, through a region in which the acceleration of gravity is uniformly 9.80665 m/s^2 .

The geopotential of any point with respect to mean sea level (assumed zero potential), expressed in geopotential meters, is called geopotential altitude. Therefore, geopotential altitude H is given by

$$H = \frac{\Phi}{g_0} = \frac{1}{g_0} \cdot \int_0^Z g \cdot dZ \quad (15)$$

and is expressed in geopotential meters (m') when the unit geopotential g_0 is set equal to $9.80665 \text{ m}^2/(\text{s}^2 \cdot \text{m})$.

With geopotential altitude defined as in eq (15), the differential of eq (15) may be expressed as

$$g_0' \cdot dH = g \cdot dZ. \quad (16)$$

This expression is used in eq (5) to reduce the number of variables prior to its integration, thereby leading to an expression for computing pressure as a function of geopotential height.

The inverse-square law of gravitation provides an expression for g as a function of altitude with sufficient accuracy for most model-atmosphere computations:

$$g = g_0 \cdot \left(\frac{r_0}{r_0 + Z} \right)^2 \quad (17)$$

where r_0 is the effective radius of the earth at a specific latitude as given by Lambert's equations (List 1968.). Such a value of r_0 takes into account the centrifugal acceleration at the particular latitude. For this Standard, the value of r_0 is taken as $6,356,766 \text{ m}$, and is consistent with the adopted value of $g_0 = 9.80665 \text{ m/s}^2$ for the sea-level value

of the acceleration of gravity. The variation of g as a function of geometric altitude is depicted in figure 2.

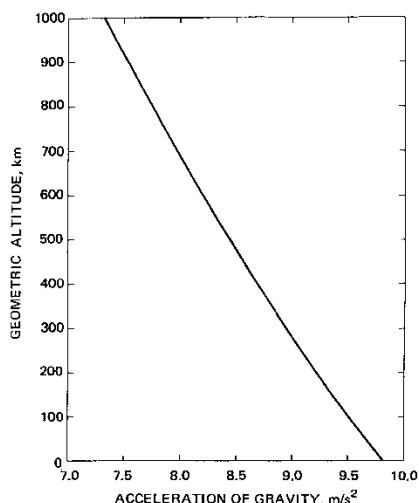


Figure 2. Acceleration of gravity as a function of geometric altitude

Integration of eq (15), after substitution of eq (17) for g , yields

$$H = \frac{g_0}{g_0'} \cdot \left(\frac{r_0 \cdot Z}{r_0 + Z} \right) = \Gamma \cdot \left(\frac{r_0 \cdot Z}{r_0 + Z} \right) \quad (18)$$

or

$$Z = \frac{r_0 \cdot H}{\Gamma \cdot r_0 - H} \quad (19)$$

where $\Gamma = g_0/g_0' = 1 \text{ m}'/\text{m}$.

Differences between geopotential altitudes obtained from eq (18) for various values of Z , and those computed from the more complex relationship used in developing the U.S. Standard Atmosphere, 1962, are small. For example, values of H computed from eq (18) are approximately 0.2, 0.4, and 33.3 m greater at 90, 120, and 700 km, respectively, than those obtained from the relationship used in the 1962 Standard.

The transformation from Z to H in eq (5) makes it necessary for the altitude variation of T as well as any variation in M between the surface and 86 km also to be defined in terms of H . It is convenient therefore to determine the sea-level value of M as well as the extent of any height dependence of this quantity between the surface and 86 km. Then, for

this low-altitude regime, the two variables T and M are combined with the constant M_0 into a single variable T_M , which is then defined as a function of H .

1.2.4 MEAN MOLECULAR WEIGHT.—The mean molecular weight M of a mixture of gases is by definition

$$M = \frac{\sum (n_i \cdot M_i)}{\sum n_i} \quad (20)$$

where n_i and M_i are the number density and defined molecular weight, respectively, of the i th gas species. In that part of the atmosphere between the surface and about 80 km altitude, mixing is dominant, and the effect of diffusion and photochemical processes upon M is negligible. In this region the fractional composition of each species is assumed to remain constant at the defined value F_i , and M remains constant at its sea-level value M_0 . For these conditions n_i is equal to the product of F_i times the total number density N , so that eq (20) may be rewritten as

$$M = M_0 = \frac{\sum [F_i \cdot N(Z) \cdot M_i]}{\sum [F_i \cdot N(Z)]} = \frac{\sum (F_i \cdot M_i)}{\sum F_i} \quad (21)$$

The right-hand element of this equation results from the process of factoring $N(Z)$ out of each term of both the numerator and the denominator of the preceding fraction, so that, in spite of the altitude dependence of N , M is seen analytically to equal M_0 over the entire altitude region of complete mixing.

When the defined values of F_i and M_i (from table 3) are introduced into eq (21), M_0 is found to be 28.9644 kg/kmol. At 86 km (84.852 km'), however, the defined value of atomic-oxygen number density ($8.6 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$) is seen, in Appendix A, to lead to a value of $M = 28.9522 \text{ kg/kmol}$, about 0.04 percent less than M_0 . To produce a smooth transition from this value of M to M_0 , the altitude profile of M has been arbitrarily defined at intervals of 0.5 km' for altitudes between 79.006 and 84.852 km', in terms of the ratio M/M_0 as given in table 8. These ratio values have been interpolated from those initially selected for intervals of 0.5 geometric kilometers between 80 and 86 km to satisfy the boundary conditions of $M = M_0 = 28.9644$ at 80 km, and $M = 28.9522$ at 86 km, and to satisfy a condition of smoothly decreasing first differences in M within the height interval 80 to 86 km.

These arbitrarily assigned values of M/M_0 may be used for correcting a number of parameters of this Standard if the tabulations are to correctly fit the model in the fifth and perhaps in the fourth significant figures within this height region. This after-the-fact correction is required because these values of M/M_0 were not included in the program used for computing the tables of this Standard be-

low 86 km, and hence, the tabulations of some of the properties may show a discontinuity of up to 0.04 percent between 85.5 and 86 km. This situation exists particularly for four properties in addition to molecular weight, i.e., kinetic temperature, total number density, mean free path, and collision frequency. For these five parameters the discrepancy in the tables between 80 and 86 km can be readily remedied by a simple multiplication or division: tabulated values of M , T , and L must be multiplied by the corresponding values of M/M_0 from table 8; tabulated values of N and ν must be divided by the corresponding values of M/M_0 .

Three other properties, dynamic viscosity, kinematic viscosity, and thermal conductivity, which are tabulated only for heights below 86 km, have similar discrepancies for heights immediately below 86 km. These values are not so simply corrected, however, because of the empirical nature of their respective defining functions. Rather, these quantities must be recalculated in terms of a suitably corrected set of values of T , if the precisely correct values are desired for geometric altitudes between 80 and 86 km.

TABLE 8.—Molecular-weight ratio geopotential and geometric altitudes in meters

H	Z	M/M_0	Z	H	M/M_0
79000	79994.1	1.000000	80000	79005.7	1.000000
79500	80506.9	0.999996	80500	79493.3	0.999996
80000	81019.6	0.999988	81000	79980.8	0.999989
80500	81532.5	0.999969	81500	80468.2	0.999971
81000	82045.4	0.999938	82000	80955.7	0.999941
81500	82558.6	0.999904	82500	81443.0	0.999909
82000	83071.5	0.999864	83000	81930.2	0.999870
82500	83584.8	0.999822	83500	82417.3	0.999829
83000	84098.0	0.999778	84000	82904.4	0.999786
83500	84611.4	0.999731	84500	83391.4	0.999741
84000	85124.8	0.999681	85000	83878.4	0.999694
84500	85638.4	0.999679	85500	84365.2	0.999641
			86000	84852.0	0.999579

1.2.5 MOLECULAR-SCALE TEMPERATURE VS. GEOPOTENTIAL ALTITUDE 0.0 TO 84.8520 KM.—The molecular-scale temperature T_M (Minzner et al. 1958) at a point is defined as the product of the kinetic temperature T times the ratio M_0/M , where M is the mean molecular weight of air at that point, and M_0 (=28.9644 kg/kmol) is the sea-level value of M discussed above. Analytically,

$$T_M = T \cdot \frac{M_0}{M} \quad (22)$$

When T is expressed in the Kelvin scale, T_M is also expressed in the Kelvin scale.

The principle virtue of the parameter T_M is that it combines the variable portion of M with the variable T into a single new variable, in a manner

somewhat similar to the combining of the variable portion of g with Z to form the new variable H . When both of these transformations are introduced into (5), and when T_M is expressed as a linear function of H , the resulting differential equation has an exact integral. Under these conditions, the computation of P versus H becomes a simple process not requiring numerical integration. Traditionally, standard atmospheres have defined temperature as a linear function of height to eliminate the need for numerical integration in the computation of pressure versus height. This Standard follows the tradition to heights up to 86 km, and the function T_M versus H is expressed as a series of seven successive linear equations. The general form of these linear equations is

$$T_M = T_{M,b} + L_{M,b} \cdot (H - H_b) \quad (23)$$

with the value of subscript b ranging from 0 to 6 in accordance with each of seven successive layers. The value of $T_{M,b}$ for the first layer ($b = 0$) is 288.15 K, identical to T_0 , the sea-level value of T , since at this level $M = M_0$. With this value of $T_{M,b}$ defined, and the set of six values of H_b and the six corresponding values of $L_{M,b}$ defined in table 4, the function T_M of H is completely defined from the surface to 84.8520 km' (86 km). A graph of this function is compared with the similar function of the 1962 Standard in figure 3. From the surface to the 51-km' altitude, this profile is identical to that of the 1962 Standard. The profile from 51 to

84.8520 km' was selected by Task Group I, and abbreviated tables of thermodynamic properties of the atmosphere based upon this profile were published by Kantor and Cole (1973).

1.2.6 KINETIC TEMPERATURE VERSUS GEOMETRIC ALTITUDE, 0.0 TO 1000 km—Between the surface and 86-km altitude, kinetic temperature is based upon the defined values of T_M . In the lowest 80 kilometers of this region, where M is constant at M_0 , T is equal to T_M in accordance with (22). Between 80 and 86 km, however, the ratio M/M_0 is assumed to decrease from 1.000000 to 0.9995788, as indicated in table 8, such that the values of T correspondingly decrease from those of T_M . Thus, at $Z_7 = 86$ km, a form of eq (22) shows that T_7 has a value 186.8673 K, i.e., 0.0787 K smaller than that of T_M at that height.

At heights above 86 km, values of T_M are no longer defined, and geopotential is no longer the primary argument. Instead, the temperature-altitude profile is defined in terms of four successive functions, each of which is specified in such a way that the first derivative of T with respect to Z is continuous over the entire altitude region, 86 to 1000 km. These four functions begin successively at the first four base heights, Z_b listed in table 5, and are designed to represent the following conditions:

- A. An isothermal layer from 86 to 91 km;
- B. A layer in which $T(Z)$ has the form of an ellipse from 91 to 110 km;
- C. A constant, positive-gradient layer from 110 to 120 km; and
- D. A layer in which T increases exponentially toward an asymptote, as Z increases from 120 to 1000 km.

86 to 91 km

For the layer from $Z_7 = 86$ km to $Z_8 = 91$ km, the temperature-altitude function is defined to be isothermally linear with respect to geometric altitude, so that the gradient of T with respect to Z is zero (see table 5). Thus, the standard form of the linear function, which is

$$T = T_b + L_{K,b} \cdot (Z - Z_b) \quad (24)$$

degenerates to

$$T = T_7 = 186.8673 \text{ K} \quad (25)$$

and by definition

$$\frac{dT}{dZ} = 0.0 \text{ K/km.} \quad (26)$$

The value of T_7 is derived from one version of eq (22) in which T_M is replaced by T_{M7} , a value determined in 1.2.5 above, and in which M/M_0 is replaced by M_7/M_0 with a value of 0.9995788 in accordance with values of M_0 and M_7 discussed in 1.3.3 below. Since T is defined to be constant for the

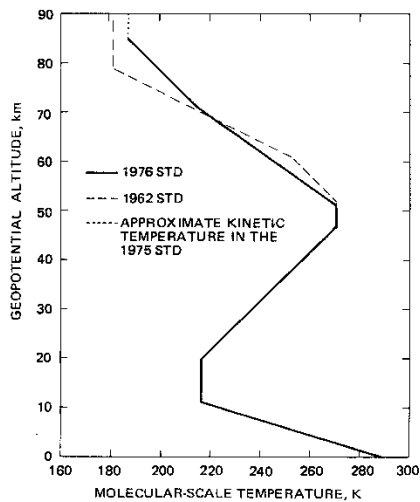


Figure 3. Molecular-scale temperature as a function of geopotential altitude

REPRODUCIBILITY OF THE
ORIGINAL PAGE IS POOR

entire layer, Z_7 to Z_8 , the temperature at Z_8 is $T_8 = T_7 = 186.8673$ K, and the gradient dT/dZ at Z_8 is $L_{K,8} = 0.0$ K/km, the same as for $L_{K,7}$. 91 to 110 km

For the layer $Z_8 = 91$ km to $Z_9 = 110$ km, the temperature-altitude function is defined to be a segment of an ellipse expressed by

$$T = T_c + A \cdot \left[1 - \left(\frac{Z - Z_8}{a} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (27)$$

where

$T_c = 263.1905$ K, $A = -76.3232$ K, $a = -19.9429$ km, and Z is limited to values from 91 to 110 km.

Eq (27) is derived in Appendix B from the basic equation for an ellipse, to meet the values of T_8 and $L_{K,8}$ derived above, as well as the defined values $T_9 = 240.0$ K, and $L_{K,9} = 12.0$ K/km, for $Z_9 = 110$ km.

The expression for dT/dZ related to eq (27) is

$$\frac{dT}{dZ} = \frac{-A}{a} \cdot \left(\frac{Z - Z_8}{a} \right) \cdot \left[1 - \left(\frac{Z - Z_8}{a} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (28)$$

110 to 120 km

For the layer $Z_9 = 110$ km to $Z_{10} = 120$ km, $T(Z)$ has the form of (24), where subscript b is 9, such that T_9 and $L_{K,9}$ are, respectively, the defined quantities T_9 and $L_{K,9}$, while Z is limited to the range 110 to 120 km. Thus,

$$T = T_9 + L_{K,9} (Z - Z_9) \quad (29)$$

and

$$\frac{dT}{dZ} = L_{K,9} = 12.0 \text{ K/km.} \quad (30)$$

Since dT/dZ is constant over the entire layer, $L_{K,10}$, the value of dT/dZ at Z_{10} , is identical to $L_{K,9}$, i.e., 12.0 K/km, while the value of T_{10} at Z_{10} is found from eq (29) to be 360.0 K.

120 to 1000 km

For the layer $Z_{10} = 120$ to $Z_{12} = 1000$ km, $T(Z)$ is defined to have the exponential form (Walker 1965)

$$T = T_\infty - (T_\infty - T_{10}) \cdot \exp(-\lambda \xi) \quad (31)$$

such that

$$\frac{dT}{dZ} = \lambda \cdot (T_\infty - T_{10}) \cdot \left(\frac{r_0 + Z_{10}}{r_0 + Z} \right)^2 \cdot \exp(-\lambda \cdot \xi) \quad (32)$$

where

$$\lambda = L_{K,9} / (T_\infty - T_{10}) = 0.01875, \text{ and} \\ \xi = \xi(Z) = (Z - Z_{10}) \cdot (r_0 + Z_{10}) / (r_0 + Z).$$

In the above expressions, T_∞ equals the defined value 1000 K. A graph of T versus Z from 0.0 to 1000 km altitude is given in figure 4. The upper portion of this profile was selected by Task Group III to be consistent with satellite drag data (Jacchia

1971), while the mid-portion, particularly between 86 and 200 km and the overlap to 450 km was selected by Task Group II (Minzner et al. 1974) to be consistent with observed temperature and satellite observations of composition data (Hedin et al. 1972).

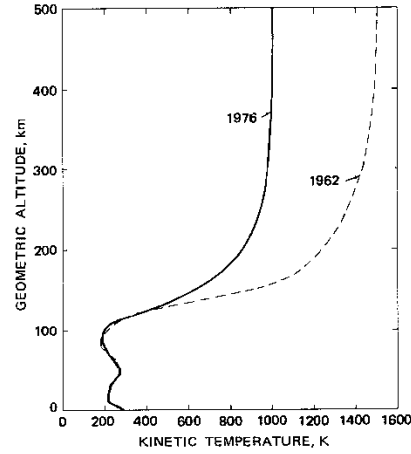


Figure 4. Kinetic temperature as a function of geometric altitude

1.3 COMPUTATIONAL EQUATIONS

The tables of this Standard have been computed in two height regions, 0 to 84.852 km' (86 km), and 86 to 1000 km, because the computations for each region are based on compatible but different sets of initial conditions. These two different sets of initial conditions lead to two different computational procedures. Consequently, the following discussion of computational equations, which is presented according to a series of atmospheric parameters, does not necessarily follow in the order in which the calculation is actually performed for each altitude region. The equations used for computing the various properties of the atmosphere for altitudes below 86 km are, with certain noted exceptions, equivalent to those used in the 1962 standard, and the various equations involving T_H came from expressions used in the ARDC Model Atmosphere, 1956 (Minzner and Ripley 1956).

1.3.1 PRESSURE.—Three different equations are used for computing pressure P in various height regimes of this Standard. One of these equations applies to heights above 86 km, while the other two apply to the height regime from the surface up to 86 km, within which the argument of the computation is geopotential. Consequently, expressions for

computing pressure as a function of geopotential altitude stem from the integration of eq (5) after replacing $g \cdot dZ$ by its equivalent $g_0' dH$ from eq (16), and after replacing the ratio M/T by its equivalent, M_0/T_0 in accordance with eq (22). Two forms result from this integration, one for the case when $L_{M,b}$ for a particular layer is not equal to zero, and the other when the value $L_{M,b}$ is zero. The first of these two expressions is

$$P = P_b \cdot \left[\frac{T_{M,b}}{T_{M,b} + L_{M,b} \cdot (H - H_b)} \right]^{[g_0' \cdot M_0 / (R^* \cdot L_{M,b})]} \quad (33a)$$

and the latter is

$$P = P_b \cdot \exp \left[- \frac{g_0' \cdot M_0 \cdot (H - H_b)}{R^* \cdot T_{M,b}} \right] \quad (33b)$$

In these equations g_0' , M_0 , and R^* are each defined single-valued constants, while $L_{M,b}$ and H_b are each defined multi-valued constants in accordance with the value of b as indicated in table 4. The quantity $T_{M,b}$ is a multi-valued constant dependent on $L_{M,b}$ and H_b . The reference-level value for P_b for $b = 0$ is the defined sea-level value, $P_0 = 101325.0 \text{ N/m}^2$ (1013.250 mb). Values of P_b for $b = 1$ through $b = 6$ are obtained from the application of the appropriate member of the pair eq (33a) and (33b) for the case when $H = H_{b+1}$.

These two equations yield the pressure for any desired geopotential altitude from sea level to H_7 , where H_7 is the geopotential altitude corresponding to the geometric altitude $Z_7 = 86 \text{ km}$. Pressures for H from 0 to -5 km may also be computed from eq (33a) when subscript b is zero.

For Z equal to 86 km and above, the value of pressure is computed as a function of geometric altitude Z , and involves the altitude profile of kinetic temperature T rather than that of T_M , in an expression in which the total pressure P is equal to the sum of the partial pressures for the individual species as expressed by eq (3). Thus, for $Z = 86$ to 1000 km,

$$P = \Sigma P_i = \Sigma n_i \cdot k \cdot T = \frac{\Sigma n_i \cdot R^* \cdot T}{N_A} \quad (33c)$$

In this expression

- k = the Boltzmann constant, defined in table 2a,
- T = $T(Z)$ defined in eq (25), (27), (29), and (31) for successive layers, and
- Σn_i = the sum of the number densities of the individual gas species comprising the atmosphere at altitude Z above 86 km, as described below.

Neither n_i , the number densities of individual species, nor Σn_i , the sum of the individual number densities, is known directly. Consequently, pressures above 86 km cannot be computed without first de-

termining n_i for each of the significant gas species.

1.3.2 NUMBER DENSITY OF INDIVIDUAL SPECIES.—The values of n_i , the number densities of individual species, have not been presented in the detailed tables of this Standard for low altitudes where it is assumed that complete mixing keeps F_i , the fractional concentrations of the individual species, at the sea-level value. For altitudes below 80 km, the altitude profile of number density for any particular major species i is equal to F_i times the altitude profile of the total number density N , a quantity which is tabulated in this Standard, in accordance with eq (41) below. Thus, for $Z < 80 \text{ km}$,

$$n_i = F_i \cdot N \quad (34)$$

where values of F_i for the various species are defined in table 3. For altitudes between 80 and 86 km, the value of n_i determined by eq (34) and the tabulated values of N will need to be increased by the factor M_0/M to be rigorously correct in accordance with the discussion in 1.2.4. At altitudes above 86 km, however, the model assumes the existence of various processes which lead to particular differing height variations in the number-density values of several individual species, N_2 , O , O_2 , Ar , He , and H , each governed by eq (6). Ideally, the set of equations eq (6), each member of which is associated with a particular species, should be solved simultaneously, since the number densities of all the species are coupled through the expressions for molecular diffusion which are included in eq (6). Such a solution would require an inordinate amount of computation, however, and a simpler approach was desired. This was achieved with negligible loss of validity by some simplifying approximations, and by calculating the number densities of individual species one at a time in the order $n(N_2)$, $n(O)$, $n(O_2)$, $n(Ar)$, $n(He)$, and $n(H)$. For all species except hydrogen (which is discussed in the section on atomic hydrogen) we divide eq (6) by n_i , and integrate directly to obtain the following set of simultaneous equations, one for each gas species:

$$n_i = n_{i,7} \cdot \frac{T_7}{T} \cdot \exp \left\{ - \int_{Z_7}^Z \left[f(Z) + \left(\frac{v_i}{D_i + K} \right) \right] dZ \right\} \quad (35)$$

In this set of equations

- $n_{i,7}$ = the set of species-dependent, number-density values for $Z = Z_7 = 86 \text{ km}$, one member for each of the five designated species, as derived in Appendix A and listed in table 9,
- T_7 = 186.8673 K, the value of T at Z_7 , as specified in eq (25),
- T = $T(Z)$ defined in eq (25), (27), (29), and (31) for the appropriate altitude regions.

$f(Z)$ = the function written as eq (36) below, and

$\frac{v_i}{D_i + K}$ = the set of empirical functions written as eq (37) below:

For $f(Z)$ we have

$$f(Z) = \frac{g}{R^* \cdot T} \cdot \left(\frac{D_i}{D_i + K} \right) \cdot \left[M_i + \frac{M \cdot K}{D_i} + \alpha_i \cdot \frac{R^*}{g} \cdot \frac{dT}{dZ} \right] \quad (36)$$

TABLE 9.—Number densities of various species at 86-km altitude

Species	Number density (m ⁻³)
N ₂	1.129794×10^{25}
O	8.6×10^{18}
O ₂	3.030898×10^{19}
Ar	1.351400×10^{18}
He	7.5817×10^{19}

where

D_i = $D_i(Z)$ as defined by eq (8) for the i th species,

K = $K(Z)$ as defined by eq (7a), (7b), and (7c),

M_i = the molecular weight of the i th species as defined in table 3,

α_i = the thermal diffusion coefficient for the i th species as defined in table 4,

dT/dZ = one of eq (26), (28), (30), or (32), as appropriate to the altitude region, and

M = $M(Z)$ with special considerations mentioned below.

For $[v_i/(D_i + K)]$ we have the following set of empirical expressions.

$$\frac{v_i}{D_i + K} = Q_i \cdot (Z - U_i)^2 \cdot \exp[-W_i \cdot (Z - U_i)^3] + q_i \cdot (u_i - Z)^2 \cdot \exp[-w_i \cdot (u_i - Z)^3]. \quad (37)$$

This set of equations, while representing a function of both D_i and K , involves a series of six other coefficients which, for each of four species, have been empirically selected to adjust the number-density profile of the related species to particular values in agreement with observations. The defined values of the six sets of species-dependent coefficients, Q_i , q_i , U_i , u_i , W_i , and w_i used in eq (37) are listed in table 7. The values of q_i and U_i were selected so that for O₂, Ar, and He, the quantity $v_i/(D_i + K)$ becomes zero at exactly 86 km. For atomic oxygen, however, all six of these coefficients contribute to maximizing this quantity for $Z = 86$ km.

Molecular Nitrogen.—Molecular nitrogen (N₂) is the first species for which n is calculated since, on the average, the distribution of N₂ is close to that for static equilibrium, and hence, for this species, we may neglect the transport velocity, thereby eliminating the term $[v_i/(D_i + K)]$ from that version of eq (35) applying to N₂. This species is dominant up to and above the turbopause, and its molecular weight is close to the mean molecular weight in the lower thermosphere, where mixing still dominates the distribution process. We approximate the effect of mixing up to 100 km by two additional adjustments to eq (35), both adjustments implicit in $f(Z)$; i.e., neglecting K and replacing M_i by the mean molecular weight M which, for the altitude region, 86 to 100 km, is approximated by M_0 . With these three adjustments, that version of eq (35) applying to N₂ reduces to

$$n(N_2) = n(N_2)_7 \cdot \frac{T_7}{T} \cdot \exp \left\{ - \int_{Z_7}^Z \frac{M \cdot g}{Z_7 \cdot R^* \cdot T} \cdot dZ \right\} \quad (38)$$

where

$M = M_0$ for $Z \leq 100$ km, and

$M = M(N_2)$ for $Z > 100$ km.

Figure 5 shows a graph of $n(N_2)$ versus Z .

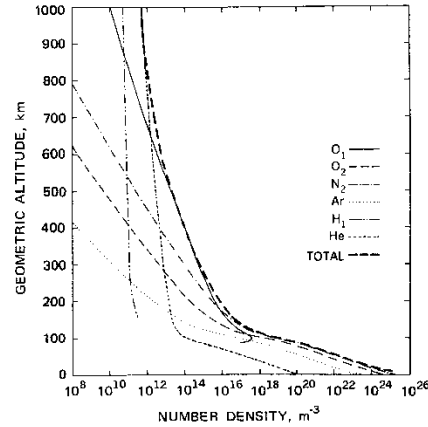


Figure 5. Number density of individual species and total number density as a function of geometric altitude

The species O, O₂, Ar, and He.—As noted above, after the calculation of $n(N_2)$ has been performed, the values of n_i for the next four species are calculated from eq (35) in the order O, O₂, Ar, and He.

In the case of O and O₂, the problem of mutual diffusion is simplified by considering N₂ as the stationary background gas (as described in the previous section). For Ar and He, which are minor constituents in the lower thermosphere, it is more realistic to use the sum of the number densities of N₂, O, and O₂ as the background gas in evaluating the molecular-diffusion coefficient D_i , and the mean-molecular weight M , except below 100 km, where M is taken to be the sea-level value M_0 . This latter choice is to maintain consistency with the method for calculating $n(N_2)$.

In eq (37), defining $[v_i/(D_i + K)]$, the coefficients Q_i , q_i , U_i , u_i , W_i , and w_i , which, except for q_i , are constant for a particular species, are each adjusted such that appropriate densities are obtained at 450 km for O and He, and at 150 km for O, O₂, He, and Ar. The constant q_i , and hence the second term of eq (37) is zero for all species except atomic oxygen, and is also zero for atomic oxygen above 97 km; the extra term for atomic oxygen is needed below 97 km to generate a maximum in the density-height profile at the selected height of 97 km. This maximum results from the increased loss of atomic oxygen by recombination at lower altitudes. The flux terms for O and O₂ are based on, and lead (qualitatively) to the same results as those derived from the much more detailed calculations by Colegrove et al. (1965), and Keneshea and Zimmerman (1970).

A further computational simplification is realized above 115 km where the eddy diffusion coefficient becomes zero. For these altitudes, the set of equations represented by eq (35) becomes uncoupled, and each member reduces to the sum of the barometric equation for the particular species plus the thermal-diffusion term and the velocity term. In the case of O, O₂, and Ar, the thermal diffusion term is zero. Also, as will be seen in Part 2, the velocity term $[v_i/(D_i + K)]$, becomes small above 120 km and, with the exception of atomic hydrogen, each species considered is nearly in diffusive equilibrium at these heights. For the present model, however, this situation becomes exactly true only at altitudes above 150 km.

The altitude profile of number density for each of the species O, O₂, Ar, and He is given in figure 5, along with that for N₂.

Atomic Hydrogen.—For various reasons, the height distribution of the number density of atomic hydrogen $n(H)$ is defined only for heights from 150 to 1000 km. Below 150 km, the concentration of H is negligible compared with the concentrations of O, O₂, Ar, and He. The defining expression for $n(H)$, like the expression for $n(N_2)$, $n(O)$, etc., is derived from eq (6). The solution for $n(H)$, however, is expressed in terms of the vertical flux $n(H) \cdot v(H)$, represented by ϕ , rather than in

terms of $v(H)$, because it is the flux which is considered known for H. In this model only that contribution to ϕ due to planetary escape from the exosphere is considered.

Since K is zero, for the altitude region of interest, the particular version of eq (6) applied to H is correspondingly simplified, and one possible solution to the resulting expression is

$$n(H) = \left[n(H)_{11} - \int_{Z_{11}}^Z \frac{\phi}{D(H)} \cdot \left(\frac{T}{T_{11}} \right)^{1 + \alpha(H)} \cdot (\exp \tau) \cdot dZ \right] \cdot \left(\frac{T_{11}}{T} \right)^{1 + \alpha(H)} \cdot (\exp -\tau) \quad (39)$$

where

$n(H)_{11} = 8.0 \times 10^{10} \text{ m}^{-3}$, the number density of H at $Z_{11} = 500$ km, as defined in table 2,

$D(H)$ = The molecular diffusion coefficient for hydrogen given by eq (8) in which the values of a_i and b_i for hydrogen are as defined in table 6,

$\phi = 7.2 \times 10^{11} \text{ m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$, the vertical flux of H, as defined in table 2,

$T = T(Z)$ as specified by eq (31),

$T_{11} = 999.2356 \text{ K}$, the temperature derived from eq (31) for $z = Z_{11}$,

$\alpha(H)$ = The thermal diffusion coefficient for H, -0.25 (dimensionless), as defined in table 6, and

$\tau = \tau(Z)$ defined in eq (40) below.

$$\tau = \int_{Z_{11}}^Z \frac{g \cdot M(H)}{R^* \cdot T} \cdot dZ. \quad (40)$$

Because $D(H)$ becomes very large compared with ϕ for heights above 500 km, the value of the integral term in eq (39) can be neglected at these heights, and atomic hydrogen is then essentially in diffusive equilibrium. Figure 5 depicts the graph of $n(H)$ as a function of Z .

Eq (35) through (39) permit the calculation of the number densities of the species N₂, O, O₂, Ar, He, and H, for heights above 150 km, and of the first five of these species for heights between 86 and 150 km, where $n(H)$ is insignificant compared with $n(N_2)$. These number densities permit the calculation of several atmospheric parameters in the height region 86 to 1000 km. The first is mean molecular weight using eq (20). These values of M , along with those implicit in table 8, for Z from 80 to 86 km, plus the invariant value, M_0 , for heights from 0 to 80 km, are shown in figure 6.

The number densities of the several species also permit us now to compute total pressure for heights

from 86 to 1000 km, using eq (33c). Figure 7 depicts these values as well as those for heights below 86 km computed from eq (33a) and (33b). Finally, these individual number densities permit the calculation of total number density, $N = \sum n_i$, at least at heights of 86 to 1000 km.

1.3.3. TOTAL NUMBER DENSITY.—From eq (2), (22), and (33c) it is apparent that total number density N , the number of neutral atmospheric gas particles per unit volume of the atmosphere may be expressed in any one of the three equivalent forms following:

$$N = \frac{M_0 \cdot N_A \cdot P}{T_M \cdot R^* \cdot M} = \frac{N_A \cdot P}{R^* \cdot T} = \sum n_i. \quad (41)$$

The three forms are selected to satisfy three types of calculations: (a) Those depending upon values of T_M , (b) Those depending upon values of T , and (c) Those depending upon values of $\sum n_i$. This format will be followed in specifying the computational equations, insofar as possible, for the balance of the quantities discussed in this section. A graph of the altitude variation of N is presented in figure 5, along with the number densities of individual species. That portion of (41) involving T_M is of particular interest in calculating N for heights from 0 to 86 km.

1.3.4. MASS DENSITY.—From eq (1), (22), and (33c) one may write the following three forms of computational equations for mass density ρ :

$$\rho = \frac{P \cdot M_0}{R^* \cdot T_M} = \frac{P \cdot M}{R^* \cdot T} = \frac{\sum (n_i \cdot M_i)}{N_A}. \quad (42)$$

The altitude-dependent variations of this quantity are shown in figure 7 along with those of pressure.

1.3.5. MOLE VOLUME.—Mole volume v_m of air is defined as the volume of one mole of air, where one mole of air is the amount consisting of a number of neutral particles equal to N_A . In SI units, the quantity v_m should specify the number of cubic meters containing one kilomole of air. Since M has the dimensions of $kg/kmol$, and ρ has the dimensions of kg/m^3 , the ratio M/ρ , with the units $m^3/kmol$, provides the definition of mole volume. In terms of eq (1), (22), and (33c), this ratio may be equated to the following series of expressions:

$$v_m = \frac{R^* \cdot M \cdot T_M}{M_0 \cdot P} = \frac{R^* \cdot T}{P} = \frac{N_A}{\sum n_i}. \quad (43)$$

This quantity, while not tabulated in this Standard, is shown graphically in figure 8.

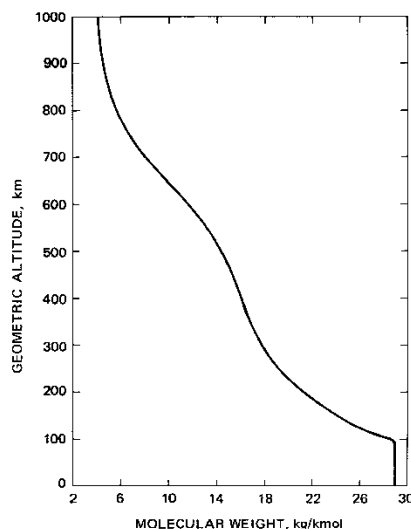


Figure 6. Mean molecular weight as a function of geometric altitude

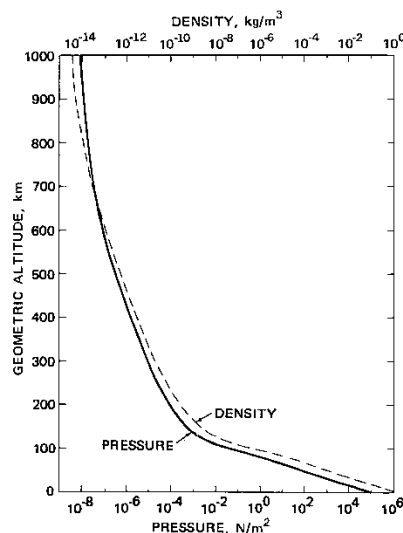


Figure 7. Total pressure and mass density as a function of geometric altitude

1.3.6 SCALE HEIGHT

Pressure Scale Height.—The quantity $H_p R^* \cdot T / (g \cdot M)$, which has dimensions of length, is a quantity commonly associated with the concept of scale height, and is the defining form of pressure scale height H_p used in this model, such that with eq (20) and (22) we may write

$$H_p = \frac{R^* \cdot T_M}{g \cdot M_0} = \frac{R^* \cdot T}{g \cdot M} = \frac{R^* \cdot T \cdot \sum n_i}{g \cdot \sum (n_i \cdot N_i)} \quad (44)$$

The reciprocal of this quantity, which appears on the right-hand side of eq (5) is seen to equal the slope of the function $\ln P$ versus Z at height Z in the regions where hydrostatic equilibrium or diffusive equilibrium holds. In the present model, this condition is true for heights below 80 km (complete mixing) and essentially true above approximately 120 km, where diffusive equilibrium is nearly satisfied and where each individual species is governed by eq (4).

In the region 80 to 120 km, where the transition from a completely mixed atmosphere to one in diffusive equilibrium takes place, the situation is complicated by the competition between three processes: molecular diffusion, eddy diffusion, and dissociation of molecular oxygen. These processes result in a vertical transport, such that eq (4) and (5) are no longer exactly true in this 40-km layer. Since molecular nitrogen is the dominant

species in this altitude range, however, and since this species has a zero transport velocity in this model, the pressure scale height is still a good indicator of the rate of change of the pressure in this height region.

It should be noted that eq (4) and (5) also become invalid at very high altitudes (the exospheric region) due to the infrequent collisions between neutral particles. Thus, in this region, the significance of H_p as a measure of $d \ln P / dZ$ again loses validity.

In eq (44) both g and T_M or all three of g , T , and M are functions of Z , such that H_p is the local value of geometric pressure scale height.

This quantity, which is the particular scale height tabulated in this Standard, and which is plotted in figure 9, is frequently but incorrectly associated with the altitude increment over which the pressure decreases by exactly a factor of $1/e$. The conditions necessary for the pressure to decrease by exactly that factor over an altitude increase of a single pressure scale height, would be for the variables T , g , and M all to remain constant over that altitude interval. Since g may never be constant over any altitude interval, this particular concept of pressure decrease can rarely if ever apply exactly to H_p .

Density Scale Height.—Because of the relationship between H_p and the slope of $\ln P$ versus Z , it is convenient to apply the name geometric den-

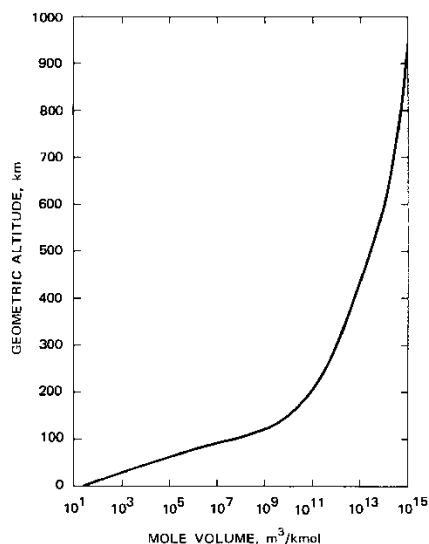


Figure 8. Mole volume as a function of geometric altitude

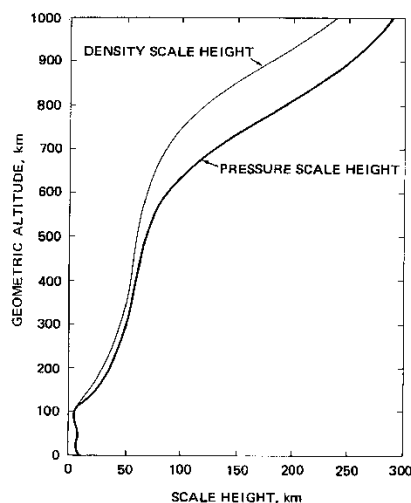


Figure 9. Pressure scale height and density scale height as a function of geometric altitude

sity scale height H_p to the negative reciprocal of the slope of $\ln p$ versus Z . Using the equation of state to relate $d\ln p$ to $d\ln P$, one may define

$$H_p = \frac{H_p}{1 + H_p \cdot \left(\frac{d\ln T_u}{dZ} \right)} = \frac{H_p}{1 + H_p \cdot \left(\frac{d\ln T}{dZ} - \frac{d\ln M}{dZ} \right)} \quad (45)$$

The relationships implied between H_p and $d\ln p/dZ$ are subject to the same limitations as those between H_p and $d\ln P/dZ$ expressed above, i.e., H_p is only an approximation to $(d\ln p/dZ)^{-1}$ between 80 and 120 km, and in the exosphere, where the approximation becomes less valid with increasing altitude.

Within these limitations it is apparent that in layers where T_u does not change with changing altitude, i.e., where $(d\ln T_u/dZ) = 0$, H_p is equal to H_p . Within such layers, the slope of $\ln p$ versus Z , at any particular altitude Z , is identical to the slope of $\ln P$ versus Z .

While density scale height is not tabulated in this Standard, values of this quantity are shown graphically with H_p in figure 9.

1.3.7 MEAN AIR-PARTICLE SPEED.—The mean air-particle speed V is the arithmetic average of the speeds of all air particles in the volume element being considered. All particles are considered to be neutral. For a valid average to occur, there must, of course, be a sufficient number of particles involved to represent mean conditions. Pressure and temperature gradients within the volume must also be negligible. The analytical expression for V is closely related to that for the speed of sound, and is proportional to the ratio T/M . Thus, in terms of eq (20) and (22), we write

$$V = \left[\frac{8 \cdot R^* \cdot T_u}{\pi \cdot M_0} \right]^{1/2} = \left[\frac{8 \cdot R^* \cdot T}{\pi \cdot M} \right]^{1/2} = \left[\frac{8 \cdot R^* \cdot T \cdot \sum n_i}{\pi \cdot \sum (n_i \cdot M_i)} \right]^{1/2} \quad (46)$$

The variation of particle speed with geometric altitude is shown in figure 10.

1.3.8 MEAN FREE PATH.—The mean free path L is the mean value of the distances traveled by each of the neutral particles, in a selected volume, between successive collisions with other particles in that volume. As in the case of V , a meaningful average requires that the selected volume be big enough to contain a large number of particles. The computational form for L is

$$L = \frac{2^{1/2} \cdot R^* \cdot M \cdot T_u}{2\pi \cdot N_A \cdot \sigma^2 \cdot M_0 \cdot P} = \frac{2^{1/2} \cdot R^* \cdot T}{2\pi \cdot N_A \cdot \sigma^2 \cdot P} = \frac{2^{1/2}}{2\pi \cdot \sigma^2 \cdot \sum n_i} \quad (47)$$

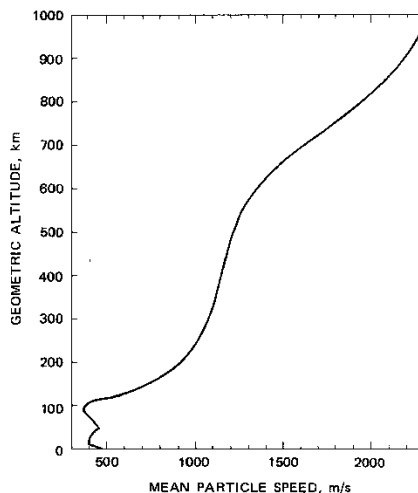


Figure 10. Mean air-particle speed as a function of geometric altitude

where σ is the effective collision diameter of the mean air molecules. The adopted value of σ , i.e., 3.65×10^{-10} m is suitable for that part of the atmosphere below about 86 km, which is dominated by N_2 and O_2 . Above this height, the value of σ , which depends upon composition in a complicated manner, begins to change significantly so that tabulations with four significant figures are no longer valid. At great altitudes, this expression for L is valid only under assumptions that hold M , T_u , P , and σ constant throughout the volume used. Figure 11 depicts the mean free path in terms of altitude.

1.3.9 MEAN COLLISION FREQUENCY.—The mean collision frequency ν is the average speed of the air particles within a selected volume divided by the mean free path L of the particles within that volume. That is,

$$\nu = \frac{V}{L} \quad (48)$$

and in computational form:

$$\begin{aligned} \nu &= 4N_A \cdot \sigma^2 \cdot \left[\frac{\pi \cdot M_0 \cdot P^2}{R^* \cdot M^2 \cdot T_u} \right]^{1/2} \\ &= 4N_A \cdot \sigma^2 \cdot \left[\frac{\pi \cdot P^2}{R^* \cdot M \cdot T} \right]^{1/2} \\ &= 4N_A \cdot \sigma^2 \cdot \left[\frac{\pi \cdot P^2 \cdot \sum n_i}{R^* \cdot T \cdot \sum (n_i \cdot M_i)} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (49)$$

Note that σ is again involved in this quantity, and hence ν has limitations similar to those of mean

free path. The foregoing expressions are taken to apply to neutral particles only, since no considerations involving charged particles are introduced for purposes of developing the tables and graphs of this standard.

Figure 12 graphically displays the variation of collision frequency with altitude. See section 1.3.7 for a discussion of the assumptions under which eq (49) is valid at great altitudes.

1.3.10 SPEED OF SOUND.—The expression adopted for the speed of sound C_s is

$$C_s = \left(\gamma \cdot \frac{R^* \cdot T_M}{M_0} \right)^{1/2} \quad (50)$$

where γ is the ratio of specific heat of air at constant pressure to that at constant volume; and is taken to be 1.40 exact (dimensionless), as defined in table 2. Eq (50) for speed of sound applies only when the sound wave is a small perturbation on the ambient condition. Calculated values for C_s have been found to vary slightly from experimentally determined values.

The limitations of the concept of speed of sound due to extreme attenuation are also of concern. The attenuation which exists at sea level for high frequencies applies to successively lower frequencies as atmospheric pressure decreases, or as the mean free path increases. For this reason, the concept of speed of sound (except for frequencies approaching zero) progressively loses its range of applicability at high altitudes. Hence, the main tables listing the values for speed of sound terminate at 86

km. Figure 13 shows the variation with altitude of the computed speed of sound.

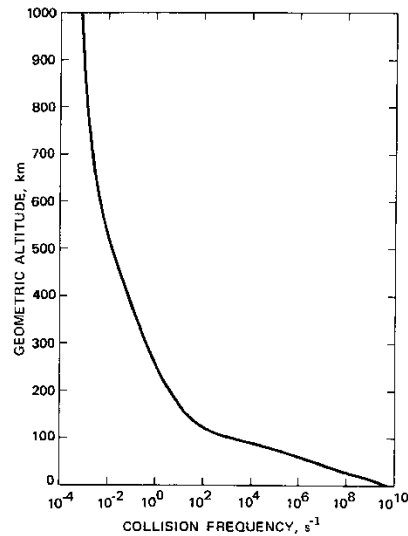


Figure 12. Collision frequency as a function of geometric altitude

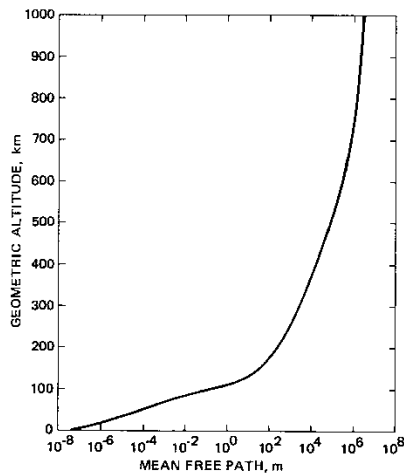


Figure 11. Mean free path as a function of geometric altitude

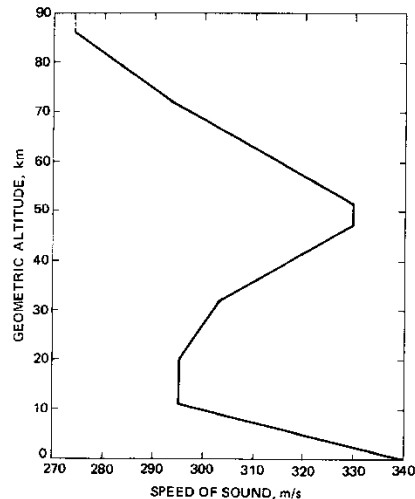


Figure 13. Speed of sound as a function of geometric altitude

REPRODUCIBILITY OF THE
ORIGINAL PAGE IS POOR

1.3.11 DYNAMIC VISCOSITY.—The coefficient of dynamic viscosity μ ($\text{N} \cdot \text{s}/\text{m}^2$) is defined as a coefficient of internal friction developed where gas regions move adjacent to each other at different velocities. The following expression, basically from kinetic theory, but with constants derived from experiment, is used for computation of the tables:

$$\mu = \frac{\beta \cdot T^{3/2}}{T + S} \quad (51)$$

In this equation β is a constant equal to $1.458 \times 10^{-6} \text{ kg}/(\text{s} \cdot \text{m} \cdot \text{K}^{1/2})$ and S is Sutherland's constant, equal to 110.4 K, both defined in table 2B. Because of the empirical nature of this equation, no attempt has been made to transform it into one involving T_μ .

Eq (51) fails for conditions of very high and very low temperatures, and under conditions occurring at great altitudes. Consequently, tabular entries for coefficient of dynamic viscosity are terminated at 86 km. For these reasons caution is necessary in making measurements involving probes and other objects which are small with respect to the mean free path of molecules particularly in the region of 32 to 86 km.

The variation of dynamic viscosity with altitude is shown in figure 14.

1.3.12 KINEMATIC VISCOSITY.—Kinematic viscosity η is defined as the ratio of the dynamic viscosity of a gas to the density of that gas; that is,

$$\eta = \frac{\mu}{\rho} \quad (52)$$

Limitations of this equation are comparable to those associated with dynamic viscosity, and consequently tabular entries of kinematic viscosity are also terminated at the 86-km level. See figure 15 for a graphical representation of the variation of kinematic viscosity with altitude.

1.3.13 COEFFICIENT OF THERMAL CONDUCTIVITY.—The empirical expression adopted for purposes of developing tabular values of the coefficient of thermal conductivity k_t for heights up to the 86-km level is as follows:

$$k_t = \frac{2.64638 \times 10^{-3} \cdot T^{3/2}}{T + 245.4 \times 10^{-(12/T)}} \quad (53)$$

This expression differs from that used in the U. S. Standard Atmosphere, 1962 in that the numerical constant has been adjusted to accommodate a conversion of the related energy unit from the temperature-dependent kilogram calorie to the invariant joule. Thus, the values of k_t in units of $\text{J}/(\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{K})$ or $\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})$ are greater than the values of k_t in units of $\text{kcal}/(\text{m} \cdot \text{s} \cdot \text{K})$ by a factor of exactly 4.18580×10^3 , when the kilocalorie is assumed to be the one for 15°C . Kinetic-theory de-

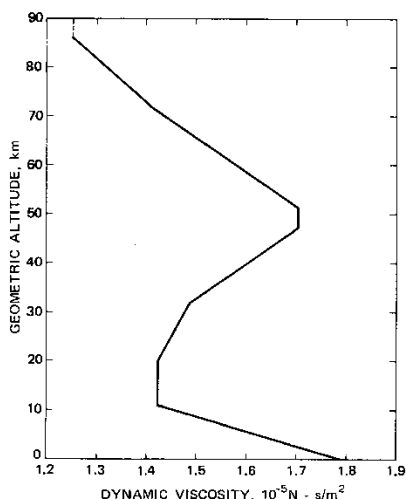


Figure 14. Dynamic viscosity as a function of geometric altitude

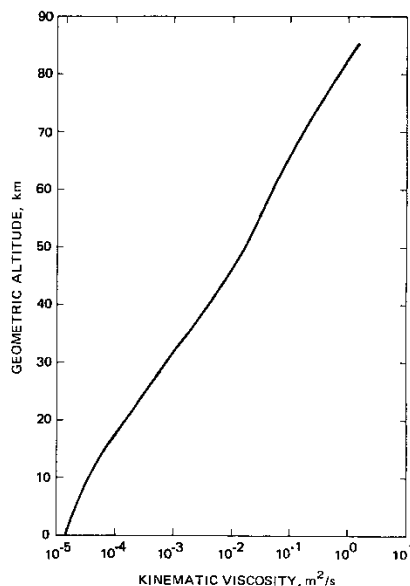


Figure 15. Kinematic viscosity as a function of geometric altitude

terminations of thermal conductivity of some monatomic gases agree well with observation. For these gases thermal conductivity is directly proportional to the dynamic viscosity. Modification of the simple theory has accounted in part for differences introduced by polyatomic molecules and by mixtures of gases. Tabular entry of values for coefficient of thermal conductivity is terminated at 86 km. The variation with height of this quantity is shown in figure 16.

1.4 SELECTED TABULAR VALUES OF ATMOSPHERIC PROPERTIES AND CONVERSION FACTORS FOR METRIC TO ENGLISH UNITS

1.4.1 SEA-LEVEL VALUES.—The sea-level values of fifteen of the atmospheric properties discussed in this Standard are listed in table 10. The sea-level values for g , P , and T are defined quantities; the remainder are quantities calculated from the preceding equations.

1.4.2 CONVERSION OF METRIC TO ENGLISH UNITS.—For those who have a need to work in the English System of units, the conversion factors

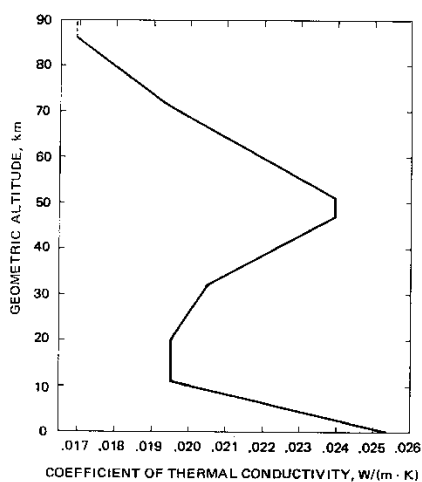


Figure 16. Coefficient of thermal conductivity as a function of geometric altitude

listed in table 11 are applicable to the atmospheric parameters tabulated or shown graphically in this Standard. For other transformations, see Mechtly (1973).

TABLE 10.—Sea-level values of atmospheric properties

Symbol	Sea-level value
$C_{s,0}$	$3.40294 \times 10^7 \text{ m/s}$
g_0	9.80665 m/s^2
$H_{r,s}$	$8.4345 \times 10^7 \text{ m}$
$k_{1,s}$	$2.5326 \times 10^{-5} \text{ J/(s}\cdot\text{m}\cdot\text{K) or W/(m}\cdot\text{K)}$
L_s	$6.6328 \times 10^{-5} \text{ m}$
$V_{m,s}$	$2.3643 \times 10^4 \text{ m}^3/\text{kmol}$
M_0	$2.89644 \times 10^4 \text{ kg/kmol}$
N_s	$2.5470 \times 10^{25} \text{ m}^{-3}$
P_0	$1.01325 \times 10^5 \text{ N/m}^2$
T_0	$2.8815 \times 10^2 \text{ K}$
V_s	$4.5894 \times 10^2 \text{ m/s}$
η_0	$1.4607 \times 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$
μ_0	$1.7894 \times 10^{-3} \text{ kg/(m}\cdot\text{s)}$
ν_0	$6.9193 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$
ρ_0	1.2250 kg/m^3

TABLE 11.—Metric to English conversion factors for properties of The U. S. Standard Atmosphere, 1976

Symbol	To convert from metric units	to English units	divide by
C_s	m/s	ft/s	$3.048^* \times 10^{-1}$
g	m/s ²	ft/s ²	$3.048^* \times 10^{-1}$
H_p	m	ft	$3.048^* \times 10^{-1}$
k_1	W/(m·K)	BTU/(ft·s·°R)	$6.226477504 \times 10^{-5}$
L	m	ft	$3.048^* \times 10^{-1}$
v_m	m ³ /kmol	ft ³ /lbmol	$6.242796057 \times 10^{-3}$
M	kg/kmol	lb/lbmol	1.000*
N	m ⁻³	ft ⁻³	3.531466672×10^2
P	mb	in Hg (32°F)	3.386389×10^1
T or T_m	K	°R	5/9*
V	m/s	ft/s	$3.048^* \times 10^{-1}$
η	m ² /s	ft ² /s	9.290304×10^{-20}
μ	N·s/m ²	lb/(ft·s)	1.488163944
ν	s ⁻¹	s ⁻¹	1.000*
ρ	kg/m ³	lb/ft ³	1.6018463×10^1

*exact definition

PART 2

Atmospheric Model

2.0 INTRODUCTION

In September 1971 The COESA Working Group reviewed the temperature and density data derived from recent satellite and rocket observations. This review revealed a need to revise the *U.S. Standard Atmosphere, 1962* (COESA 1962) at altitudes above 50 km. Data available for levels below 50 km were found to be in reasonably good agreement with the 1962 Standard.

2.1 MODEL AND DATA FOR ALTITUDES UP TO 86 KM

The number of available observations between 50 and 86 km on which to base a mean annual temperature-altitude profile for 45°N is still relatively small. The greatest number of observations at specific locations were obtained at Wallops Island (38°N) and Ft. Churchill (59°N). Even at these locations, however, the data for a given month vary from 1 to 20 observations for altitudes between 55 and 80 km, and from 0 to 12 for altitudes above 80 km. The unequal distribution of observations by month and time of day, as well as by location, makes it difficult to derive accurate estimates of the annual temperature cycle, particularly at altitudes above 80 km. However, new data were sufficient to indicate that the *U.S. Standard Atmosphere, 1962* needed to be revised at all altitudes above 50 km.

2.1.1 DATA SOURCES.—Mean annual temperature-altitude profiles for altitudes between 50 and 90 km were prepared from temperature data derived from grenade, pitot-static tube, and falling-sphere experiments conducted through June of 1972 at the locations shown in table 12. Annual means for 31° latitude were computed from observations at White Sands, Woomera, and Eglin, and

for 8° latitude from observations at Natal and Ascension. The data for Woomera were combined with Northern Hemisphere data, using a 6-month change in date.

Mean annual temperature-altitude profiles prepared by Soviet meteorologists (data source E) from measurements taken with resistance thermometers on M-100 rockets at Volgograd (49°N) and Heiss Island, USSR (81°N) were also used in developing a mean annual temperature-altitude cross-section from equator to pole for altitudes between 50 and 80 km.

As with rocket thermistor measurements of temperature made in North America and elsewhere, the Soviets apply corrections compensating for aerodynamic heating of the sensor and for radiational and other nonambient heat sources. These corrections, based on a detailed evaluation of an appropriate heat transfer differential equation, typically range from 1 to 2 K near 40 km to many degrees above 55 km. Comparative investigations have shown that further systematic adjustment of the Soviet data is required, since in general the reported Soviet temperatures are low with respect to other measurements above 50 km. The data used here have been adjusted above 60 km by the Soviets, on the basis of their comparison of mean temperatures computed from their M-100 rocket measurements and means derived from grenade and pitot-static tube results.

2.1.2 DATA PROCESSING.—Mean annual temperatures for the various locations and altitudes were obtained by averaging 12 observed and/or interpolated mean monthly values. Both subjective and objective analyses of the distributions of observed mean monthly temperatures at levels between 50 and 100 km were employed. At locations and altitudes where observed values were available for only a few months or where values were missing for the extreme months, a subjective analysis appeared to provide a better estimate of the annual distribution of mean monthly values than that obtained by objective methods.

At altitudes and locations for which there were relatively complete sets of observed mean monthly temperatures, the mean monthly values were subjected to harmonic analysis for semiannual and

TABLE 12.—Rocket Launch Sites and Data Sources

Station	Location	Data Sources*
Natal, Brazil	6°S 35°W	A
Ascension Island	8°S 14°W	A
Eglin AFB, Florida	30°N 87°W	C
Woomera, Australia	31°S 137°E	D
White Sands, New Mexico	32°N 106°W	C
Wallops Island, Virginia	38°N 75°W	A,B
Ft. Churchill, Manitoba	59°N 94°W	A,B,C
Point Barrow, Alaska	71°N 157°W	A

*Data sources are given on page G 26.

annual cycles. The analyses give regression equations of the form:

$$T = \bar{T} + A_1 \sin(ix + \phi_1) + A_2 \sin(2ix + \phi_2), \quad (54)$$

where the bar indicates an arithmetic mean, x is $360^\circ/\text{period}$, i is 0, 1, 2, ..., 11, and 0 represents 15 January.

Examples of the curves representing the sum of the first and second harmonics, including equations giving the phase and amplitude of each cycle, are shown in figures 17 and 18 for the altitudes between 60 and 90 km at Ft. Churchill and Wallops Island. Table 13 gives the level of significance (F-test) of the annual and semiannual oscillations at each alti-

tude. An "X" indicates that the level of significance is beyond 25 percent.

The semiannual oscillation at Wallops is significant at the 5.0- and 0.1-percent level at 60 and 70 km, respectively. However, at Ft. Churchill it is not significant, even at the 25-percent level, at any of the altitudes shown. The annual oscillation at both locations is significant at the 5-percent level or better at all altitudes above 60 km. There is a change in phase of the annual temperature cycle between

TABLE 13.— Level of significance of annual and semiannual oscillations

Altitude (km)	WALLOPS oscillations (percent)		CHURCHILL oscillations (percent)	
	Annual	Semiannual	Annual	Semiannual
60	10	5.0	10	X
70	0.1	0.1	5.0	X
80	0.5	25.0	0.1	X
90	1.0	10.0	2.5	X

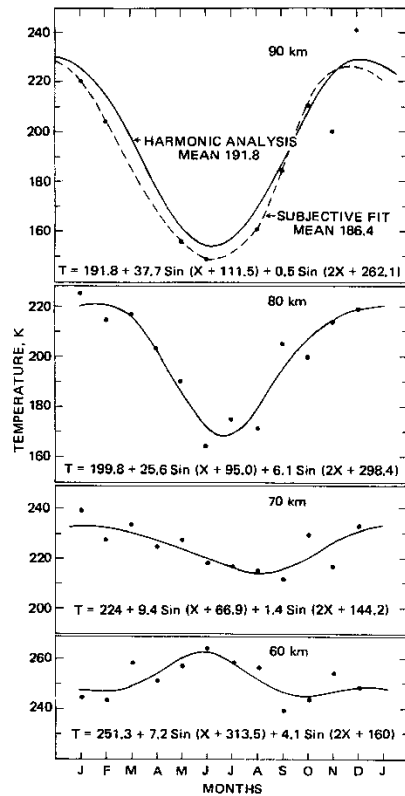


Figure 17. Harmonic analysis of median monthly temperatures at Ft. Churchill, Manitoba

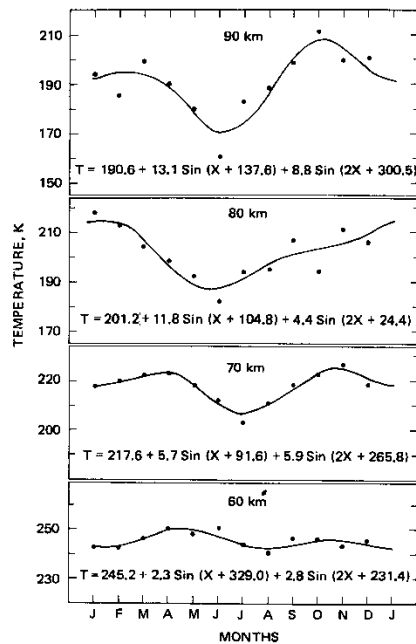


Figure 18. Harmonic analysis of median monthly temperatures at Wallops Island, Va.

60 and 65 km. At altitudes below 60 km the maximum mean monthly temperatures occur in summer, and above 65 km the maximums occur in winter. At altitudes between 60 and 65 km these two variations are partially self-cancelling, giving rise to a region of minimum variability (see figures 17 and 18).

Annual mean temperatures computed from harmonically smoothed mean monthly values were compared to annual means derived from curves that had been subjectively fitted to the observed mean monthly values. The differences between the mean annual values obtained by each method for altitudes between 50 and 85 km were less than 2K, and at most levels less than 1K. Differences were greater at 90 km, especially where 12 mean monthly values were not available. An example of the differences in annual means obtained by objective and subjective analyses is shown for the 90-km level at Ft. Churchill in figure 17. The subjective analysis appears to provide a more realistic fit to the data; it provides an annual mean that is 5K colder than the objective analysis.

Curves showing the variation with latitude of the mean annual temperatures were drawn for various altitudes between 40 and 90 km. The 40-, 60-, and 80-km curves are shown in figure 19. Values interpolated from these curves for 45°N differ considerably from those for the *U. S. Standard Atmosphere, 1962* at altitudes above 50 km.

2.1.3 COMPARISON OF DATA WITH MODEL.—The temperature-altitude profile based on values interpolated for 45°N from the latitudinal temperature curves described in the preceding paragraph is shown by profile A in figure 20 for altitudes between 50 and 100 km. Mean annual values for Wallops Island (38°N) and Ft. Churchill (59°N) are also shown in figure 20, because interpolated values for 45°N are based primarily on the observations from these two locations. The vertical temperature gradients of the profile that is fitted to the data are linear with geopotential altitude.

The isothermal layer between 86 and 91 km, figure 20, represents the region of the mesopause and is based on the vertical distributions of mean annual values. The vertical structure of this isothermal region changes from day-to-day and month-to-month, varying from less than 1 km to more than 15 km in thickness. At times there appear to be several mesopauses with minimum temperatures occurring 10 to 15 km apart. The time cross-sections of mean monthly values for Ft. Churchill and Wallops Island, figures 21 and 22, respectively, indicate that the isothermal layer at the mesopause is best defined and thinnest in late spring and summer when temperatures are lowest.

The temperature-altitude profile adopted for this Standard (profile B of figure 20) is approximately

isothermal, in terms of T_M , for a few kilometers above 85 geopotential km; it is nearly 3 degrees colder than the interpolated values for this layer. The lower mesopause temperature was required so that computed N_2 densities would reasonably match the observed density data in the low thermosphere. The mesopause temperature selected is well within the limits of accuracy that can be assigned to values obtained from the observations available at this altitude.

Densities associated with the adopted temperature-altitude profile are shown in figure 23 as percentage departures from the *U. S. Standard Atmosphere, 1962* (COESA 1962) for altitudes between 50 and 100 km. Percentage departures of observed

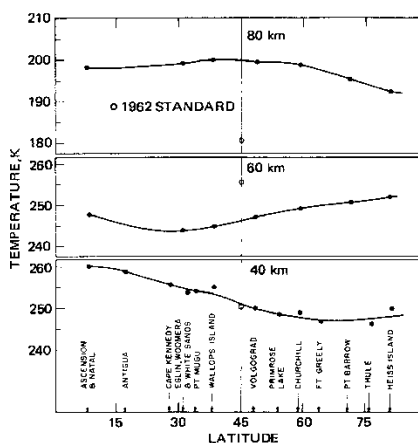


Figure 19. Mean annual temperature variation with latitude

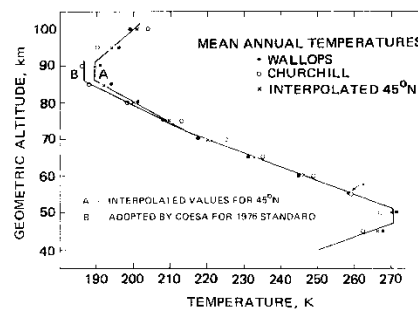


Figure 20. Temperature-altitude profile for the U.S. Standard Atmosphere, 1976

mean annual densities are also shown in figure 23 for Wallops Island and Ft. Churchill. Densities for this Standard are nearly the same as those for the 1962 Standard for altitudes up to 60 km but are approximately 6 percent less between 79 and 80 km and 10 to 15 percent greater near 90 km. Observed latitudinal variations of the percent departures from the mean annual densities at levels between 40 and 90 km are shown in figure 24.

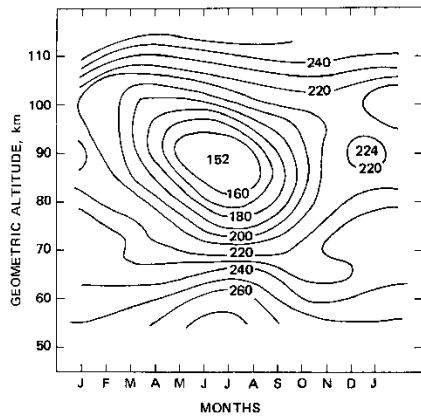


Figure 21. Cross-section of median monthly temperatures at Ft. Churchill, Manitoba

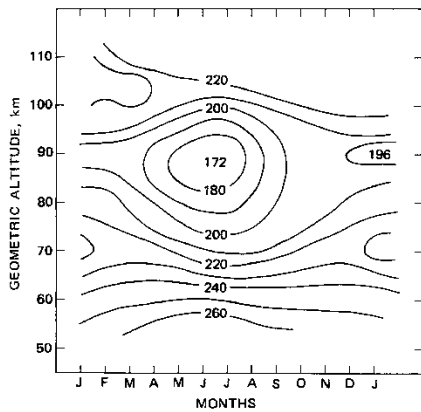


Figure 22. Cross-section of median monthly temperatures at Wallops Island, Va.

2.1.4 SYSTEMATIC VARIATIONS AND OBSERVED AND INFERRED EXTREMES.— In the region 0 to 86 km, latitudinal and seasonal variations about the Standard are observed. In addition, both observation and inference show that extreme departures of considerable magnitude occur. This information is being developed in detail in a series of reference atmospheres which will extend to 90 km.

These reference atmospheres are being prepared under the direction of COESA to replace those described in the *U. S. Standard Atmosphere Supplements, 1966*. They will include mean monthly atmospheres for each 15° of latitude from Equator

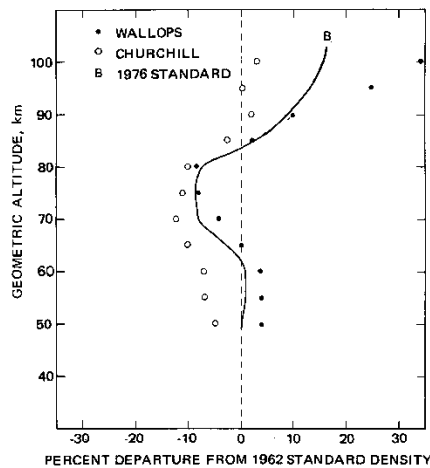


Figure 23. Mean annual density-altitude profiles

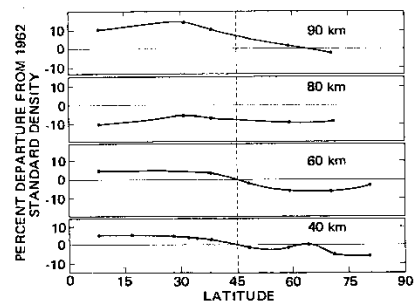


Figure 24. Mean annual density variation with latitude

to pole. Winter models at 60° and 75°N will depict typical conditions over both North America and Europe. These data will provide information to scientists and engineers on latitudinal, longitudinal, seasonal, and day-to-day changes in atmospheric structure that can be used to investigate the importance of such departures from the Standard in experiments and designs. Preliminary work on these reference atmospheres for latitudes from the Equator to the pole has yielded envelopes of mean monthly and extreme values of temperature and density which are discussed below for altitudes up to 90 km.

Temperature Variations.— The arrows in figure 25 show the lowest and highest mean monthly temperatures obtained for any location between the Equator and pole. Estimates of the one-percent maximum and minimum temperatures that occur during the warmest and coldest months, respectively, in the most extreme locations are shown by dashed lines. Values below 30 km are based on radiosonde observations and those between 30 and 50 km on meteorological rocket observations. Variations above 55 km are based on data derived primarily from grenade, falling-sphere, and pressure-gauge experiments. Available observations between 50 and 100 km on which to base estimates of the seasonal, latitudinal, and extreme variations are still relatively sparse. Errors associated with the direct and indirect temperature measurements are also larger above 50 km than at lower altitudes. Consequently, less confidence can be placed in the

estimated seasonal fluctuations and extreme values above 50 km.

Values shown for the various levels by envelope curves could not possibly be encountered at all altitudes at a given location and time. The warmest layers near the surface, for example, are associated with the coldest temperatures at the tropopause, and temperatures near the stratopause are negatively correlated with those at the mesopause.

At locations between 30 and 90°N, maximum mean monthly temperatures at altitudes below 25 km usually occur in June or July, and minimum values in December or January. In the upper stratosphere and lower mesosphere (30 to 60 km), semi-annual and biennial oscillations complicate the annual temperature distributions. The magnitude of the annual cycle is largest in the polar regions and decreases toward the Equator, whereas the importance of the biennial and semiannual cycles is greatest near the Equator and decreases toward the poles. At mid and high latitudes the annual and semiannual cycles tend to obscure the biennial oscillation. Observations show that north of 25° latitude the combined annual and semiannual components shift the time of maximum temperature in the upper stratosphere to May or early June, and of minimum temperatures to November or early December. In the mesosphere, above 60 to 65 km, the maximum mean monthly temperatures generally occur in December or January and the minimum in June or July.

The largest departures from the Standard at

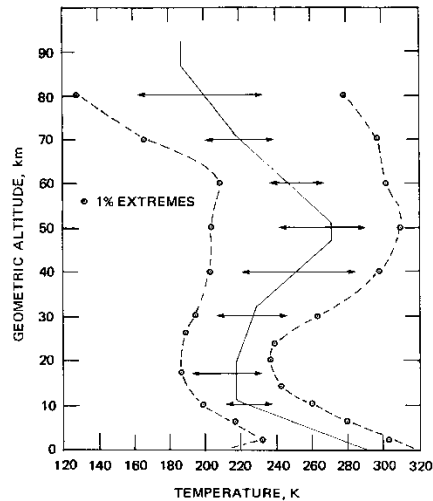


Figure 25. Range of systematic variability of temperature around the U.S. Standard Atmosphere, 1976

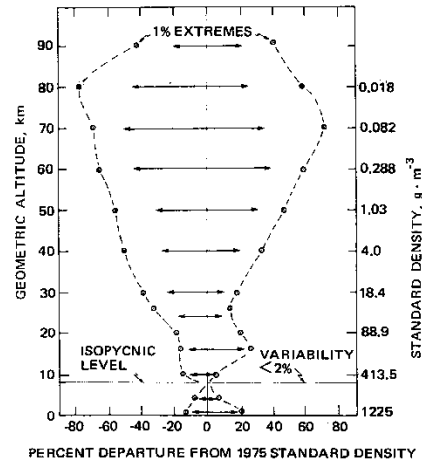


Figure 26. Range of systematic variability of density around the U.S. Standard Atmosphere, 1976

all altitudes between 25 and 90 km occur in arctic and sub-arctic regions.

Density Variations.—The estimated range of systematic changes (seasonal and latitudinal) in mean monthly densities is indicated by the horizontal arrows in figure 26 as percentage departure from the Standard. Estimates of the one-percent maximum and minimum densities that occur during months with the highest and lowest values in the most extreme locations are shown by dashed lines. Above 30 km both the largest negative and positive departures occur in arctic and sub-arctic regions. The negative departures represent winter, during "sudden" warmings of the stratosphere and/or mesosphere (Quiroz 1970, 1974). Below 30 km the range cannot be depicted for all levels by the maximum and minimum seasonal values at any one latitude.

The minimum latitudinal and seasonal variability, less than 2 percent, occurs at the isopycnic level near 8 km. Other levels of minimum variability, much less pronounced than at the isopycnic level, are near 26 and 90 km. Levels of maximum seasonal and latitudinal variability occur near 15 and 70 km.

DATA SOURCES

DATA SOURCE A.

- SMITH, W., KATCHEN, L., SACHER, P., SWARTZ, and THEON, J., 1964: Temperature, Pressure, Density and Wind Measurements with the Rocket Grenade Experiment, 1960-1963. *Technical Report R-211*, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C.
- SMITH, W., THEON, J., KATCHEN, L., and SWARTZ, P., 1966: Temperature, Pressure, Density and Wind Measurements in the Upper Stratosphere and Mesosphere, 1964. *Technical Report R-245*, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C.
- SMITH, W., THEON, J., SWARTZ, P., and KATCHEN, L., 1967: Temperature, Pressure, Density and Wind Measurements in the Upper Stratosphere and Mesosphere, 1965. *Technical Report R-263*, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C.
- SMITH, W., THEON, J., SWARTZ, P., and KATCHEN, L., 1968: Temperature, Pressure, Density and Wind Measurements in the Stratosphere and Mesosphere, 1966. *Technical Report R-288*, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C.
- SMITH, W., THEON, J., and SWARTZ, P., 1968: Temperature, Pressure, Density and Wind Measurements in the Stratosphere and Mesosphere, 1967. *Technical Report R-306*, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C.
- SMITH, W., THEON, J., CASEY, J., and HORVATH, J., 1970: Temperature, Pressure, Density and Wind Measurements in the Stratosphere and Mesosphere, 1968. *Technical Report R-340*, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C.
- SMITH, W.S., THEON, J.S., WRIGHT, D.U., JR., CASEY, J.F., and HORVATH, J.J., 1970: Measurements of the Structure and Circulation of the Stratosphere and Mesosphere, 1970. *Technical Report R-391*, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C.
- SMITH, W., THEON, J., CASEY, J., AZCARRAGA, A., and HORVATH, J., 1971: Temperature, Pressure, Density and Wind Measurements in the Stratosphere and Mesosphere. *Technical Report R-360*, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C.
- SMITH, W., THEON, J., WRIGHT, D., RAMSDELL, D., and HORVATH, J., 1974: Measurements of the Structure and Circulation of the Stratosphere and Mesosphere, 1971-2. *Technical Report R-416*, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C.

DATA SOURCE B.

- HORVATH, J.J., 1972: Neutral Atmospheric Structure Measurements by Pitot-Probe Technique, 05776-1-F, University of Michigan, NASA Contract NAS5-3335, Ann Arbor, Michigan.
- THEON, J.S., SMITH, W.S., CASEY, J.F., and KIRKWOOD, B.R., 1972: The Mean Observed Meteorological Structure and Circulation of the Stratosphere and Mesosphere. *Technical Report R-375*, National Aeronautics and Space Administration, Washington, D.C.

DATA SOURCE C.

- FAIRE, A.C., and CHAMPION, K.S.W., 1965: Falling sphere measurement of atmospheric density, temperature and pressure up to 115 km. *Space Research*, V, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, Netherlands.
- FAIRE, A.C., and CHAMPION, K.S.W., 1966: High-Altitude rocket density measurements at Eglin AFB, Florida. *Space Research*, VI, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, Netherlands.
- FAIRE, A.C., and CHAMPION, K.S.W., 1967: Falling sphere measurements of atmospheric density, temperature, and pressure at Fort Churchill, Canada, and Eglin, Florida. *Space Research*, VII, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, Netherlands.
- FAIRE, A.C., and CHAMPION, K.S.W., 1968: Recent density temperature and pressure obtained at White Sands Missile Range compared with IQSY results. *Space Research*, VIII, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, Netherlands.
- FAIRE, A.C., and CHAMPION, K.S.W., 1969: Upper atmospheric parameters obtained from recent falling sphere measurements at Eglin, Florida. *Space Research*, IX, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, Netherlands.
- FAIRE, A.C., CHAMPION, K.S.W., and MURPHY, E.A., 1972: ABRES Density Variations. *AFCRL 72-0042*, Air Force Cambridge Research Laboratories, Bedford, Mass.

DATA SOURCE D.

- GROVES, G.V., 1965: Diurnal variations in upper atmosphere wind and temperature structure of Woomera, 15-16 October 1963. *Space Research*, V, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, Netherlands.
- GROVES, G.V., 1966: Seasonal variations of temperature, pressure, density and winds to 80 km altitude at Woomera, 1957-1963. *Space Research*, VI, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, Netherlands.
- GROVES, G.V., 1967: Variations in upper atmosphere wind, temperature and pressure at Woomera during the night of 29/30 April 1965. *Space Research*, VII, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, Netherlands.
- JOHNSON, S.G., 1971: Measurements of the Basic Atmospheric Parameters of Woomera Using the Falling Sphere—1970. *W.R.E. Tech. Note* 50, Salisbury, S. Australia.
- PEARSON, P.H.O., 1965: Falling Sphere Results for Carnarvon During July 1964. *W.R.E. Tech. Note* PAD 103, Salisbury, S. Australia.

- PEARSON, P.H.O., 1969: Basic Atmospheric Parameters as Measured by Four Falling Sphere Experiments at Woomera, February to June 1966. *W.R.E. Tech. Note SAD 211*, Salisbury, S. Australia.
- PEARSON, P.H.O., 1969: Basic Atmospheric Parameters as Measured by Four Falling Sphere Experiments at Woomera, July to November 1966. *W.R.E. Tech. Note SAD 219*, Salisbury, S. Australia.
- ROPE, B., 1966: The Stratosphere and Mesosphere Circulation at Mid-latitudes of the Southern Hemisphere. *W.R.E. Tech. Note SAD 115*, Salisbury, S. Australia.

DATA SOURCE E.

- U.S.S.R., 1970: Proposals for the Project of International Standard Atmospheric Models, International Standards Organization, *Draft document*, ISO/TC 20/SC6 (Secretariat-19) 24, Geneva, Switzerland.

2.2 THE MODEL FOR ALTITUDES ABOVE 86 KM

2.2.1 GENERAL CONSIDERATIONS.—Above 85 km, two processes are primarily responsible for a decrease in the mean molecular weight with increasing height: the first is the dissociation of molecular oxygen, and the second is diffusive separation, which becomes increasingly important relative to mixing in this height region. In this altitude region between approximately 85 and 120 km, the effect of height- and time-dependent, molecular-oxygen dissociation, and the competition between eddy and molecular diffusion combine to complicate the study of the height distribution of the atmospheric species, such that generation of numerical values for the altitude profiles of physical parameters necessitates a considerable amount of numerical computation. More specifically, atomic oxygen becomes appreciable above 85 km, and diffusive separation begins to be effective at an average height of about 100 km. Also, in the regime where molecular diffusion becomes significant (above about 85 km), the effect of vertical winds on the composition is important (Reber and Hays 1973).

Above approximately 120 km, it is relatively safe to assume that there is no further large-scale oxygen dissociation, and that (except for wind effects and atomic-hydrogen flow and production) diffusive equilibrium prevails. Under such conditions, as seen in Part I, the simultaneous equations governing molecular diffusion are no longer interdependent, and these equations can then be applied to each atmospheric constituent separately. In this case, the computation of the individual density-height profiles presents no greater difficulty than that of the total pressure or density below 80 km, except for constituents such as atomic hydrogen, which have a nonnegligible vertical flow up to several hundred kilometers. The nonzero flux for atomic hydrogen results from two processes: planetary escape from the exosphere, and production due to chemical reactions in the lower thermosphere (Patterson 1966, Tinsley 1973) in accord-

ance with chemical equations in table 27 of Appendix C.

2.2.2 AVAILABILITY OF DATA.—In the altitude region, 50 to 90 km, atmospheric measurements of temperature, density, and pressure are made almost exclusively with rocket-borne instruments. These observations, described in Section 2.1, have served to develop an extensive set of thermodynamic data on which to base the lower boundary conditions for the model above 86 km. The region from 140 to 1000 km is one in which the thermodynamic properties are determined almost exclusively from satellite-related observations and radar incoherent scatter techniques. A vast amount of data has been accumulated for this height region. For altitudes between 90 and 140 km, however, there is only a very limited amount of atmospheric data from rocket soundings and incoherent scatter observations, and almost none from satellite observations. Furthermore, no unique observational technique has, to date, been developed for efficient observation of the thermodynamic and photochemical properties of this region of the earth's atmosphere.

2.2.3 PHILOSOPHY OF MODEL CONSTRUCTION.—In view of the necessity for computing individual density-altitude profiles for each atmospheric species in the heterosphere, the use of molecular-scale temperature T_M becomes impractical, and in this region kinetic temperature T is used as a governing parameter. In addition, the use of a linearly segmented temperature-height function, with discontinuous first derivatives, as in $T_M(H)$ below 86 km, is terminated in favor of one in which the first derivative is continuous from 86 to 1000 km. Furthermore, geometric altitude replaces geopotential altitude as the argument of the temperature-height function at heights of 86 km and above.

The transition from $T_M(H)$ to a function $T(Z)$ occurs at 86 geometric kilometers (84.8520 km'), where the value of T_M and the molecular-weight ratio, M/M_0 , lead to $T = 186.8673$ K. The observed temperature-height profiles usually show large gradients at heights from 100 to 200 km. At greater altitudes, the gradients decrease with increasing height to about 500 km, where the temperature approaches an asymptote (usually referred to as the exospheric temperature, T_∞) which varies with solar activity, time of day, and several other parameters. In the present model, T_∞ is defined to be 1000 K, a value which is associated with mean solar conditions.

The form of the functions used to represent the mean profiles reflects the desire to make the Standard a useful, analytical tool:

- a. The temperature is expressed as a smooth mathematical function of geometric altitude, with a continuous first derivative.

- b. Functions representing the temperature profile are readily adjustable to allow approximation of various data sets.
- c. Functions relating number densities to altitude are physically meaningful and analytically expressible.

Altitude profiles of both temperatures and gas-species number densities are consistent with inputs from a variety of sources:

- a. At the 86-km boundary, the temperature and number densities match the model for heights below 86 km. Such a match is somewhat complicated by the fact that the model below 86 km is defined in terms of geopotential altitude and molecular-scale temperature, while above 86 km the model uses geometric altitude and kinetic temperature. The procedure used for establishing the match is discussed in Part 1, while the generation of the 86-km number densities is described in Appendix A.
- b. In the altitude region between the lower boundary and about 130 km, temperature and mass-density profiles reflect the available data, which come largely from measurements made by rocket-borne pitot tubes (Horvath 1972) and falling spheres (Theon 1972), and by the incoherent scatter technique (Wand 1972). The average value of the N_2 density above 150 km is reasonably well established, however, and this value strongly influences the choice of temperature profiles in the region below this altitude, particularly in the very low temperature region from about 85 to 92 km.
- c. At 150 km the composition matches the Working Group recommendations shown in table 14.
- d. The largest body of data available on the neutral composition of the upper thermosphere (as opposed to the larger data set available on total density) is that obtained from the quadrupole mass spectrometer on the OGO-6 satellite (e.g., Hedin et al. 1972 and 1974). These data refer primarily to

an altitude of 450 km; the values of N_2 , O, He, and Ar, for this altitude, are given in table 14. They represent the OGO-6 data after adjustment to 45°N latitude, and to an exospheric temperature of 1000 K. The coefficients for the exponential segment of the temperature model above 120 km reflect this large and unique data set.

- e. At altitudes above about 130 km, the total density and its scale height are consistent with the large body of data determined from satellite drag.
- f. The number densities, eddy diffusion coefficients, flux terms, and temperature profile are consistent with those in the photochemical model of Keneshea and Zimmerman (1970) discussed in Appendix C, and based upon observation (Philbrick et al. 1973).

It must be emphasized that many of the parameters and profiles used and calculated for this Standard are dynamic by nature, and any steady-state description is only an approximation to the true state of affairs. Examples are the wave-like structure frequently observed in the temperature and gas densities as shown in figure 27 (Reber et al. 1975); the atomic-oxygen profile which appears to be extremely time dependent with significant

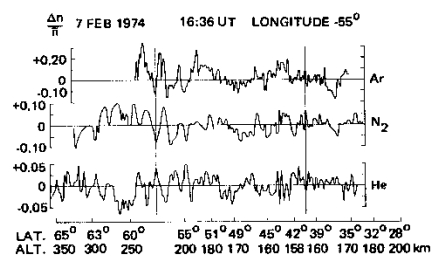


Figure 27. Wave-like structure of number-density profiles of Ar, N_2 , and He, observed during a single satellite pass

TABLE 14.—Number densities, mass densities, and mean molecular weights of five species at selected heights

Gas	86 km (m^{-3})	120 km (m^{-3})	150 km (m^{-3})	450 km (m^{-3})
N_2	1.12979×10^{20}	3.7258×10^{17}	3.1240×10^{16}	1.0865×10^{12}
O (atomic)	8.60000×10^{16}	9.2741×10^{16}	1.7800×10^{16}	4.1633×10^{10}
O ₂	3.03090×10^{19}	4.3950×10^{16}	2.7500×10^{15}	2.3676×10^{10}
He	7.58178×10^{14}	3.8879×10^{12}	2.1058×10^{12}	3.9479×10^{12}
Ar	1.35140×10^{18}	1.3661×10^{15}	5.0000×10^{12}	2.6583×10^7
H (atomic)	—	—	3.7544×10^{11}	8.4483×10^{10}
ρ	$6.95788 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot m^{-3}$	$2.222 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot m^{-3}$	$2.074 \times 10^{-6} \text{ kg} \cdot m^{-3}$	$1.184 \times 10^{-12} \text{ kg} \cdot m^{-3}$
M	28.95221 kg/kmole	26.205 kg/kmole	24.103 kg/kmole	15.247 kg/kmole

diurnal and seasonal components (e.g., George et al. 1972); and the helium profile which shows a strong annual component (Jacchia and Slowey 1967; Reber et al. 1968; Keating and Prior 1968; and Reber and Hays 1973). For the purpose of this model, temperature and number-density profiles are adjusted to represent average steady-state conditions.

2.2.4 TEMPERATURE-HEIGHT PROFILE.—The adopted temperature-height profile between 86 and 1000 km is described as follows:

- For 86 to 91 km, the layer is assumed to be isothermal at 186.8673 K.
- For 91 to 110 km, a segment of an ellipse is used, assuring a smooth monotonically increasing temperature-height function, with sufficient generality to match the temperature and its gradient at both end points. Equations are given in Part 1; derivations are contained in Appendix B.
- The layer, 110 to 120 km, is represented by a straight-line segment in which the change in temperature with altitude, i.e., dT/dZ , is equal to 12 K/km.
- The region, 120 to 1000 km, is represented by an exponential function in which T asymptotically approaches 1000 K at heights above 500 km. This form is well known, widely used, and permits the utilization of the Walker (1965) modification of the Bates (1959) technique for analytically representing upper-atmosphere number densities.

The equations for the temperature-height profile are given in Part 1. The adopted temperature-height profile from the surface to 1000 km is shown in figure 4. Variations in the temperature-height profiles, between 100 and 1000 km, for various degrees of solar and geomagnetic activity are presented in figure 28. Profile (A) gives the lowest temperatures expected at sunspot minimum; profile (B) represents average conditions at sunspot minimum; (C) represents average conditions at an average sunspot maximum; and (D) gives the highest temperatures to be expected during a period of exceptionally high solar and geomagnetic activity.

2.2.5 DENSITIES.—In this model, the steady-state vertical distribution of the number density n_i of a gas species with molecular weight M_i is governed by the vertical component of the momentum equation for that gas. Ideally, it is solved in conjunction with the equation of continuity (Colegrove et al. 1965; Keneshea and Zimmerman 1970; Reber and Hays 1973).

The equations used in the computation of the number-density profiles for the individual species, molecular nitrogen, atomic and molecular oxygen,

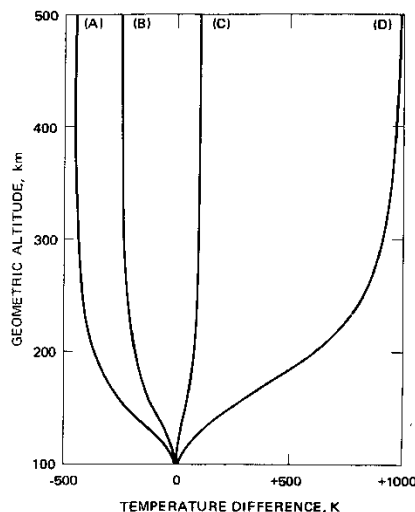


Figure 28. Departures of the temperature-altitude profiles from that of the present model for various degree of solar activity

helium, argon, and atomic hydrogen are discussed in Part 1. Number-density profiles based on the adopted temperature-height profile are shown in figure 5. Number-density profiles corresponding to the two extremes of temperature deviation (shown in figure 28) are depicted in figures 29 a, b, c, and d. Figure 29a presents number densities of the six species under conditions of minimum solar activity, while figure 29b shows number-density profiles of the same six species under conditions of maximum solar activity. Figure 29c depicts the possible range of variation of number densities of N_2 , Ar, and He, from the Standard, while figure 29d shows the possible range of variation of number densities of O_2 , O, and H from the Standard.

The total mass-density profile $\rho(Z)$ for the current model is shown in figure 7. Departures of the density-height profile from that of the present model in accordance with changes in exospheric temperatures are shown in figure 30. The four profiles shown in the diagram correspond to the four temperature difference profiles in figure 28.

2.2.6 MODEL COMPARED WITH OBSERVATIONS

Height Profiles of Temperature and N_2 Number Density.—As previously noted, the N_2 number density at any altitude is sensitive primarily to the temperatures at lower altitudes. This fact has serious implications when there are a number of data sets to be matched, as in the development of the temperature-height profile between 86 and 160 km.

The situation at 150 km, as of 1970, was sum-

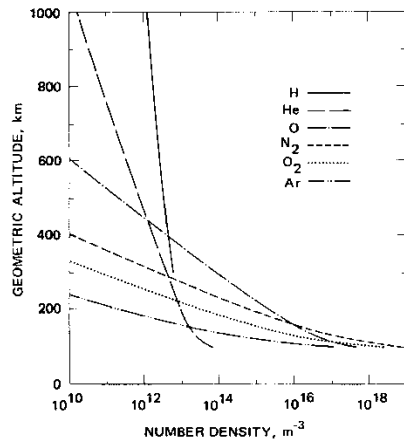


Figure 29a. Relative concentrations of atmospheric constituents during periods of minimum solar activity

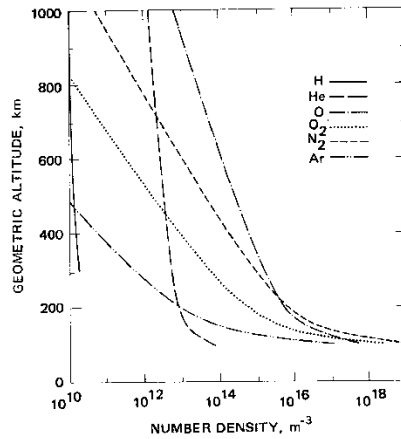


Figure 29b. Relative concentrations of atmosphere constituents during periods of maximum solar activity

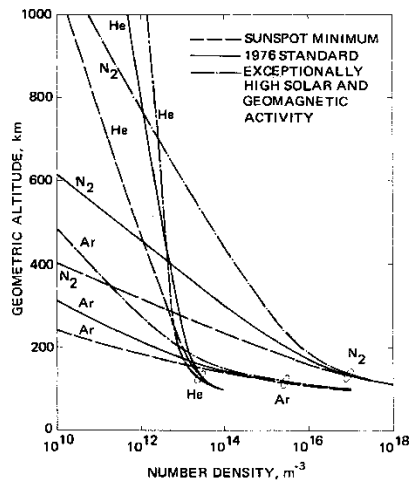


Figure 29c. Range of possible variation of number-density profiles of N_2 , Ar, and He due to solar and geomagnetic activity

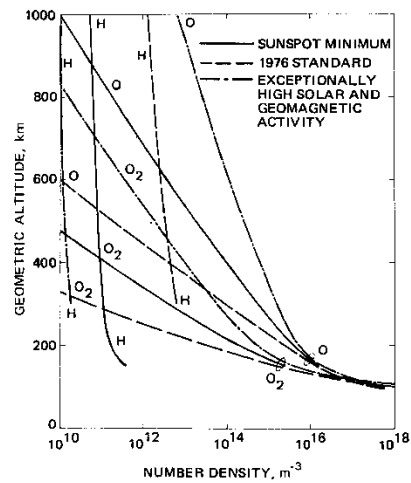


Figure 29d. Range of possible variation of number-density profiles of O_2 , O, and H due to solar and geomagnetic activity

marized by von Zahn (1970) making use of the relevant density values as well as mass-spectroscopic and UV-extinction data available at the time. After evaluating the data, he concluded that the most consistent agreement between densities de-

termined from drag acceleration and those determined from mass spectroscopy, was obtained if one assumed that drag-determined densities were high by 10 percent and the values of atomic oxygen found by mass spectroscopy were low by an appre-

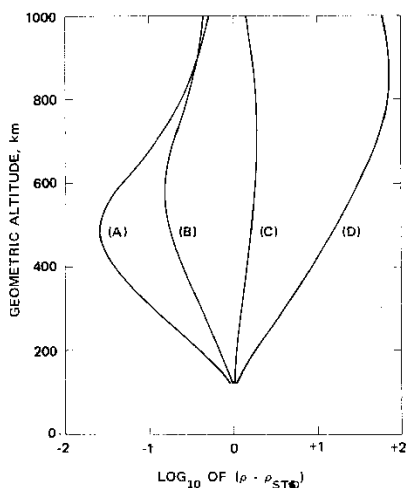


Figure 30. Departures of the density-altitude profiles from that of the standard for various degrees of solar activity

cial factor. Accordingly, he estimated the species number densities, n , and the total mass density ρ , for 150-km altitude to be as follows: $n(\text{N}_2) = 2.6 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$, $n(\text{O}_2) = 2.5 \times 10^{15} \text{ m}^{-3}$, $n(\text{Ar}) = 5 \times 10^{13} \text{ m}^{-3}$, $n(\text{O}) = 2.3 \times 10^{16} \text{ m}^{-3}$, and $\rho = 1.96 \times 10^{-9} \text{ kg/m}^3$, where his $n(\text{O})$ value represents an upward adjustment from available observed values. His drastic increase in the amount of atomic oxygen seemed justified in part by later measurements made at 120 km with a helium-cooled, rocket-borne mass spectrometer which gave an appreciably higher value of the concentration ratio of O to O_2 at 120 km than had ever been reported in the literature (Offermann and von Zahn 1971).

Nier (1972), on the other hand, pointed out that since atomic oxygen is a major constituent of the atmosphere in the neighborhood of 150 km, any arbitrary increase, such as by a factor of substantially more than two in its measured abundance relative to other constituents, would destroy the excellent agreement between mass-density scale heights computed from mass-spectrometer composition measurements and those found from drag measurements on low-altitude satellites such as OVI-15 (Champion et al. 1970a) and OVI-16 (Champion et al. 1970b). He subsequently reinforced his argument through laboratory experiments (Nier et al. 1972; and Lake and Nier 1973), in which it was shown that it was not likely that atomic-oxygen densities measured with instruments such as he and his colleagues previously

used in rocket flights were low by more than a factor of two.

More recently, Taeusch and Carignan (1972), in an extrapolation of OGO-6 composition and drag-determined densities down to 150 km, concluded that the 150-km atomic-oxygen value given by von Zahn (1970) and employed by Jacchia in his 1971 model, was too high. They prefer a number about 20 percent lower, but still considerably above the average value found with rocket-borne mass spectrometers. Their $n(\text{N}_2)$ and $n(\text{O}_2)$ values at 150 km, on the other hand, are about 25 percent higher than values generally found with rocket-borne mass spectrometers.

Moe (1973) completed a comprehensive study of drag measurements with satellites as well as of published values of atmospheric composition by all methods, correcting drag measurements for effects due to accommodation coefficients, and composition measurements for possible errors in instruments due to surface effects. Moe's $n(\text{N}_2)$, $n(\text{O}_2)$, and $n(\text{Ar})$ values at 150 km agree closely with those given by von Zahn (1970), which are essentially the abundances deduced from rocket-borne mass spectrometers. His $n(\text{O})$ value, however, is about 20 percent lower than von Zahn's value, and is in agreement with values given by Taeusch and Carignan (1972).

The concentration of helium in the lower thermosphere at mid-latitudes is known to vary by a factor of as much as 10 between summer and winter. Also below 150 km, it appears not to be in diffusive equilibrium. The values presented in the present report fall between the extremes obtained in observations.

The temperature data in this layer of the atmosphere come mainly from recent pitot-tube measurements (Horvath 1972), and from incoherent-scatter data (e.g., Wand 1972). These two data sets are quite consistent in one particular feature: the mean temperature profile, between about 105 km and 125 km, for each data set, appears to have a constant gradient with an average value of about 15 K/km for the backscatter data, and about 18 K/km for the pitot-tube data. The adopted version of the temperature-height profile also exhibits a constant gradient in this region, but it is 12 K/km, only two-thirds of the larger of these two measured values. Attempts to incorporate higher gradients lead to unacceptably high values for N_2 densities above 150 km.

The lower-boundary parameters and the N_2 density at 150 km reflect the results of many measurements in which there is a high degree of confidence, so it is unlikely that these data have serious error. It is not clear whether the recent measurements of the temperature-height profile between 110 and 120 km suggest a gradient which is too large, or

whether the three inputs are basically inconsistent in that they are not true averages over similar sets of conditions.

Dynamic Characteristics.—As noted earlier, most of the properties being modeled are time-dependent by nature, and steady-state description has to be used advisedly. Examples are the diurnal photochemical variations in the densities of atomic and molecular oxygen (Appendix C), and the longer-term, dynamically induced variations in helium and argon densities. The model described by the equations in Part 1 includes the provision for representing deviations from diffusive-equilibrium profiles in the middle thermosphere, deviations which are becoming more and more accepted as being physically real. Basic considerations for computing a time-dependent model are discussed in Appendix C.

Composition.—In the altitude range, 100–200 km, atmospheric densities computed from composition measurements made with rocket-borne mass spectrometers have usually been lower than values inferred from drag measurements on satellites. While it has been recognized that there might be some error in the drag coefficients upon which the drag measurements depend, the general feeling has been that the composition measurements were in error. In particular, because of the highly reactive nature of atomic oxygen, it has been assumed that this constituent was largely lost in mass-spectrometer ion sources, and hence, grossly underestimated. Early mass-spectrometric values such as those of Meadows and Townsend (1960) or Pokhunkov (1960) were extremely low, undoubtedly owing to the loss of atomic oxygen on the extensive surfaces of their instruments. With the advent of "open" source instruments, such as those of Schaefer (1963) and of Nier et al. (1964), much higher values were obtained. Even so, it was recognized that the losses might still be considerable.

Hall et al. (1965, 1967), using EUV extinction measurements made with rocket-borne UV spectrometers, found atomic-oxygen abundances in the altitude range, 150–200 km, to be considerably above those reported from rocket-borne mass-

spectrometer measurements. Results extrapolated downward from OSO-III measurements (Hinteregger and Hall 1969) gave similar results. The absolute numbers given are in some doubt, however, in view of the uncertainty in the absorption cross section employed for atomic oxygen (Moe 1970).

While some of the variations reported in $n(\text{N}_2)$, $n(\text{O}_2)$, and $n(\text{Ar})$ measurements in the 100–200 km range are almost certainly due to errors in measurements, some must be attributed to true atmospheric variations. The adopted values of $n(\text{N}_2)$, $n(\text{O}_2)$, $n(\text{Ar})$ at 150 km listed in table 14, and used in constructing the present model are nominal values, and are the best estimates available at the present time. Each is believed to have an uncertainty of less than 25 percent. Because of the uncertainty in the amount of atomic oxygen lost in rocket-borne mass spectrometers, the value of $n(\text{O})$ at 150 km is based on two sources. The first of these is the set of data obtained from the downward extrapolation of measurements made at higher altitudes with satellite-borne instruments in which, it is believed, the atomic-oxygen loss can be properly evaluated (Hedin et al. 1973). The second source is the set of mass densities found from satellite drag and corrected for the other constituents (N_2 , O_2 , and Ar) which can be measured accurately. It appears likely that the $n(\text{O})$ values given in table 14 are maximum values, as they are based on the assumption that atomic oxygen is strongly absorbed in mass spectrometers used in rocket studies of the lower thermosphere. This view may be too pessimistic, but it does not seem probable that values given could be high by a factor as large as two.

In the case of atomic hydrogen, a number density of $8.0 \times 10^{10} \text{ m}^{-3}$ at 500 km is consistent with satellite data (Meier and Mange 1970; Vidal-Madjar et al. 1973; and Brinton and Mayr 1971 and 1972) appropriate for an exospheric temperature of 1000 K. This value of $n(\text{H})$ is approximately three times the value given in the earlier work of Kocharts and Nicolet (1963). This larger number density at 500 km serves as a boundary value for the calculation of $n(\text{H})$ at other altitudes.

TABLE 18.—Mid-latitude ozone model

Geo- metric Height Z, m	Geopo- tential Height H, m'	Number Density			Column Density atm- cm/km $\Sigma(O_3)$	Mass Density kg/m ³ $\rho(O_3)$	Partial Pres- sure mb $p(O_3)$	Mass Mixing Ratio kg/kg $r(O_3)$
		Quantity m ⁻³ $n(O_3)$	Vari- ability m ⁻³ σ	Percent Vari- ability 100 $\sigma/n(O_3)$				
2000	1999	6.8(+17)	3.8(+17)	56	2.5(-3)	5.4(-8)	2.6(-5)	5.4(-8)
4000	3997	5.8	2.9	50	2.1	4.6	2.1	5.6
6000	5994	5.7	3.0	53	2.1	4.5	1.9	6.5
8000	7990	6.5	5.9	90	2.4	5.2	2.1	9.9
10000	9984	1.18(+18)	1.23(+18)	109	4.2	9.0	3.5	2.18(-7)
12000	11977	2.02	1.68	78	7.5	1.61(-7)	6.0	5.16
14000	13969	2.35	1.48	63	8.7	1.87	7.0	8.21
16000	15960	2.95	1.42	48	1.10(-2)	2.35	8.8	1.41(-6)
18000	17949	4.04	1.23	30	1.50	3.22	1.21(-4)	2.65
20000	19937	4.77	0.98	21	1.77	3.80	1.43	4.27
22000	21924	4.86	0.82	17	1.81	3.87	1.47	6.0
24000	23910	4.54	0.61	14	1.69	3.62	1.38	7.77
26000	25894	4.03	0.55	14	1.49	3.21	1.24	9.39
28000	27877	3.24	0.45	14	1.20	2.57	1.00	1.02(-5)
30000	29859	2.52	0.33	13	9.38(-3)	2.01	7.88(-5)	1.09
32000	31840	2.03	0.34	17	7.55	1.62	6.40	1.19
34000	33819	1.58	0.27	17	5.88	1.26	5.10	1.27
36000	35797	1.22	0.17	14	4.54	9.72(-8)	4.03	1.34
38000	37774	8.73(+17)	1.10(+17)	13	3.25	6.96	2.95	1.30
40000	39750	6.07	0.79	13	2.26	4.84	2.10	1.21
42000	41724	3.98	0.44	11	1.48	3.17	1.40	1.06
44000	43698	2.74	0.49	18	1.02	2.18	9.89(-6)	9.67(-6)
46000	45669	1.69	0.36	21	6.29(-4)	1.35	6.23	7.86
48000	47640	1.03	0.17	17	3.83	8.20(-9)	3.85	6.23
50000	49610	6.64(+16)	1.10(+16)	17	2.47	5.29	2.48	5.15
52000	51578	3.84	0.7	18	1.43	3.06	1.43	3.8
54000	53545	2.55	0.68	27	9.49(-5)	2.03	9.28(-7)	3.18
56000	55511	1.61	0.37	32	6.00	1.28	5.74	2.58
58000	57476	1.12	0.29	26	4.17	8.93(-10)	3.90	2.25
60000	59439	7.33(+15)	2.5(+15)	34	2.73	5.85	2.50	1.88
62000	61401	4.81	1.8	38	1.79	3.83	1.60	1.59
64000	63362	3.17	1.2	38	1.18	2.52	1.03	1.36
66000	65322	1.72	0.66	38	6.4(-6)	1.37	5.5(-8)	9.6(-7)
68000	67280	7.5(+14)	5.1(+14)	68	2.8	6.0(-11)	2.4	5.5
70000	69238	5.4	3.1	57	2.0	4.3	1.6	5.1
72000	71194	2.2	1.7	77	8.2(-7)	1.8	6.5(-9)	2.8
74000	73148	1.7	0.9	63	6.3	1.3	4.9	2.9

Total ozone amount = 0.345 atm-cm

successive levels, with bars representing plus and minus one standard deviation. The dashed bars indicate uncertainty in the statistical distribution of data at 8 to 16 km.

Because of the large range of ozone densities, it is frequently convenient to use the ratio of ozone density to air density (i.e., mixing ratio) as shown in figure 32. The greatest mixing ratios, approximately 1.5×10^{-5} kg/kg (15 μ gm/gm), occur at about 35 km. Above and below this maximum, the values tend to fall off nearly symmetrically, de-

creasing by about 50 percent at 23 and 48 km. It is important to note that the height of the mixing-ratio maximum occurs about 15 km higher than the density maximum. The range of mixing ratios shown at each height level corresponds to plus and minus one sigma value.

The tabulated standard deviations of the data, upon which this mid-latitude ozone model is based, show apparent percentage variabilities ranging from near 10 percent to greater than 100 percent. The tropospheric variability derived from

APPENDIX A

Boundary-Value Number Densities of Atmospheric Constituents

The boundary-value neutral number densities of the several constituents defined to comprise the U. S. Standard Atmosphere at 86 km and above were determined using a deductive process based upon several assumptions. The COESA Task Group decided to include as constituents of this model atmosphere only those species which are known to contribute significantly to the total number density in any portion of the atmosphere between 86 and 1000 km, because of either their mixing distribution below the turbopause or their diffusive distribution above this height. Those gases which appear never to contribute more than about 0.5 percent of the total composition at any point within this height region, or which for various reasons do not exhibit predictable behavior, were purposely omitted. Using these guidelines, the following gases were included: molecular nitrogen N_2 , molecular oxygen O_2 , argon Ar, helium He, and atomic oxygen O. Atomic hydrogen H was included at heights 150 km and above, but was not included in boundary-value considerations at 86 km. The remaining neutral gases which were used in establishing the sea-level value of the mean molecular weight, but which are not used in this model, are listed with the major gases and their respective contribution to the sea-level mean molecular weight in table 25.

The first three of the gases used in this model comprise more than 0.9996 of the air in any unit

volume at sea level, as is evident from summing the fractional composition F_i over these three species in table 25. Since the fractional volumes of these major species do not change significantly below the mesopause, which in this model is located at 86 km altitude, the sea-level fractional composition can be assumed to be approximately correct at 86 km. It is believed, however, that photochemical processes lead to small quantities of atomic oxygen in this height region, and a fractional amount of about .00059 by volume, or exactly 8.6×10^{16} atoms per m^3 , was agreed upon as an acceptable concentration of O for 86 km.

The introduction of the fixed amount of atomic oxygen at this height, and the simultaneous elimination of some minor species made it necessary to adjust the fractional concentrations of each of the four remaining species from their known sea-level values F_i by a common unknown factor ϵ to the 86-km fractional composition values F'_i , such that

$$F'_i = \epsilon F_i \quad (A-1)$$

The 86-km fractional composition of atomic oxygen is equal to the ratio of $n(O)$ to N , where $n(O)$ is equal to $8.6 \times 10^{16} m^{-3}$, the adopted atomic-oxygen number density for that height, and N is the unknown total number density at that height. The

TABLE 25.—Sea-level atmospheric composition

Species	Fractional volume F_i	Molecular wt. of species M_i	$F_i \cdot M_i$
N_2	.78084	28.0134	21.87398826
O_2	.209476	31.9988	6.70298063
Ar	.00934	39.948	0.37311432
CO_2	.000314	44.00995	0.01381912
Ne	.00001818	20.183	0.00036693
He	.00000524	4.0026	0.00002097
Kr	.00000114	83.80	0.00009553
Xe	.000000087	131.30	0.00001142
CH_4	.000002	16.04303	0.00003208
H_2	.0000005	2.01594	0.00000101
$\Sigma F_i = .99999714$			$\Sigma (F_i \cdot M_i) = 28.964425$

sum of the 86-km fractional composition of the remaining four species is

$$\sum_i F'_i = \epsilon \sum_i F_i \quad (\text{A-2})$$

The sum of the total of the 86-km fractional compositions (i.e., of the five species adopted to comprise the model at this height) must equal unity in accordance with the expression:

$$\epsilon \sum_i F_i + \frac{n(\text{O})}{N} = 1. \quad (\text{A-3})$$

The total number density N is expressible in terms of the mean molecular weight M , Avogadro's constant N_A , and ρ the mass density, the value of which is known at 86 km from other considerations. This relationship is

$$N = \frac{N_A \cdot \rho}{M}. \quad (\text{A-4})$$

The mean molecular weight at 86 km is the sum of the products $F_i M$, over the five gases comprising the model at this height. For the atomic oxygen this product is

$$F'(\text{O}) \cdot M(\text{O}) = \frac{n(\text{O}) \cdot M(\text{O})}{N} \quad (\text{A-5})$$

while the sum of the products of the remaining four gases is expressible as

$$\sum_i F'_i \cdot M_i = \epsilon \sum_i F_i \cdot M_i \quad (\text{A-6})$$

such that the mean molecular weight M at 86 km is expressed as

$$M = \epsilon \cdot \sum_i F_i \cdot M_i + \frac{n(\text{O}) \cdot M(\text{O})}{N}. \quad (\text{A-7})$$

Eliminating M between eq (A-4) and (A-7), and solving for ϵ yields

$$\epsilon = \frac{N_A \cdot \rho - n(\text{O}) \cdot M(\text{O})}{N \cdot \sum_i F_i \cdot M_i}. \quad (\text{A-8})$$

The eliminating of ϵ between eq (A-8) and (A-3) leads to the following expression for total number density:

$$N = \frac{\left(\sum_i F_i \right) \cdot [N_A \cdot \rho - n(\text{O}) \cdot M(\text{O})]}{\sum_i F_i \cdot M_i} + n(\text{O}). \quad (\text{A-9})$$

From table 25 the value of $\sum_i F_i$, the sum of F_i for the four species N_2 , O_2 , Ar , and He is seen to be 0.99966124, while the value of $\sum_i F_i M_i$ for the same four species is seen to be 28.95009918. The value of $M(\text{O})$ is taken to be one-half of the value of $M(\text{O}_2)$, also given in table 25. The value of $8.6 \times 10^{-6} \text{ m}^3$ was adopted for $n(\text{O})$, as previously stated, and N_A has the standard value $6.022169 \times 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$. The value of ρ at 86 km is found to be $6.957880 \times 10^{-6} \text{ kg/m}^3$. These values introduced into eq (A-9) yield a number density of $1.447265 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$ at 86 km. This value introduced into eq (A-1) leads to $\epsilon = 0.99974445$, while eq (A-7) then yields $M = 28.952208$ for the molecular weight at 86 km.

For the 86-km height, the values of F'_i , the fractional composition of each of the five species comprising the model at that height, are given in table 26 as the product ϵF_i , along with the corresponding products $F'_i M_i$, and the corresponding values of $N \cdot F'_i$ the number densities of the five gas species comprising the model atmosphere at 86-km height.

The value of $\sum_i F'_i$, the sum of the five values of F'_i listed in table 26, is seen to be 0.999999999, essentially the unit value which it should have. The sum of the five values of $F'_i M_i$ and of the five values of n_i , i.e., $\sum_i F'_i M_i$ and $\sum_i n_i$, both of which are also given in table 26, show essentially exact agreement with the value of their respective equivalents, M and N , computed independently. Thus the validity of the computation is established.

TABLE 26.—Number densities and molecular weight at 86 km

	$F'_i = \epsilon F_i$	$F'_i \cdot M_i \text{ (kg/kmol)}$	$n_i = F'_i \cdot N \text{ (m}^{-3}\text{)}$
N_2	.7806404557	21.86839334	$1.129793736 \times 10^{20}$
O_2	.2094224682	6.701267675	$0.3030898426 \times 10^{20}$
Ar	.00933761815	0.3780189704	$0.0135140022 \times 10^{20}$
He	.00000523866	0.0000209683	$0.0000075817 \times 10^{20}$
O	.00059422421	0.0095072308	0.00086×10^{20}
	$\sum_i F'_i = .9999999992$	$\sum_i F'_i \cdot M_i = 28.9522082$	$\sum_i n_i = 1.447265163 \times 10^{20}$

APPENDIX B

A Segment of An Ellipse To Express Temperature vs. Height

It is desired to determine the expression for a temperature function for a limited height region, $Z_s = 91$ to $Z_o = 110$ km, in the plane defined by Z and T , such that the slope of the function at each of the end points exactly matches a prescribed value. At $Z = Z_s$, where $T = T_s = 186.8673$ K, the derivative of the function with respect to Z must be zero, to match the slope of the temperature-height profile in the isothermal layer between 86 to 91 km, while at $Z = Z_o$, where $T = T_o = 240$ K, the derivative of T with respect to Z must be 12K/km to match the slope of a layer of constant temperature-height gradient between 110 and 120 km. A suitably adjusted ellipse will satisfy these conditions.

The general equation of an ellipse in terms of Z and T with center at $Z = 0$ and $T = 0$ is

$$\frac{Z^2}{a^2} + \frac{T^2}{A^2} = 1. \quad (\text{B-1})$$

With the center shifted to $Z = Z_c$ and $T = T_c$ the expression becomes

$$\frac{(Z - Z_c)^2}{a^2} + \frac{(T - T_c)^2}{A^2} = 1. \quad (\text{B-2})$$

The derivative of eq (B-2) with respect to Z is

$$\frac{2(Z - Z_c)}{a^2} + \frac{2(T - T_c)}{A^2} \cdot \frac{dT}{dZ} = 0. \quad (\text{B-3})$$

To meet the condition for $dT/dZ = 0$ at $Z = Z_s$, we evaluate eq (B-3) for those conditions, and find that $Z_c = Z_s$, such that eq (B-2) may be rewritten as

$$\frac{(Z - Z_s)^2}{a^2} + \frac{(T - T_c)^2}{A^2} = 1. \quad (\text{B-4})$$

Evaluating eq (B-4), for $Z = Z_s$ and $T = T_s$, leads to

$$A = T_s - T_c. \quad (\text{B-5})$$

Substituting Z_c for its equal Z_s in eq (B-3) and evaluating that expression for $Z = Z_o$, where

$T = T_o$ and where (dT/dZ) has the particular value $L_{K,9}$, and finally solving the resulting expression for $1/a^2$ yields

$$\frac{1}{a^2} = -\frac{(T_o - T_c) L_{K,9}}{A^2(Z_o - Z_s)}. \quad (\text{B-6})$$

Evaluating eq (B-4) at $Z = Z_o$, where $T = T_o$, and solving for $1/a^2$ yields

$$\frac{1}{a^2} = \frac{A^2 - (T_o - T_c)^2}{A^2(Z_o - Z_s)}. \quad (\text{B-7})$$

Eliminating $1/a^2$ between eq (B-6) and (B-7), and solving for T_c leads to

$$T_c = \frac{L_{K,9}(Z_o - Z_s)T_o + T_o^2 - T_s^2}{L_{K,9}(Z_o - Z_s) + 2T_s - 2T_o}. \quad (\text{B-8})$$

The elimination of A between eq (B-5) and (B-7) yields

$$a = \frac{(Z_o - Z_s)(T_s - T_c)}{[(T_s - T_c)^2 - (T_o - T_c)^2]^{1/2}}. \quad (\text{B-9})$$

Finally, solving eq (B-4) for T yields the functional expression

$$T(Z) = T_c + A \left[1 - \left(\frac{Z - Z_s}{a} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (\text{B-10})$$

The evaluation of eq (B-5), (B-8), and (B-9), in accordance with $Z_s = 91$ km, $T_s = 186.8673$ K, $Z_o = 110$ km, $T_o = 240.0$ K, and $L_{K,9} = 12$ K/km, yields the following values for the three constants in eq (B-10):

$$\begin{aligned} T_c &= 263.1905 \text{ K} \\ A &= -76.3232 \text{ K} \\ a &= -19.9429 \text{ km.} \end{aligned}$$

Since it was shown that $Z_c = Z_s$, the ellipse, which meets the required derivative and temperature conditions, has its center at $Z = 91$ km and $T = 263.1905$ K, and eq (B-10) represents the function which meets the required conditions.

APPENDIX C

The Calculation of A Dynamic Model for The 1976 U.S. Standard Atmosphere

INTRODUCTION

The objective of this appendix is to describe the procedure for the calculation of a dynamic model of the earth's atmosphere between 50 and 150 km, made up of an internally consistent set of diurnally averaged properties of gas concentrations versus altitude. In this height region, one profile exists for each of the four major atmospheric gas species, i.e., nitrogen, molecular and atomic oxygen, and argon, such that each of these concentration profiles meets the following two conditions:

1. the concentration values versus height are the result of a time-dependent, photochemical-transport calculation which incorporates measured chemical-reaction-rate constants, solar radiation fluxes, and turbulent-diffusion coefficients into coupled sets of equations of motion and continuity.
2. the calculated number densities of each of the four species at 150 km fall within particular limits recommended by the COESA Working Group.

The sophisticated and detailed calculation that meets these conditions serves to establish the physical basis for the generation of dynamic models of the earth's atmosphere, and yields height profiles of number-density flux values which are approximated by artificially adjusted functions for the calculation of the 1976 U.S. Standard Atmosphere.

BASIC CONSIDERATIONS

The species considered are O, O₂, O₃, O¹D, O₂(¹Δ_g), OH, H, HO₂, H₂O, H₂O₂, H₂, Ar, and He. The number densities, from 50 to 150 km are obtained through a semi-implicit, finite-difference solution of a system of mass- and momentum-conservation equations (Shimazaki 1967; Keneshea and Zimmerman 1970). In these calculations, thermal-diffusion factors for the species H, H₂, and He have the values respectively of -0.39, -0.31, and -0.36 (Zimmerman and Keneshea 1975). The numerical approach is essentially that introduced by Shimazaki (1967) but modified at the boundaries and in the volume integrations, following George et al. (1972). Table 27 lists the chemical reactions and the associated rate constants actually

used in the generation of the resulting concentration profiles. It should be noted, however, that refined rate-constant measurements made since these calculations were completed indicate the need for a revision of some of the listed values. The current calculations have not been updated with these new rate-constant values, however, since the changes have only a negligible influence on the concentrations of O, O₂, Ar, and He in the altitude region above 80 km. The intensity of the solar radiation flux used in these calculations is 0.65 of that shown in figure 37, which depicts the Ackerman (1971) values of solar radiation flux versus wavelength. The absorption cross sections were taken from various sources. For O₂ and O₃, these cross sections were taken from the compilation of Ackerman (1971) with the exception of those for the Schumann-Runge bands of O₂, for which region the values measured by Hudson and Mahle (1972) were used. The adopted absorption cross sections for water vapor and hydrogen peroxide are those reported by Watanabe and Zelikoff (1953), and by Volman (1963) respectively. The temperature-height profile up to 150 km, and the values of mean molecular weight up to the turbopause are those recommended by the Working Group of COESA. Using these data, the initial species distributions were calculated assuming complete mixing up to the turbopause, and diffusive equilibrium above it.

The total number density was obtained by integrating the hydrostatic equation, where the sea-level values of mass density and of mean molecular weight were taken from the *U.S. Standard Atmosphere, 1962*.

Beginning with these static profiles, the steady-state solution of all species was determined. The time-dependent calculations were then allowed to proceed for 15 solution days using a semi-implicit, finite-difference technique, a variable time step, up to 30 minutes, and a fixed height step of 100 m. This stringent height step was shown to be necessary to restrict the errors generated by species gradients when height steps larger than 100 m were used.

The height-dependent, turbulent-diffusion coefficients used are shown in figure 38, and are based upon observations of turbulence in chemical trails

TABLE 27.—The chemical reactions and associated reaction rates k_i expressed in the form of the value of rate coefficients A_i , B_i , and C_i where $k_i = A_i \cdot (T/300)^{B_i} \times \exp(C_i/T)$

REACTION				A_i	B_i	C_i
1	O	+ O	+ M → O ₂ + M	3.00E-33	-2.9	
2	O	+ O ₂	+ M → O ₂ + M	5.50E-34	-2.6	
3	O	+ O ₂	→ O ₂ + O ₂	1.20E-11		-2.00E + 03
4	H	+ O ₂	→ O ₂ + OH	2.60E-11		
5	OH	+ O	→ H + O ₂	5.00E-11		
6	OH	+ O ₂	→ HO ₂ + O ₂	4.00E-14		
7	H	+ O ₂	+ M → HO ₂ + M	7.40E-33		6.10E + 02
8	HO ₂	+ O	→ OH + O ₂	1.00E-11		
9	HO ₂	+ O ₂	→ OH + O ₂ + O ₂	1.00E-17		
10	OH	+ OH	→ H ₂ O + O	2.00E-12		
11	OH	+ HO ₂	→ H ₂ O + O ₂	2.00E-10		
12	H	+ HO ₂	→ H ₂ + O ₂	3.00E-12		
13	H	+ HO ₂	→ OH + OH	1.00E-11		
14	O	+ H ₂	→ OH + H	7.00E-11		-5.10E + 03
15	HO ₂	+ HO ₂	→ H ₂ O ₂ + O ₂	3.00E-12		
16	OH	+ H ₂ O ₂	→ H ₂ O + HO ₂	1.70E-11		-9.00E + 02
17	O	+ H ₂ O ₂	→ OH + HO ₂	4.00E-15		
18	H	+ H ₂ O ₂	→ H ₂ + HO ₂	3.90E-11		-4.60E + 03
19	O'D	+ O ₂	→ O ₂ + O ₂	3.00E-10		
20	O'D	+ O ₂	→ O + O ₂	6.00E-11		
21	O'D	+ N ₂	→ O + N ₂	9.00E-11		
22	O'D	+ H ₂	→ OH + H	1.00E-11		
23	O'D	+ H ₂ O	→ OH + OH	1.00E-11		
24	O ₂ ¹ Δ g	+ O ₂	→ O ₂ + O ₂	3.00E-15		
25	O ₂ ¹ Δ g	+ M	→ O ₂ + M	4.40E-19		
26	O ₂ ¹ Δ g	+ H	→ OH + O	1.10E-14		
27	O ₂ ¹ Δ g		→ O ₂	2.58E-04		
28	O ₂	+ hν	→ O + O			
29	O ₂	+ hν	→ O'D + O			
30	O ₂	+ hν	→ O ₂ + O			
31	O ₂	+ hν	→ O'D + O ₂ ¹ Δ g			
32	H ₂ O	+ hν	→ OH + H			
33	H ₂ O ₂	+ hν	→ OH + OH			

Note: The units of the two-body reaction rates are cm³/s, while those for the three-body reaction rates are cm³/s.

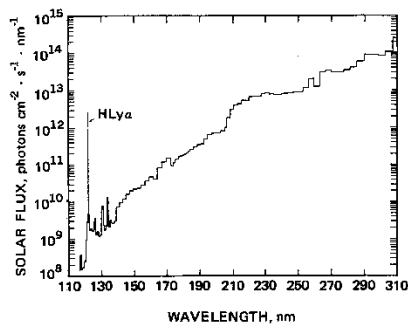


Figure 37. Solar radiation flux as a function of wavelength in the region from 115 to 310 nm (Ackerman)

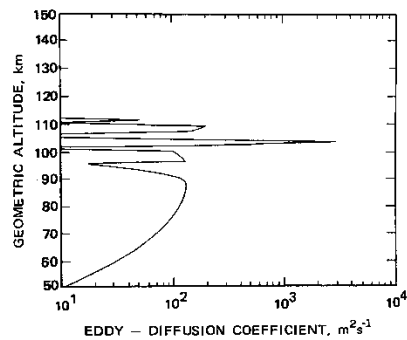


Figure 38. Eddy-diffusion coefficient as a function of altitude

(Philbrick et al. 1973). These values are derived (Zimmerman and Trowbridge 1973) from the fluctuation dynamics observed in rocket-borne chemical releases, and are valid from about 88 to 112 km. Because of the lack of chemical-tracer wind and turbulence measurements in the altitude region between 50 and 88 km, an exponential fit has been assumed between the reported value of 1×10^{25} cm²/s (Beaudoin et al. 1967) at 50 km, and the values at 88 km.

RESULTS

The time-dependent calculations were continued for the above-mentioned period of time, after which the species concentrations reproduced themselves to within 1 percent over a diurnal cycle, a condition which is called arriving at diurnal reproducibility. The diurnal averages of the concentration of O, O₂, and Ar are then calculated and extrapolated to 250 km by assuming diffusive equilibrium without thermal diffusion above the 150-km boundary. Figure 39, depicting the height profiles of the N₂ concentration and temperature, shows the initial conditions used in these one-dimensional calculations. Figure 40 shows the resulting diurnally averaged height profiles of O, O₂, and Ar, each of which is in good agreement with the 150-km values recommended by the COESA Working Group, and shown as error bars.

Thus, it has been demonstrated that an internally self-consistent model of the density structure of the upper mesosphere and lower thermosphere may be calculated from measured values of solar radiation flux, chemical-reaction-rate constants, and derivatives of measured vertical-turbulent-transport parameters deduced from chemical-trail studies.

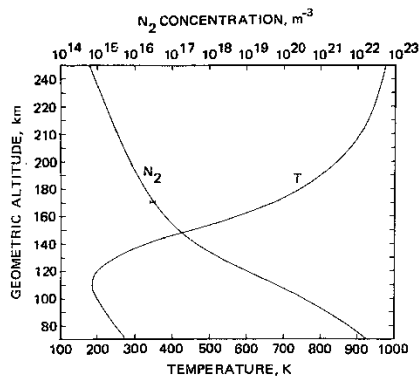


Figure 39. Altitude profile of kinetic temperature and molecular nitrogen concentration

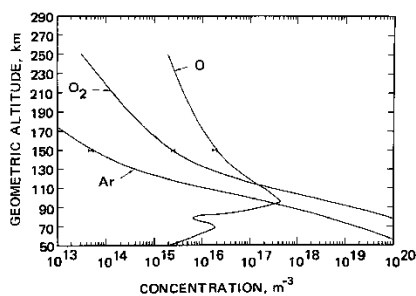


Figure 40. Altitude profiles of diurnally averaged concentrations of O, O₂, and Ar

Anexo 2
Simulación de MCI de H2 Zabala



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
INDUSTRIALES Y DE TELECOMUNICACIÓN

Titulación:

INGENIERO INDUSTRIAL

Título del proyecto:

MODELADO, IDENTIFICACIÓN Y SIMULACIÓN DE UN
MOTOR DE COMBUSTIÓN DE HIDRÓGENO

MEMORIA

Carlos Folio Zabala

Tutores: Pedro M^a Diéguez Elizondo

Jorge Elso Torralba

Pamplona, 28 de Junio de 2013

3.3.- Motor Volkswagen 1.4, 16V, 59 kW

Una de las principales líneas de investigación del Grupo Hidrógeno de la Universidad Pública de Navarra ha sido el desarrollo y puesta en marcha de un motor de gasolina convencional adaptado para funcionar con hidrógeno. Debido a los logros alcanzados en el banco de ensayos, el grupo de investigación ha incorporado dicha tecnología a un turismo convencional del modelo comercial Volkswagen Polo A04, cuyo motor es de combustión interna alternativo (MCIA) de gasolina de 1390 cm³ y una potencia máxima de 59kW.

Se trata de un motor que empezó a fabricarse en 1998 y en el cual Volkswagen ha introducido nuevas medidas de diseño con respecto a otros modelos anteriores, obteniendo una versión más desarrollada. En concreto, los resultados de las nuevas medidas son una reducción del peso y consumo, así como el cumplimiento de las normas más estrictas en lo que respecta a gases de escape de Europa.

El presente proyecto se centra en el estudio de dicho motor adaptado a la tecnología del hidrógeno, cuyas principales características se describen en los siguientes apartados.

3.3.1.- Ficha técnica del motor y curvas características

A continuación se muestra la ficha técnica, en su estado inicial de fábrica, del motor descrito:

Ficha técnica Volkswagen 1.4, 16V, 59 kW	
Combustible	Gasolina
Potencia máxima CV-kW/rpm	80 - 59 / 5000
Par máximo Nm/rpm	126 / 3850
Situación del motor	Delantero transversal
Número de cilindros	4 en línea
Material del bloque / culata	Aluminio / Aluminio
Diámetro x carrera (mm)	76,5 x 75,6
Cilindrada (cm ³)	1390
Relación de compresión	10,5
Distribución	4 válvulas por cilindro. Doble árbol de levas en cabeza
Alimentación	Inyección electrónica indirecta multipunto

Tabla 3.1.- Ficha técnica del motor en estudio

Prestaciones y consumo Volkswagen 1.4, 16V, 59 kW	
Velocidad máxima (km/h)	175
Aceleración 0-100 km/h (s)	12,2
Aceleración 0-1000 m (s)	34
Consumo urbano (l/100 km)	8,48
Consumo extraurbano (l/100 km)	5,22
Consumo medio (l/100 km)	6,35
Emisiones de CO ₂ (g/km)	152

Tabla 3.2.- Prestaciones del motor en estudio

5.- MODELADO DEL MOTOR

Para el diseño de un controlador es precisa la realización previa de un modelado del sistema que se quiere controlar, ya que de esta forma es posible una mejor comprensión de los fenómenos físicos y químicos que hacen que el sistema se comporte de una manera determinada u otra. Pero el modelado de un sistema, por encima de todo, es necesario para posibilitar la posterior simulación del funcionamiento del mismo con anterioridad a su implementación en el sistema real. De esta forma, es posible la optimización del funcionamiento del controlador sin poner en riesgo la integridad del equipo real.

Para proceder a la realización del modelado de un motor hay que diferenciar los diversos subsistemas que conforman el sistema global y modelarlos por separado.

Los dos subsistemas en los que se divide el sistema del motor de combustión interna alternativo (MCIA) en estudio son:

- **Subsistema del aire o subsistema del colector de admisión**
- **Subsistema mecánico**

El modelado que se realiza a continuación está claramente orientado al control, ya que se modela con el fin de obtener una precisión razonable, pero con una baja complejidad computacional. A su vez, se indica claramente los parámetros dependientes del tiempo para facilitar el estudio de la dinámica del sistema.

5.1.- Parámetros fundamentales

Antes de proceder con el modelado del motor, es conveniente la realización de una breve descripción de los parámetros de un motor de combustión interna alternativo (MCIA) que se utilizarán en los posteriores apartados del presente proyecto (ver [9]). Los principales se listan a continuación:

- **Punto Muerto Inferior (PMI):** punto muerto mecánico del mecanismo pistón-biela-manivela generado cuando el pistón se encuentra en la posición más alejada de la culata, generando el volumen máximo del recinto de combustión.
- **Punto Muerto Superior (PMS):** punto muerto mecánico del mecanismo pistón-biela-manivela generado cuando el pistón se encuentra en la posición más cercana a la culata, generando el volumen mínimo del recinto de combustión (volumen de la cámara de combustión).
- **Carrera, S :** recorrido del pistón entre el punto muerto superior, PMS, y el punto muerto inferior, PMI.
- **Diámetro, D :** es el diámetro del cilindro.
- **Cilindrada unitaria, V_u :** volumen que hay entre los dos puntos muertos, o el que desplaza el pistón a lo largo de la carrera.
- **Cilindrada total, V_p :** cilindrada unitaria por el número de cilindros.
- **Volumen de la cámara de combustión, V_c :** volumen encerrado entre el pistón y la culata cuando el pistón está en PMS.

- **Volumen total del cilindro, $V_c + V_d$:** volumen encerrado por el pistón, el cilindro y la culata cuando el pistón está en PMI.
- **Relación de compresión volumétrica, r :** cociente entre el volumen encerrado por el pistón, el cilindro y la culata cuando el pistón está en PMI y el volumen de la cámara de combustión. Es decir la relación entre el volumen total del cilindro y el de la cámara de combustión:

$$r = \frac{V_d + V_c}{V_c} \quad (\text{Ec. 5.1})$$

- **Volumen del colector de admisión, V :** es el volumen, en m^3 , de todo el conducto que se forma desde la posición de la válvula de la mariposa hasta el lugar en el que se encuentran las válvulas de admisión de la culata. Por tanto, este volumen incluye tanto el correspondiente al colector de admisión propiamente dicho como el volumen de la parte de la culata encargada de la admisión aguas arriba de las válvulas de admisión.
- **Régimen de revoluciones, n :** velocidad de giro del cigüeñal expresada en revoluciones por minuto (rpm). También se utilizará la terminología ω_e cuando el régimen se exprese en rad/s refiriéndose a la velocidad angular.
- **MAP, p :** del inglés Manifold Absolute Pressure, es la presión del aire en el colector de admisión del motor, medida en Pa.
- **Dosado absoluto, F :** es el cociente entre la masa de combustible y la masa de aire con la que se alimenta el motor.
- **Dosado estequiométrico, F_e :** es la relación combustible-aire asociada a una combustión ideal en la que se quema completamente el combustible con la mínima cantidad de aire posible.
- **Dosado relativo, F_R :** es el cociente entre el dosado absoluto y el estequiométrico. Si es mayor que 1 la mezcla será rica, si por el contrario es menor que 1, la mezcla será pobre:

$$F_R = \frac{F}{F_e} \quad (\text{Ec. 5.2})$$

- **Lambda, λ :** es la inversa del dosado relativo. Si es mayor que 1 la mezcla será pobre, mientras que si no supera la unidad, la mezcla será rica.
- **Poder calorífico inferior del combustible, H_i :** es la cantidad de calor producido por la combustión teórica y completa de una unidad de masa o volumen de combustible sin que condense el vapor de agua que contienen los productos de la combustión. Como en los MCIA la temperatura de los gases de la combustión es muy superior a la del ambiente, no se considera la condensación del vapor de agua, con lo que siempre se utiliza el poder calorífico inferior.
- **Rendimiento volumétrico (de la mezcla):** tal y como se estudia en este proyecto, es la relación entre la masa de mezcla aire-combustible por unidad de tiempo que alimenta al motor y la masa teórica por unidad de tiempo que podría entrar, medida con respecto a unas condiciones de referencia.

- **Potencia indicada, N_i :** es la potencia que se obtiene del ciclo indicado, siendo A_i el área del ciclo de trabajo indicado:

$$N_i = \frac{1}{2} A_i \omega_e(t) \quad (\text{Ec. 5.3})$$

- **Potencia efectiva, N_e :** es la potencia que se obtiene directamente del eje del cigüeñal. Es el resultado de restar a la potencia indicada la potencia de pérdidas mecánicas:

$$N_e = N_i - N_{pm} \quad (\text{Ec. 5.4})$$

- **Rendimiento indicado:** es la relación entre la potencia indicada y la potencia calorífica que teóricamente el combustible consumido por el motor puede proporcionar, donde $\dot{m}_f$ es el gasto de combustible:

$$\eta_i = \frac{N_i}{\dot{m}_f H_i} \quad (\text{Ec. 5.5})$$

- **Rendimiento efectivo:** es la relación entre la potencia efectiva y la potencia calorífica que teóricamente el combustible puede proporcionar:

$$\eta_e = \frac{N_e}{\dot{m}_f H_i} \quad (\text{Ec. 5.6})$$

- **Rendimiento mecánico:** es la relación entre la potencia indicada y la efectiva:

$$\eta_m = \frac{N_e}{N_i} \quad (\text{Ec. 5.7})$$

- **Presión media indicada, p_{mi} :** es la presión que multiplicada por la cilindrada unitaria da el trabajo indicado:

$$p_{mi} = \frac{N_i}{n \frac{1}{2} V_D} \quad (\text{Ec. 5.8})$$

- **Presión media efectiva, p_{me} :** para un motor de cuatro tiempos, es la presión que actuaría sobre el pistón durante una carrera de expansión completa para producir la misma cantidad de trabajo que la que produce el motor real en dos revoluciones:

$$p_{me} = \frac{N_e}{n \frac{1}{2} V_D} \quad (\text{Ec. 5.9})$$

- **Par indicado, M_i :** es la potencia indicada dividida por la velocidad angular del motor:

$$M_i = \frac{N_i}{2\pi n} \quad (\text{Ec. 5.10})$$

- **Par efectivo o par motor, M_e :** es la potencia efectiva dividida por la velocidad angular del motor. Es el par que se obtiene del cigüeñal del motor:

$$M_e = \frac{N_e}{2\pi n} \quad (\text{Ec. 5.11})$$

5.2.- Modelado del subsistema del colector de admisión

Se considera el colector de admisión como un depósito de volumen finito en el cual entra el aire por la válvula de la mariposa y sale a través de la válvula de admisión de cada cilindro. Durante la carrera de admisión cada cilindro puede ser tomado como una bomba volumétrica que bombea el aire hasta su interior, actuando la válvula de la mariposa como pérdida de carga variable.

Tomando el colector de admisión como un depósito con entradas y salidas se tiene el siguiente esquema:

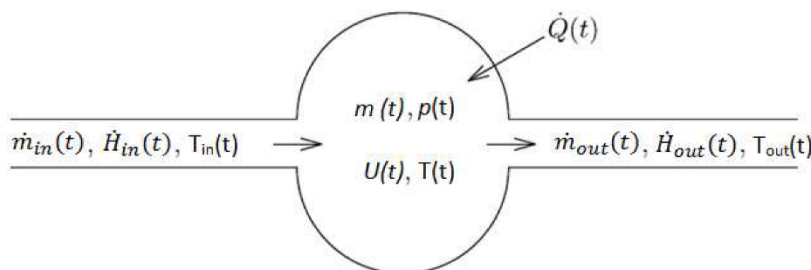


Figura 5.1.- Esquema del volumen de control del colector de admisión [22]

- $\dot{m}_{in}(t)$: flujo másico de aire que entra al colector a través de la mariposa;
- $\dot{H}_{in}(t)$: flujo de entalpía a la entrada del colector;
- $T_{in}(t)$: temperatura del aire a la entrada;
- $m(t)$: masa de aire dentro del colector de admisión;
- $U(t)$: energía interna del aire en el colector;
- $T(t)$: temperatura del aire dentro del colector;
- $p(t)$: presión del aire en el colector (MAP);
- $\dot{m}_{out}(t)$: flujo másico de aire que sale del colector y va a parar a los cilindros;
- $\dot{H}_{out}(t)$: flujo de entalpía que sale del colector; y
- $T_{out}(t)$: temperatura del aire a la salida.

Para la determinación de la dinámica del colector se aplica la conservación de masa y energía del volumen de control definido por el colector [2]. De las dos expresiones mostradas a continuación, la primera de ellas (Ec. 5.12) se corresponde con el balance del flujo de masa, mientras que la segunda (Ec. 5.13) es el balance de potencia del volumen de control.

$$\frac{dm_{vc}(t)}{dt} = \dot{m}_{in}(t) - \dot{m}_{out}(t) \quad (\text{Ec. 5.12})$$

$$\frac{dE_{vc}}{dt} = \dot{Q}_{vc} - \dot{W}_{vc} + \dot{m}_{in} \left(h_{in} + \frac{C_{in}^2}{2} + gz_{in} \right) - \dot{m}_{out} \left(h_{out} + \frac{C_{out}^2}{2} + gz_{out} \right) \quad (\text{Ec. 5.13})$$

(Por motivos de espacio, se han omitido las dependencias con el tiempo en la segunda expresión)

Suponiendo que los fluidos pueden modelarse como gases ideales y que el volumen del colector permanece constante, es posible la aplicación de la ley de los gases ideales [6]:

$$p(t) V = n R T(t) \quad (\text{Ec. 5.14})$$

donde n número de moles del gas; y
 R constante universal de los gases (8,314 [J/mol K] o [Pa m³/mol K]).

Otra forma de expresar la ecuación anterior es:

$$p(t) V = \frac{m(t)}{M} R T(t) \quad (\text{Ec. 5.15})$$

donde $m(t)$ masa del gas en gramos (gr);
 M masa molar del gas, expresado en g/mol; y
 R constante universal de los gases.

A partir de este momento se procederá a la utilización de la siguiente expresión cuando se haga referencia a la ecuación de los gases ideales:

$$p(t) V = m(t) R_{gas} T(t) \quad (\text{Ec. 5.16})$$

donde R_{gas} no es la constante universal, sino la constante del gas. En este caso concreto se trata del aire (287,053 [J/kg K] o [Pa m³/kg K]).

En el colector no existe trabajo de desplazamiento, por lo que el término $\dot{W}_{VC}(t)$ resulta nulo. Además, dado que z_{in} es prácticamente igual a z_{out} , y los términos de velocidad C_{in} y C_{out} pueden considerarse despreciables frente a los términos térmicos, puede asumirse que no ocurren cambios significativos de energía cinética y potencial en el flujo.

Como consecuencia de la desestimación de los efectos de la energía cinética y potencial, $E_{VC}(t)$ será la energía interna del colector $U(t)$. Se definen las siguientes relaciones termodinámicas:

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_v = \frac{R}{k-1} \quad (\text{Ec. 5.17})$$

$$c_p = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_v \quad (\text{Ec. 5.18})$$

$$E_{VC}(t) = \frac{1}{k-1} p(t) V = c_v \frac{p(t) V}{R} = c_v m(t) T(t) \quad (\text{Ec. 5.19})$$

donde c_p calor específico a presión constante [J/kg K];
 c_v calor específico a volumen constante [J/kg K]; y
 k cociente de calores específicos, $k = c_p/c_v$.

Considerando la temperatura del flujo de aire a la salida del colector $T_{out}(t)$, igual a la temperatura en el interior del mismo $T(t)$, y aplicando las relaciones termodinámicas anteriormente descritas a la expresión del balance de potencia (Ec. 5.13), se llega a:

$$\frac{d}{dt} [c_v m(t) T(t)] = c_p \dot{m}_{in} T_{in}(t) - c_p \dot{m}_{out} T(t) + \dot{Q}(t) \quad (\text{Ec. 5.20})$$

Si se procede a la aplicación de la ecuación de estado de los gases ideales (Ec. 5.16) a la expresión del balance de masas (Ec. 5.12), y se realiza un desarrollo en profundidad de la del balance de energía (Ec. 5.20), estas dos ecuaciones diferenciales quedan:

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{R}{V} [\dot{m}_{in}(t) T_{in}(t) - \dot{m}_{out}(t) T(t)] \quad (\text{Ec. 5.21})$$

$$\frac{dT(t)}{dt} = \frac{k R T(t)}{p(t) V} [\dot{m}_{in} \cdot T_{in}(t) - \dot{m}_{out} \cdot T(t)] + \frac{R T(t)}{c_v p(t) V} \dot{Q}(t) \quad (\text{Ec. 5.22})$$

En el caso de que se considere el sistema como adiabático, el término $\dot{Q}(t)$ es nulo, ya que no se produce transferencia de calor alguna a través de las paredes.

Sin embargo, la formulación adiabática únicamente resulta una buena aproximación cuando el tiempo de permanencia del gas en el depósito es muy pequeño, o cuando la relación superficie-volumen del depósito es pequeña.

Como se puede apreciar en la Figura 5.2, en el colector de admisión la relación superficie-volumen es bastante grande. Además, los tiempos de permanencia del aire pueden llegar a ser elevados, ya que, en motores de cuatro tiempos, la válvula de admisión permanece abierta únicamente durante la carrera de admisión, mientras que durante el resto del ciclo permanece cerrada.

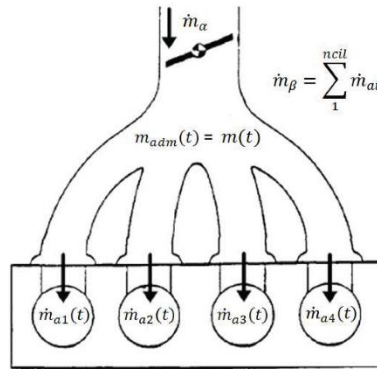


Figura 5.2.- Esquema del colector de admisión y los flujos másicos de aire [22]

donde $\dot{m}_\alpha(t)$ equivale a $\dot{m}_{in}(t)$, $m_{adm}(t)$ a $m(t)$ y $\dot{m}_\beta(t)$ a $\dot{m}_{out}(t)$.

Por tanto, no es conveniente utilizar la formulación adiabática para este sistema, siendo la consideración de condiciones isotermas la mejor aproximación. Así, las ecuaciones del balance de masa (Ec. 5.22) y energía (Ec. 5.21) quedan simplificadas a:

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{R T(t)}{V} [\dot{m}_{in}(t) - \dot{m}_{out}(t)] = \frac{R T(t)}{V} [\dot{m}_\alpha(t) - \dot{m}_\beta(t)] \quad (\text{Ec. 5.23})$$

$$T(t) = T_{in}(t) \quad (\text{Ec. 5.24})$$

Siendo $\dot{m}_\alpha(t)$ el flujo másico de aire que entra al colector a través de la mariposa y $\dot{m}_\beta(t)$ el que sale del colector.

5.2.1.- Flujo de aire entrante en el colector

La entrada del aire al colector se considera como un problema en el que un fluido compresible atraviesa un conducto y es impulsado, por la diferencia de presiones, a través de una reducción de sección producida por la mariposa.

Las principales consideraciones que se aplican (según [2]) son las mostradas a continuación:

- No existe fricción ni inercia en el flujo de aire;
- Sistema totalmente aislado;
- No se producen pérdidas en la zona de aceleración del fluido, aguas arriba de la zona más estrecha. Toda la energía potencial que posee el flujo se convierte isentrópicamente en energía cinética; y
- Después del punto más estrecho todo el flujo es turbulento, y toda la energía cinética ganada anteriormente se disipa térmicamente sin recuperación de presión.

Con estas consideraciones, la presión en el punto más estrecho es prácticamente igual a la presión aguas abajo. Además, las temperaturas del flujo de aire aguas arriba y abajo del orificio serán iguales.

Por tanto, el flujo de aire que atraviesa la válvula de mariposa y entra al colector de admisión es igual al máximo caudal de aire que puede atravesar el conducto multiplicado por un coeficiente de descarga, un coeficiente función de la posición de la mariposa y un coeficiente función de la relación de presiones:

$$\dot{m}_\alpha(\alpha, \Phi) = \dot{m}_\alpha^{max} C_d f(\alpha) f(\Phi) \quad (\text{Ec. 5.25})$$

donde $\dot{m}_\alpha^{max}$ máximo caudal de aire posible [kg/s];
 C_d coeficiente de descarga;
 $f(\alpha)$ coeficiente de sección (depende del ángulo de la mariposa); y
 $f(\Phi)$ coeficiente de presiones aguas abajo y aguas arriba de la mariposa.

El máximo flujo de aire que puede atravesar una sección, atendiendo a la definición de caudal como el producto entre la sección, la densidad y la velocidad, es el que atraviesa dicha sección a la velocidad del sonido.

Asumiendo el aire como un gas ideal, la velocidad del sonido viene definida por (ver [1]):

$$c = \sqrt{k R T} \quad (\text{Ec. 5.26})$$

donde k relación de calores específicos;
 R constante del aire; y
 T temperatura del aire.

Por tanto, aplicando la ecuación de estado de los gases ideales (Ec. 5.16) y considerando el diámetro de la mariposa igual al del conducto, la expresión del caudal máximo de aire a través de la mariposa es:

$$\dot{m}_\alpha^{max} = \frac{\pi D_{mar}^2}{4} \frac{p_{in}(t)}{\sqrt{R T(t)}} \quad (\text{Ec. 5.27})$$

donde D_{mar} diámetro de la válvula de mariposa; y
 $p_{in}(t)$ y $T(t)$ presión y temperatura del flujo entrante.

El caudal máximo definido se ve reducido por un factor relativo a la diferencia de presiones aguas arriba y aguas debajo de la mariposa, $f(\Phi)$.

Si se desprecia la pérdida de carga en el filtro del aire, la presión aguas arriba de la válvula de mariposa puede considerarse igual a la atmosférica. Mientras que la presión aguas abajo será la presión en el colector o MAP.

A medida que los valores de ambas presiones se igualen, menor será el flujo de aire que atraviesa la válvula de mariposa, y viceversa, como consecuencia de la dependencia directa del caudal de aire de la diferencia de presiones ([4] y [5]).

Considerando $\Phi(t)$ como el cociente de presiones entre la presión aguas arriba y aguas abajo de la mariposa, se tiene:

$$\Phi(t) = \frac{p(t)}{p_{in}(t)} = \frac{MAP}{p_{atm}} = \frac{p(t)}{p_{atm}} \quad (\text{Ec. 5.28})$$

Existe un valor de $\Phi(t)$ para el que, en la zona de mínima sección, el aire alcanza la máxima velocidad posible, la del sonido. Dicha presión es la denominada presión crítica de Laval [2], y se alcanza cuando:

$$\Phi_{cr} = \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad (\text{Ec. 5.29})$$

donde k es el exponente adiabático.

Como se considera el aire como un gas ideal, entonces $k \approx 1,4$. Por tanto, para dicho valor de k , Φ_{cr} toma el valor de 0,52828, de manera que $p_{cr} = 0,52828 p_{atm}$ para el caso del aire.

La velocidad del sonido es la máxima alcanzable por un fluido y, como se acaba de ver, para el caso del aire se alcanza cuando la relación de presiones es igual a 0,52828. Por tanto, cuando $\Phi(t) = \frac{p(t)}{p_{atm}} < 0,52828 = \Phi_{cr}(t)$, la velocidad es la sónica y $f(\Phi)$ no debe variar con $\Phi(t)$.

Cuando $\Phi_{cr}(t) < \Phi(t) < 1$, la velocidad del flujo de aire sí que será función de la diferencia de presiones y, por tanto, $f(\Phi)$ dependerá de $\Phi(t)$. Sin embargo, cuando $\Phi(t) < \Phi_{cr}(t)$, debido al efecto de tobera estrangulada la velocidad del aire es la del sonido y no puede aumentar más, por lo que el coeficiente $f(\Phi)$ no se verá modificado con reducciones adicionales de la presión (ver [1], [4] y [5]).

Por tanto, para grandes diferencias de presiones el coeficiente de velocidad es constante, mientras que para pequeñas diferencias dicho factor depende del coeficiente de presiones.

Todos estos efectos quedan reflejados en la expresión de Saint-Venant ([2], [15], [17] y [22]), que define el factor de presiones $f(\Phi)$ de la siguiente forma:

$$f(\Phi) = f\left(\frac{p(t)}{p_{atm}(t)}\right) = \begin{cases} \sqrt{2k \left(\Phi^{\frac{2}{k}} - \Phi^{\frac{k+1}{k}} \right)} & \text{para } \Phi_{cr} \leq \Phi \leq 1 \\ \sqrt{k} \left(\frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{2(k-1)}} & \text{para } \Phi \leq \Phi_{cr} \end{cases} \quad (\text{Ec. 5.30})$$

Dado que en este estudio se suponen gases ideales, $k = 1,4$. Entonces, la expresión anterior puede aproximarse a:

$$f(\Phi) = f\left(\frac{p(t)}{p_{atm}(t)}\right) = \begin{cases} \sqrt{2\Phi(1-\Phi)} & \text{para } 0,5 \leq \Phi \leq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{para } \Phi < 0,5 \end{cases} \quad (\text{Ec. 5.31})$$

El factor de sección $f(\alpha)$ representa la modificación de la sección de paso como consecuencia del giro de la mariposa que estrangula el paso del flujo de aire.

Dado que en $\dot{m}_\alpha^{max}$ se ha considerado $\frac{\pi D_{mar}^2}{4}$ como la máxima sección posible, al igual que en el caso del factor de presiones, el factor $f(\alpha)$ debe ser reductor. Además, como la geometría de paso depende de la proyección de la mariposa sobre el plano perpendicular al eje del conducto, dicho factor de sección será una función coseno.

Para el caso de un tubo cilíndrico con una mariposa articulada por su diámetro, como el dado en el presente proyecto, la expresión del coeficiente geométrico es la siguiente:

$$f(\alpha) = \left(1 - \frac{\cos(\alpha(t))}{\cos(\alpha_0)}\right) \quad (\text{Ec. 5.32})$$

donde α_0 es el ángulo cuando la mariposa se encuentra en la posición de ralentí. En el caso de válvulas de mariposa más complejas, con secciones no cilíndricas, será necesario buscar otra expresión que aproxime mejor la sección en función del ángulo de giro de la mariposa.

El valor del coeficiente de descarga será identificado experimentalmente en el Capítulo 7.

Sustituyendo las ecuaciones 5.27, 5.31 y 5.32 en la inicial (Ec. 5.25), se tiene:

$$\dot{m}_\alpha(\alpha, \Phi) = \frac{\pi D_{mar}^2}{4} \frac{p_{atm}}{\sqrt{RT(t)}} C_d \left(1 - \frac{\cos(\alpha(t))}{\cos(\alpha_0)}\right) f(\Phi) \quad (\text{Ec. 5.33})$$

Esta expresión no se cumple para ángulos grandes y velocidades bajas, ya que se produce un efecto de saturación debido a la pérdida de carga lineal en todo el conducto de admisión.

5.2.2.- Flujo de aire saliente del colector

Para la determinación del flujo que entra en los cilindros, $\dot{m}_{motor}(t)$, es necesario el conocimiento de que el motor estudiado se trata de uno de inyección indirecta, por lo que el combustible se inyecta en el colector de admisión después de la válvula de mariposa. De esta manera, lo que entra al cilindro a través de la válvula de admisión no es únicamente aire, sino que es una mezcla de aire y combustible. Así:

$$\dot{m}_{motor}(t) = \dot{m}_\beta(t) + \dot{m}_{H_2}(t) \quad (\text{Ec. 5.34})$$

donde $\dot{m}_{H_2}(t)$ es el flujo de combustible que entra al cilindro en la mezcla [kg/s].

El planteamiento para calcular $\dot{m}_{motor}(t)$ es similar al utilizado para el caudal de aire en la mariposa. Sin embargo, la determinación del área efectiva y del coeficiente de descarga de la válvula de admisión en cada instante es mucho más complicada, por tanto se trabaja con el rendimiento volumétrico. Éste se define como el cociente entre el volumen de mezcla admitido y el que teóricamente cabría en el cilindro para las condiciones de admisión ($p(t)$ y $T(t)$).

El caudal másico para un motor de cuatro tiempos, considerando gases ideales y que se produce una mezcla homogénea del aire y combustible antes de entrar a los cilindros, es:

$$\dot{m}_{motor}(t) = \rho_m(t) \dot{V}(t) = \frac{1}{2} \rho_m(t) V_D \frac{\omega_e(t)}{2\pi} \eta_v(p, \omega_e) = \frac{p_m(t)}{2 R_m T_m(t)} \frac{\omega_e(t)}{2\pi} \eta_v(p, \omega_e) \quad (\text{Ec. 5.35})$$

donde V_D cilindrada total del motor (volumen desplazado por el motor);
 $\omega_e(t)$ velocidad del motor en rad/s;
 η_v rendimiento volumétrico de la mezcla; y
 $p_m(t), R_m, T_m(t)$ parámetros relativos a la mezcla de aire-combustible.

El factor $\frac{1}{2}$ se debe a que, en un motor de cuatro tiempos, la renovación de la carga se produce cada dos vueltas.

Para la determinación de los parámetros relativos a la mezcla (R_m y $T_m(t)$), se asume que se produce una mezcla perfecta y adiabática [2]. Entonces:

$$R_m = \frac{\dot{m}_\beta(t) R_\beta + \dot{m}_{H_2}(t) R_{H_2}}{\dot{m}_\beta(t) + \dot{m}_{H_2}(t)} \quad (\text{Ec. 5.36})$$

$$T_m(t) = \frac{\dot{m}_\beta(t) c_{p\alpha} T_\beta(t) + \dot{m}_{H_2}(t) c_{pH_2} T_{H_2}(t)}{\dot{m}_\beta(t) c_{p\alpha} + \dot{m}_{H_2}(t) c_{pH_2}} \quad (\text{Ec. 5.37})$$

Para el caso particular del hidrógeno, debido a la baja fracción másica que supone el H_2 frente al aire, se tiene que:

$$R_m \approx R_{aire} = R_\beta \quad (\text{Ec. 5.38})$$

$$T_m(t) \approx T_{aire}(t) = T_\beta(t) \quad (\text{Ec. 5.39})$$

Por tanto, sustituyendo en la (Ec. 5.35) se tiene:

$$\dot{m}_{motor}(t) = \frac{p(t)}{R_\beta T_\beta(t)} V_D \frac{\omega_e(t)}{4\pi} \eta_v(p, \omega_e) \quad (\text{Ec. 5.40})$$

Sin embargo, lo que interesa conocer es el flujo de aire que sale del colector y entra en los cilindros $\dot{m}_\beta(t)$, y no $\dot{m}_{motor}(t)$, el cual también está formado por el caudal de combustible.

Por tanto, el caudal de aire que sale del colector de admisión y entra a los cilindros es el caudal de mezcla que entra a los cilindros, $\dot{m}_{motor}(t)$, menos el flujo de combustible que entra con dicha mezcla, suponiendo que todo el hidrógeno inyectado entra en los cilindros:

$$\dot{m}_\beta(t) = \frac{p(t)}{R T(t)} V_D \frac{\omega_e(t)}{4\pi} \eta_v(p, \omega_e) - \dot{m}_{H_2}(t) \quad (\text{Ec. 5.41})$$

donde $R, T(t)$ y $p(t)$ parámetros relativos al aire en el colector, y no a la mezcla.

5.2.3.- Determinación del caudal de combustible

La suposición de que todo el combustible inyectado entra en los cilindros se puede tomar como válida, ya que tanto la dirección hacia la que apuntan los inyectores como los ángulos de inyección establecidos en este motor han sido optimizados para que la mayor parte del hidrógeno inyectado entre a los cilindros a través de las válvulas de admisión. Además, cuando el sistema se encuentra en estado estacionario, la porción de hidrógeno remanente en el colector de admisión en un ciclo entrará a los cilindros en el siguiente.

Para calcular el flujo de combustible $\dot{m}_{H_2}$, hay que estudiar más a fondo el sistema de inyección del hidrógeno, que depende del tipo de inyector utilizado y de otros factores.

La variable principal de la inyección es el tiempo de inyección, t_i . Como el inyector es un sistema mecánico, existe un intervalo de tiempo, denominado tiempo muerto, t_{0iny} , durante el cual el inyector debe vencer las inercias. Además, dado que la apertura y cierre de la aguja troncocónica inyectora no es instantánea, durante dichos procesos se inyectará menos masa de combustible. En la Figura 5.3 se aprecia la forma de la función de inyección, la cual está compuesta por una rampa ascendente inicial seguida por el grueso de la inyección a flujo máximo y, por último, otra rampa descendente hasta el cese total de la inyección.

Por otro lado, el tiempo de inyección no podrá ser tan grande como se quiera, sino que vendrá limitado por el tiempo disponible para la inyección. Dicho tiempo está, a su vez, condicionado por los ángulos de distribución de las válvulas y el momento en el que se produce la inyección. En el caso concreto del motor en estudio, desde que el pistón parte del PMS, se dispone de 195° de giro de cigüeñal para poder llevar a cabo la inyección, lo cual equivale a 18 ms al régimen de 1800 rpm.

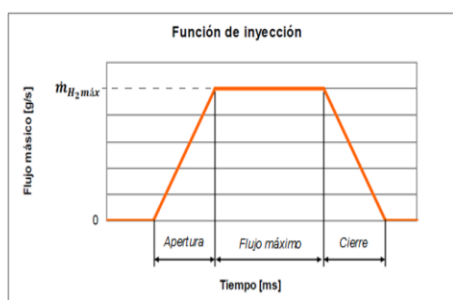


Figura 5.3.- Función de inyección de los inyectores

Otros factores que influirán directa o indirectamente en la inyección, son la presión a la que opera el inyector, el régimen de giro, el dosado y otros condicionantes del proceso.

La presión de operación de los inyectores de hidrógeno instalados es igual a 300 kPa, o 3 bares. Con esta presión de inyección se puede abarcar un mayor rango de dosados relativos, puesto que, cuanto mayor sea la presión de inyección, mayor cantidad de combustible podrá inyectarse en un determinado intervalo de tiempo.

Teniendo en cuenta las restricciones citadas anteriormente, la expresión que determina la masa de combustible inyectado es la que se muestra a continuación (Ec. 5.42), y tal y como se aprecia en la misma, dicha masa será linealmente proporcional al tiempo de inyección menos el tiempo muerto, durante el cual no se produce aportación de combustible.

$$m_{H_2}(t) = K_{iny} (t_i(t) - t_{0iny}) \quad (\text{Ec. 5.42})$$

Donde $m_{H_2}(t)$ está en $[mg/ciclo]$ y K_{iny} y t_{0iny} son constantes que dependen del tipo de inyector utilizado. Los valores de estas constantes se obtendrán mediante la realización de ensayos experimentales, los cuales se describen en el Capítulo 7 del presente proyecto.

Dado que se considera un proceso continuo en el que se trabaja con flujos y no masas, el flujo de combustible inyectado sale de multiplicar la masa de fuel inyectado en cada ciclo por el régimen del motor [22]. Como en motores de cuatro tiempos y cuatro cilindros se producen dos inyecciones por vuelta, es necesaria la aplicación de un factor multiplicador igual a 2.

Por tanto, el flujo de hidrógeno inyectado en [kg/s] será:

$$\dot{m}_{H_2}(t) = m_{H_2} n(t) 2 \frac{1}{60} 10^{-6} = 3,333 \cdot 10^{-8} m_{H_2}(t) n(t) \quad (\text{Ec. 5.43})$$

Dado que durante el modelado se ha considerado la velocidad del motor en radianes por segundo $\omega_e[\text{rad/s}]$, en lugar de revoluciones por minuto $n[\text{rpm}]$, se realiza el cambio de nomenclatura siguiente, en el cual el caudal de combustible sigue estando en [kg/s]:

$$\dot{m}_{H_2}(t) = m_{H_2}(t) \omega_e(t) 2 \frac{1}{2\pi} 10^{-6} = 3,183 \cdot 10^{-7} m_{H_2}(t) \omega_e(t) \quad (\text{Ec. 5.44})$$

5.2.4.- Determinación del rendimiento volumétrico de la mezcla

El rendimiento volumétrico es un coeficiente que muestra la calidad del llenado de los cilindros, de manera que cuanto mayor sea el valor del mismo más se acercará la cantidad de mezcla alimentada al motor a la teórica que podría llegar a entrar.

En el hipotético caso de un proceso ideal de renovación de la carga, la masa alimentada al motor sería la correspondiente al volumen desplazado por el pistón en las condiciones de presión y temperatura dadas. En este caso (según [3] y [9]) se cumpliría que:

- La velocidad del pistón es lo suficientemente lenta para que los fenómenos de inercia se desprecien.
- El proceso es adiabático, por lo que no se produce transferencia de calor al fluido entrante, ni por parte del motor, ni por la de los gases residuales de la combustión.
- Presión y temperatura constantes durante la admisión.
- La presión del escape se mantiene constante e igual a la exterior.
- Las válvulas se abren y cierran instantáneamente en los puntos muertos.

Sin embargo, en la realidad no se cumplen estas condiciones, y por eso la masa de fluido que entra al motor es menor que la de referencia. Así, en el caso real ocurre que:

- La velocidad del pistón no es lenta, por lo que se producirán fenómenos de inercia importantes.
- Existe transferencia de calor entre los gases residuales y los gases frescos, así como entre estos últimos y las paredes de los conductos de admisión.
- La presión es menor que la de referencia debido a las pérdidas de carga y la temperatura será mayor.
- Las válvulas no se abren y se cierran instantáneamente.

El rendimiento volumétrico depende de numerosos factores de diseño y operativos tales como las condiciones ambientales, el diagrama de distribución del motor, el diseño del colector de admisión y de las válvulas, el combustible, etc. Sin embargo, como se verá en este apartado, los dos factores que más afectan al rendimiento volumétrico son el régimen de giro y la relación entre la presión de escape y la presión de admisión en función de la relación de compresión.

A continuación se realizará una breve descripción de cómo afecta cada uno de estos factores al rendimiento volumétrico.

Condiciones ambientales

La presión exterior apenas influye en el llenado, pero la temperatura exterior sí que afecta, de forma que, a mayor temperatura exterior, el rendimiento volumétrico crece con la raíz cuadrada de ésta. Sin embargo, al aumentar la temperatura exterior disminuye la masa de aire admitido al motor como consecuencia de que dicha masa es proporcional al producto de la densidad por el rendimiento volumétrico.

En lo que respecta a la humedad del aire ambiental, ésta sí que influye en el rendimiento volumétrico, ya que provoca la disminución de la presión parcial del aire.

Diagrama de distribución

Optimizando el diagrama de distribución se mejora el llenado del motor y, además, se consigue disminuir el trabajo de bombeo. Para conseguir dicha optimización es necesario conseguir un A.A.A. tal que garantice la admisión franca cuando se inicia la carrera de admisión. A su vez, un R.C.A. mejora el rendimiento volumétrico debido a que mejora el llenado como consecuencia de la inercia de la columna gaseosa y por el efecto de la compresibilidad del fluido por el rápido descenso del pistón en la carrera de admisión. Por tanto, para altas revoluciones con A.A.A. y R.C.A. grandes se consigue una mejora del rendimiento, mientras que a bajas revoluciones puede ocurrir retroceso de gases frescos por la válvula de admisión, por lo que interesan ángulos más pequeños.

En lo que respecta a los ángulos de escape, el A.A.E. es necesario para evitar sobrepresiones en la carrera de escape, mientras que el R.C.E. interesa por el efecto de la inercia de los productos quemados.

Diseño del colector y válvulas de admisión

Dado que el flujo a través del motor no es continuo, sino pulsatorio, el hecho de que el fluido sea compresible hace que la inercia tenga repercusión en el llenado. Por tanto, la geometría del colector de admisión debe ser tal que aproveche dicha inercia para mejorar el rendimiento volumétrico. En concreto, a bajas revoluciones, interesa que el conducto sea largo y estrecho, mientras que a altas revoluciones interesa uno más corto y ancho. En la actualidad existen algunos modelos de motores que disponen de un colector de admisión que, por medio de una mariposa, logran modificar el curso del aire de la admisión hacia conductos de geometrías diferentes para los distintos regímenes del motor.

En lo que respecta al diseño de las válvulas de admisión, para mejorar el llenado, y por tanto el rendimiento volumétrico, en motores lentos interesan válvulas de secciones de paso reducidas, mientras que en motores rápidos convienen secciones mayores.

Combustible

Al hablar de la influencia del combustible, e indirectamente de λ , en el rendimiento volumétrico hay que determinar primeramente con qué rendimiento volumétrico se está trabajando. Este hecho es importante, ya que si se está analizando el rendimiento volumétrico de la mezcla, entonces este rendimiento no variará con λ . Sin embargo, si se trabaja con rendimiento volumétrico relativo al aire seco, entonces sí que influye el valor de λ , ya que cuanto más combustible inyectemos, éste ocupa más volumen y hace que entre menos aire en los cilindros.

Para este último caso, al aumentar el dosado aumenta la temperatura de los gases residuales, por lo que el aire de admisión se calienta más, dilatándose y disminuyendo el rendimiento.

En motores de gasolina convencionales el dosado varía muy poco, por lo que apenas tiene influencia en el rendimiento. El efecto que más influye con este tipo de combustible es la vaporización del combustible, la cual provoca un enfriamiento del aire de admisión que conlleva un aumento de la cantidad de aire admitida. Sin embargo, para combustibles gaseosos como el hidrógeno (el caso en el que se centra el presente proyecto) la cantidad de combustible inyectado tiene una gran influencia en el rendimiento volumétrico relativo al aire seco, ya que, al tratarse de un gas de muy baja densidad, un aumento de la cantidad de combustible inyectado hace que entre mucho menos aire a los cilindros.

En el modelado que se está realizando en este Proyecto Fin de Carrera se ha considerado el rendimiento volumétrico relativo a la mezcla, por lo que λ no debería influir en él. Sin embargo, en el Capítulo 7, en el apartado dedicado a la identificación del rendimiento volumétrico, se realizará un estudio más intenso de la influencia del valor de λ en el rendimiento volumétrico relativo al aire seco.

Régimen de giro

Al aumentar el régimen de giro del motor el rendimiento volumétrico crece hasta un máximo y a continuación disminuye. Dicho máximo se suele dar, aproximadamente, en el régimen en el que produce el máximo de la curva de par, que en el motor en estudio ronda las 3800 rpm.

La curva característica de la dependencia del rendimiento volumétrico con el régimen del motor se debe fundamentalmente al rozamiento del fluido con las paredes de los conductos, que dan lugar a pérdidas de carga proporcionales al cuadrado de la velocidad, y a la compresibilidad del fluido, que hace que parte de la energía cinética del fluido se pierda por fricción en el interior del cilindro.

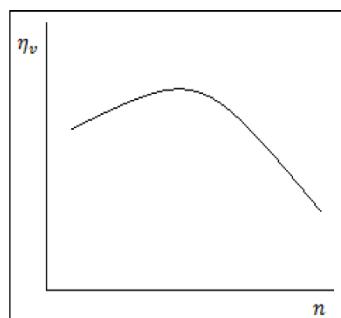


Figura 5.4.- Evolución del rendimiento volumétrico con el régimen

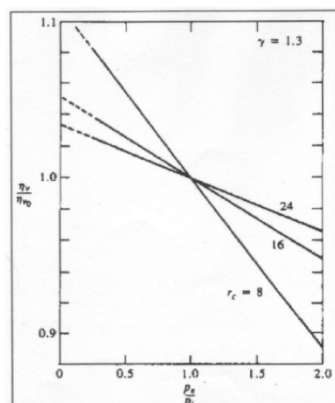


Figura 5.5.- Evolución del rendimiento volumétrico con la relación de presiones y la relación de compresión

Relación entre presiones y relación de compresión

Cuando varían la relación entre la presión de escape y la presión de admisión y la relación de compresión, r , se produce una variación del volumen que ocupan los gases residuales a la presión de admisión. Si dicho volumen aumenta, entonces el rendimiento volumétrico disminuirá, y si el volumen decrece, el rendimiento aumentará. Esta influencia se aprecia en la Figura 5.5.

Como resumen de los efectos estáticos y dinámicos que afectan al rendimiento volumétrico, cabe señalar que a regímenes altos, la alta velocidad del fluido, llegando a ser igual a la velocidad del sonido, hace que el flujo de aire admitido apenas aumente con el aumento de las revoluciones, por lo que el rendimiento volumétrico disminuye. Es el efecto de la compresibilidad del fluido.

Por otra parte, el efecto de la inercia a regímenes altos hace mejorar el rendimiento debido al retraso al cierre de la admisión, mientras que a regímenes bajos, esto provoca un retroceso de los gases frescos del cilindro hacia el colector de admisión.

El motor en estudio tiene un diagrama de distribución fijo para todo el rango de revoluciones, así como un colector de admisión sin capacidad de modificar su geometría. Además, teniendo en cuenta que el rendimiento volumétrico que se estudia en este modelado es el relativo a la mezcla y, por tanto, no le afecta la variación de λ , se puede considerar que los dos únicos parámetros que afectan al rendimiento volumétrico de la mezcla son el régimen de revoluciones y la relación de presiones.

Esta dependencia puede ser representada como sigue:

$$\eta_v(p, \omega_e) = \eta_{vp}(p) \eta_{vw}(\omega_e) \quad (\text{Ec. 5.45})$$

Para un ciclo Otto ideal asumiendo gases perfectos y procesos isentrópicos, la parte dependiente de la presión puede aproximarse a:

$$\eta_{vp}(p) = \frac{V_c + V_D}{V_D} - \left(\frac{p_{esc}}{p(t)} \right)^{\frac{1}{k}} \frac{V_c}{V_D} \quad (\text{Ec. 5.46})$$

donde V_c volumen del cilindro en el PMS (volumen de la cámara de combustión);
 p_{esc} presión a la salida del motor. Se considera constante e igual a la atmosférica.

Esta expresión empírica representa la disminución del rendimiento volumétrico como consecuencia del efecto, mencionado anteriormente, de salida de mezcla sin combustionar por las válvulas de admisión durante el cruce de válvulas [2].

Por otro lado, en lo que respecta a la parte del rendimiento dependiente de la velocidad, ésta varía de forma cuadrática con la velocidad, de modo que:

$$\eta_{vw}(\omega_e) = k_0 + k_1 \omega_e(t) + k_2 \omega_e(t)^2 \quad (\text{Ec. 5.47})$$

Recurriendo a la literatura ([15] y [22]), se ha encontrado otra expresión alternativa a las dos anteriores para el rendimiento volumétrico. Dicha expresión fue determinada empíricamente por Servati y Hendricks y considera que, al igual que con la velocidad, el rendimiento volumétrico depende cuadráticamente de la presión de los gases a la entrada del motor:

$$\eta_v(\omega_e, p) = k_0 + k_1 \omega_e(t) + k_2 \omega_e(t)^2 + k_3 p(t) + k_4 p(t)^2 \quad (\text{Ec. 5.48})$$

Dado que el valor del rendimiento volumétrico no es conocido, en el Capítulo 7 se procederá a la identificación experimental del mismo.

5.2.5.- Expresión final

Sustituyendo todas estas expresiones descritas anteriormente en el balance de masa inicial (Ec. 5.23), se tiene que:

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{R T(t)}{V} \left[\frac{\pi D_{mar}^2}{4} \frac{p_{atm}}{\sqrt{R T(t)}} C_d \left(1 - \frac{\cos(\alpha(t))}{\cos(\alpha_0)} \right) f(\Phi) - \left[\frac{p(t)}{R T(t)} V_D \frac{\omega_e(t)}{4\pi} \left[\frac{V_c + V_D}{V_D} - \left(\frac{p_{esc}}{p(t)} \right)^{\frac{1}{k}} \frac{V_c}{V_D} \right] [k_0 + k_1 \omega_e(t) + k_2 \omega_e(t)^2] - \dot{m}_{H_2}(t) \right] \right] \quad (\text{Ec. 5.49})$$

5.3.- Modelado del subsistema mecánico

Para la realización del modelado de la velocidad de giro del motor, en primer lugar, se asume que la inercia del motor tiene un valor constante. Además, se considera el volante de inercia como el único elemento del subsistema mecánico que puede almacenar energía cinética [21].

La ecuación diferencial que define la dinámica del motor es:

$$I \frac{d\omega_e(t)}{dt} = M_e(t) - M_c(t) \quad (\text{Ec. 5.50})$$

donde I momento de inercia del motor [kg m^2];

$M_e(t)$ par motor o par efectivo [Nm]; y

$M_c(t)$ par de carga o par resistente [Nm].

Se ha comentado anteriormente que el momento de inercia tiene un valor constante, pero no es conocido, al igual que el par resistente, por lo que es necesaria la determinación de sus valores mediante la realización de ensayos. Dicha identificación se realiza en el Capítulo 7 del presente proyecto.

Una vez conocidos los valores de la inercia del motor y del par de carga o resistente (que en el ralentí será cero), sólo queda la determinación del valor del par motor o par efectivo.

5.3.1.- Par motor

El par motor efectivo es el par que se obtiene en el eje del cigüeñal del motor. Para comprender su expresión hay que partir del ciclo indicado del motor.

El ciclo indicado del motor muestra la variación de la presión en el cilindro en las distintas etapas del ciclo de trabajo del motor, representándose en una gráfica V-P. Así, para un motor de 4 tiempos, se observan dos áreas definidas. El área superior representa el trabajo neto realizado por el fluido de trabajo en las carreras de compresión y combustión-expansión. Mientras que el área inferior representa el trabajo de bombeo realizado por el fluido en las etapas de admisión y escape. Este trabajo de bombeo es negativo y se considera como una pérdida mecánica [3].

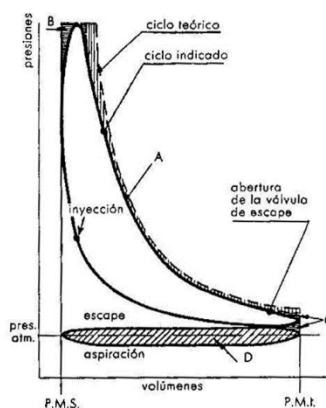


Figura 5.6.- Diagrama del ciclo indicado típico de un motor de gasolina [3]

Se llama A_i [J] al área del lazo de potencia, de manera que se cumple que la potencia indicada queda:

$$N_i = \frac{1}{2} A_i \omega_e(t) = \frac{1}{2} p_{mi}(t) V_d Z \omega_e(t) \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{4\pi} p_{mi}(t) V_D \omega_e(t) \quad (\text{Ec. 5.51})$$

donde N_i potencia indicada [W];
 $p_{mi}(t)$ presión media indicada;
 V_d cilindrada unitaria del motor [m³];
 Z número de cilindros;
 V_D cilindrada total del motor [m³]; y
 $\omega_e(t)$ velocidad del motor (en rad/s).

El factor $\frac{1}{2}$ se debe a que cada ciclo completo se desarrolla en dos vueltas del motor.

Por definición, la potencia es igual al par multiplicado por la velocidad:

$$N = M \omega \quad (\text{Ec. 5.52})$$

donde N potencia [W];
 M par [Nm]; y
 ω velocidad angular [rad/s].

Por tanto, dividiendo la expresión anterior entre la velocidad se obtiene el par indicado del motor:

$$M_i(t) = \frac{1}{4\pi} p_{mi}(t) V_D \quad (\text{Ec. 5.53})$$

El par efectivo es igual al par indicado menos el par de pérdidas, de manera que se tiene que:

$$\eta_m = \frac{M_e}{M_i} = \frac{p_{mi}(t) - p_{mpm}(t)}{p_{mi}(t)} = \frac{p_{me}(t)}{p_{mi}(t)} \quad (\text{Ec. 5.54})$$

Donde M_e par efectivo;
 $p_{mpm}(t)$ potencia media debida a las pérdidas mecánicas; y
 $p_{me}(t)$ potencia media efectiva.

Como se puede observar, estudiar el par indicado y efectivo es lo mismo que estudiar las presiones medias indicada y efectiva.

Así, según la expresión anterior, el par efectivo o par motor es:

$$M_e(t) = \frac{1}{4\pi} p_{me}(t) V_D \quad (\text{Ec. 5.55})$$

Utilizando la aproximación de Willans [2], la cual distingue entre la contribución de los efectos internos y externos en la eficiencia del motor, se tiene:

$$p_{me}(t) = e(m_\phi, \omega_e, \lambda, x_{egr}, \zeta, \dots) \cdot p_{mH_2}(t) - p_{me0}(\omega_e, \dot{m}_\beta, \dots) \quad (\text{Ec. 5.56})$$

La eficiencia termodinámica e , representa las propiedades termodinámicas del motor, mientras que p_{me0} incorpora las pérdidas por fricción e intercambio de gases.

El término p_{mH_2} es la presión media efectiva del combustible, que es aquella presión media efectiva que produciría un motor, con una eficiencia igual a uno, con una masa de combustible por ciclo igual a m_{H_2} :

$$p_{mH_2}(t) = \frac{H_l m_{H_2}(t)}{V_D} \quad (\text{Ec. 5.57})$$

donde H_l poder calorífico inferior del combustible
 $m_{H_2}(t)$ masa de combustible quemada por ciclo

La relación entre m_{H_2} y $\dot{m}_{H_2}$ viene dada por:

$$\dot{m}_{H_2}(t) = m_{H_2}(t) \frac{\omega_e(t)}{4\pi} \quad (\text{Ec. 5.58})$$

En lo que se refiere a las pérdidas externas, se considera que todas ellas están producidas por los efectos de la fricción en el motor y por el trabajo de bombeo requerido durante el proceso de intercambio de gases. Así:

$$p_{me0}(\omega_e, \dot{m}_\beta, T_e, \dots) = p_{me0f}(\omega_e, \dot{m}_\beta, \dots) + p_{me0g}(p) \quad (\text{Ec. 5.59})$$

donde, para el caso de cargas pequeñas (como por ejemplo en el ralentí), se cumple que:

$$p_{me0g}(t) = p_{esc} - p(t) \quad (\text{Ec. 5.60})$$

La expresión que hace referencia a la fricción del motor de manera empírica [2], viene dada por:

$$p_{me0f} = (\beta_0 + \beta_1 \omega_e(t)^2) \frac{4\pi}{V_D} \quad (\text{Ec. 5.61})$$

La eficiencia termodinámica representa las pérdidas internas, y puede descomponerse como sigue:

$$e(\omega_e, \lambda, x_{egr}, \zeta, \dots) = e_\omega(\omega_e) \cdot e_\lambda(\lambda) \cdot e_\zeta(\zeta) \cdot e_{egr}(x_{egr}) \quad (\text{Ec. 5.62})$$

El factor $e(\lambda)$ representa la influencia de la variación del dosado en la eficiencia termodinámica. Si la mezcla es rica, la combustión incompleta y otros factores reducirán sustancialmente la eficiencia termodinámica. En cambio, si la mezcla es pobre, habrá suficiente oxígeno para que la combustión sea completa, por lo que la eficiencia no se verá afectada. Por último, para mezclas intermedias, se producirá una transición suave [2].

El comportamiento de dicho término viene dado por:

$$e_\lambda(\lambda) = \begin{cases} k_{\lambda 1} \lambda - k_{\lambda 0} & \text{para } \lambda_{min} < \lambda < \lambda_1 \\ e_{\lambda,1} + (1 - e_{\lambda,1}) \sin\left(\frac{\lambda - \lambda_1}{1 - \lambda_1}\right) & \text{para } \lambda_1 < \lambda < \lambda_2 \\ 1 & \text{para } \lambda_2 < \lambda < \lambda_{max} \end{cases} \quad (\text{Ec. 5.63})$$

donde $e_{\lambda,1} = k_{\lambda 1} \lambda_1 - k_{\lambda 0}$ y $\lambda_2 = \lambda_1 + \frac{\pi}{2} (1 - \lambda_1)$

$e_\zeta(\zeta)$ indica la influencia del instante de la ignición en la eficiencia termodinámica. Se considera que hay un avance al encendido óptimo denotado por $\zeta_0(\omega_e, p_{me})$, de manera que:

$$e_\zeta(\zeta) = 1 - k_\zeta (\zeta - \zeta_0(\omega_e, p_{me}))^2 \quad (\text{Ec. 5.64})$$

Para este caso concreto se considera que $e_{\zeta}(\zeta) = 1$, ya que durante la realización del presente proyecto no se van a tener en cuenta las modificaciones del avance al encendido.

Posiblemente, ésta será la suposición que más repercusiones tendrá en los resultados finales de este trabajo, ya que en la realidad la variación del avance al encendido provoca cambios importantes en la dinámica del sistema.

Como se verá en el capítulo de las futuras líneas de investigación, una posible mejora de este trabajo de investigación sería incorporar al mismo la consideración de la variación del avance al encendido y el estudio de la misma.

Volviendo al estudio de los diferentes factores que influyen en la eficiencia termodinámica del motor, el término $e_{egr}(x_{egr})$ muestra la influencia de la fracción de gases de escape recirculados al colector de admisión en la eficiencia termodinámica.

La EGR (*exhaust-gas recirculation*) reduce la formación de óxido de nitrógeno, pero afecta negativamente a la eficiencia termodinámica, de manera que aumentando la EGR, se produce una reducción de la velocidad de combustión, lo que conlleva una disminución de la eficiencia.

Dicha reducción de la velocidad de combustión tiene una mayor influencia negativa a altas velocidades del motor, dado que los intervalos en los que se realizan los ciclos son menores. Por tanto, $e_{egr}(x_{egr})$ dependerá de la velocidad de giro del motor de la siguiente forma:

$$e_{egr}(x_{egr}) = 1 - k_{egr,1} (1 + k_{egr,2} \omega_e(t)) x_{egr}^2 \quad (\text{Ec. 5.65})$$

$$\text{donde } x_{egr} = \frac{m_{m,egr}(t)}{m_m(t)} = \frac{m_{m,egr}(t)}{(m_{m,a}(t) + m_{m,egr}(t))} = \frac{\dot{m}_{\beta,egr}(t)}{\dot{m}_{\beta}(t)}$$

En el ralentí, el valor de x_{egr} es cero o cercano a cero. Es decir, no hay apenas recirculación de gases de escape.

El motor en estudio no posee recirculación de gases de escape, por lo que $e_{egr}(x_{egr}) = 1$ para el caso concreto de este Proyecto Fin de Carrera.

Por otro lado, en lo que respecta a la variación de la eficiencia termodinámica con el régimen, a velocidades bajas la eficiencia se reducirá notablemente debido a las grandes pérdidas de calor a través de las paredes, mientras que a velocidades muy altas, los grandes tiempos de combustión en comparación con el intervalo disponible en la carrera de expansión, también provocarán una reducción de la eficiencia termodinámica.

El término $e_{\omega}(\omega_e)$ depende linealmente de la velocidad de giro del motor según la referencias [2] y [22], así que:

$$e_{\omega}(\omega_e) = k_{\omega 0} + k_{\omega 1} \omega_e(t) \quad (\text{Ec. 5.66})$$

Este $e_{\omega}(\omega_e)$ será notablemente inferior a 1, ya que incorpora los principales mecanismos termodinámicos. Mientras que, como ya se ha explicado anteriormente, la mayor parte del resto de términos son prácticamente iguales a 1 y no afectan tanto a la eficiencia termodinámica.

El único factor que afectará de forma significativa a la eficiencia termodinámica, además del régimen, será el correspondiente a λ , ya que no siempre se trabajará con mezclas pobres a lo largo de la realización del presente proyecto.

Por tanto, la expresión que representa la eficiencia termodinámica, o rendimiento indicado, será el producto de las expresiones de λ (Ec. 5.63) y del régimen de giro (Ec. 5.66).

Sustituyendo todas estas expresiones en la de la presión media efectiva (Ec. 5.56), se llega a la siguiente expresión:

$$p_{me}(t) = \left[\frac{H_l 4\pi \dot{m}_{H_2}(t)}{V_D \omega_e(t)} e_\omega(\omega_e) e_\lambda(\lambda) \right] - (\beta_0 + \beta_1 \omega_e(t)^2) \frac{4\pi}{V_D} - (p_{esc} - p(t)) \quad (\text{Ec. 5.67})$$

Y, dado que $e_\omega(\omega_e) e_\lambda(\lambda)$ es la eficiencia termodinámica y $(\beta_0 + \beta_1 \omega_e(t)^2) \frac{4\pi}{V_D} + (p_{esc} - p(t))$ representa las pérdidas mecánicas, utilizando el rendimiento indicado y el rendimiento mecánico con el fin de simplificar la nomenclatura y facilitar la identificación de dichos parámetros, se tiene:

$$p_{me}(t) = \frac{H_l 4\pi \dot{m}_{H_2}(t)}{V_D \omega_e(t)} \eta_i \eta_m \quad (\text{Ec. 5.68})$$

Así que, sustituyendo la (Ec. 5.68) en la (Ec. 5.55) el par efectivo queda:

$$M_e(t) = \frac{1}{4\pi} p_{me}(t) V_D = \frac{H_l \dot{m}_{H_2}(t)}{\omega_e(t)} \eta_i \eta_m = \frac{H_l \dot{m}_{H_2}(t)}{\omega_e(t)} \eta_e \quad (\text{Ec. 5.69})$$

Otra expresión válida para el par motor efectivo, que es la que se va a utilizar en posteriores capítulos del presente proyecto, considera el par efectivo como el par indicado del motor menos el par de pérdidas mecánicas [21], de modo que:

$$M_e(t) = M_i(t) - M_{pm}(t) \quad (\text{Ec. 5.70})$$

Y por el mismo razonamiento llevado a cabo anteriormente con el rendimiento efectivo, el par indicado puede descomponerse de la siguiente forma:

$$M_i(t) = \frac{H_l \dot{m}_{H_2}(t)}{\omega_e(t)} \eta_i - M_{pm}(t) \quad (\text{Ec. 5.71})$$

De esta forma, conociendo el rendimiento indicado del motor y el par de pérdidas para cada estado de funcionamiento es posible conocer el par motor efectivo.

Como ya se ha comentado anteriormente (Ec. 5.59), el par de pérdidas mecánicas es la suma del par de pérdidas por fricción más el par de pérdidas por bombeo, por lo que será igual a:

$$M_{pm}(t) = \frac{V_D}{4\pi} (p_{me0f}(t) + p_{me0g}(t)) \quad (\text{Ec. 5.72})$$

Como se verá en el Capítulo 7, la parte de las pérdidas relativas a la fricción será identificada de forma experimental, mientras que para el caso de las pérdidas por bombeo se utilizará la expresión definida en este modelado (Ec. 5.60).

En el caso de que se quiera obtener la expresión del par motor en función del caudal de aire, simplemente basta con conocer que el flujo másico de combustible está relacionado con el caudal de aire que entra a los cilindros $\dot{m}_\beta$, por medio del dosado, de la siguiente manera (ver [23] y [24]):

$$\frac{\dot{m}_{H_2}(t)}{\dot{m}_\beta(t)} = F = F_e F_R \quad (\text{Ec. 5.73})$$

donde F dosado
 F_R dosado relativo; y
 F_e dosado estequiométrico.

La reacción estequiométrica de la combustión del hidrógeno viene dada por:



Por tanto, teniendo en cuenta los pesos moleculares:

$$2 \text{ g de } H_2 \rightarrow \frac{1}{2}(16 \cdot 2 + 3,76 \cdot 14 \cdot 2) \text{ g de aire} \quad (\text{Ec. 5.75})$$

$$1 \text{ g de } H_2 \rightarrow 34,32 \text{ g de aire} \quad (\text{Ec. 5.76})$$

Por lo que, por cada gramo de hidrógeno, se necesitan 34,32 gramos de aire, es decir, el dosado estequiométrico F_e es igual a $\frac{1}{34,32}$.

De esta manera se tiene que:

$$\frac{\dot{m}_\beta(t)}{34,32 \dot{m}_{H_2}(t)} = \frac{1}{F_R} = \lambda(t) \quad (\text{Ec. 5.77})$$

Introduciendo esta expresión en la del par efectivo (Ec. 5.71), se tiene:

$$M_e(t) = \frac{H_l \dot{m}_{H_2}(t)}{\omega_e(t)} \eta_i - M_{pm}(t) = \frac{\dot{m}_\beta(t)}{34,32 \lambda(t)} \frac{H_l}{\omega_e(t)} \eta_i - M_{pm}(t) \quad (\text{Ec. 5.78})$$

5.3.2.- Expresión final

Sustituyendo la ecuación del par efectivo en la ecuación diferencial inicial (Ec. 5.50) se tiene la siguiente expresión:

$$\frac{d\omega_e(t)}{dt} = \frac{1}{I} \left[\frac{\dot{m}_\beta(t)}{34,32 \lambda(t)} \frac{H_l}{\omega_e(t)} \eta_e - M_c(t) \right] \quad (\text{Ec. 5.79})$$

O lo que es lo mismo, considerando la (Ec. 5.78), la expresión final queda:

$$\frac{d\omega_e(t)}{dt} = \frac{1}{I} \left[\frac{\dot{m}_\beta(t)}{34,32 \lambda(t)} \frac{H_l}{\omega_e(t)} \eta_i - M_{pm}(t) - M_c(t) \right] \quad (\text{Ec. 5.80})$$

Para el caso concreto del ralentí, el par de carga será igual a 0, por lo que la expresión final anterior se verá reducida a la siguiente:

$$\frac{d\omega_e(t)}{dt} = \frac{1}{I} \left[\frac{\dot{m}_\beta(t)}{34,32 \lambda(t)} \frac{H_l}{\omega_e(t)} \eta_i - M_{pm}(t) \right] \quad (\text{Ec. 5.81})$$

Por tanto, al acelerar en vacío en el ralentí el régimen aumentará hasta el momento en el que el par de pérdidas mecánicas se iguale con el par indicado del motor, en el cual la derivada de la velocidad será nula. Es decir, cuando ambos pares se igualen se producirá la estabilización de la velocidad de giro del motor.

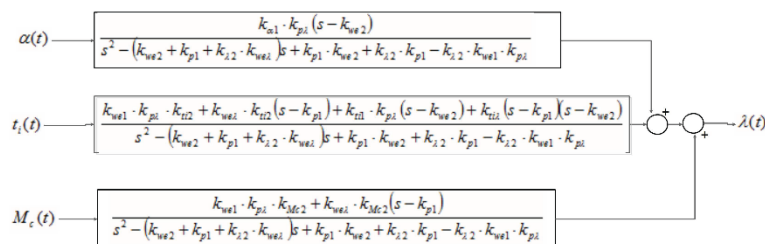


Figura 6.21.- Reducción del diagrama de bloques para lambda (9)

Al igual que lo ocurrido anteriormente con $\omega_e(t)$, tras la reducción del diagrama de bloques de lambda como salida se obtienen tres bloques sumados que representan las tres funciones de transferencia que relacionan cada una de las entradas con la salida. Para este caso también se obtienen denominadores iguales en las tres funciones de transferencia, por lo que los polos que definen la dinámica de dicha salida son iguales para las tres funciones de transferencia.

Por otro lado, en lo referido a los ceros, las entradas de la mariposa y par de carga están relacionadas con lambda por funciones de transferencia con un cero, mientras que la correspondiente al tiempo de inyección posee dos ceros (función de transferencia propia). Esto provoca que, inicialmente, la respuesta de la salida ante un escalón del tiempo de inyección sea instantánea, y posteriormente pasa a tener una dinámica más lenta. Este hecho se aprecia en el Capítulo 9 en los resultados de la simulación.

6.6.3.- Reducción del diagrama para p(t)

Al igual que para el caso de $\omega_e(t)$ y $\lambda(t)$, el diagrama de bloques inicial es igual al diagrama obtenido de la linealización despreciando las condiciones iniciales que aparece en la Figura 6.5:

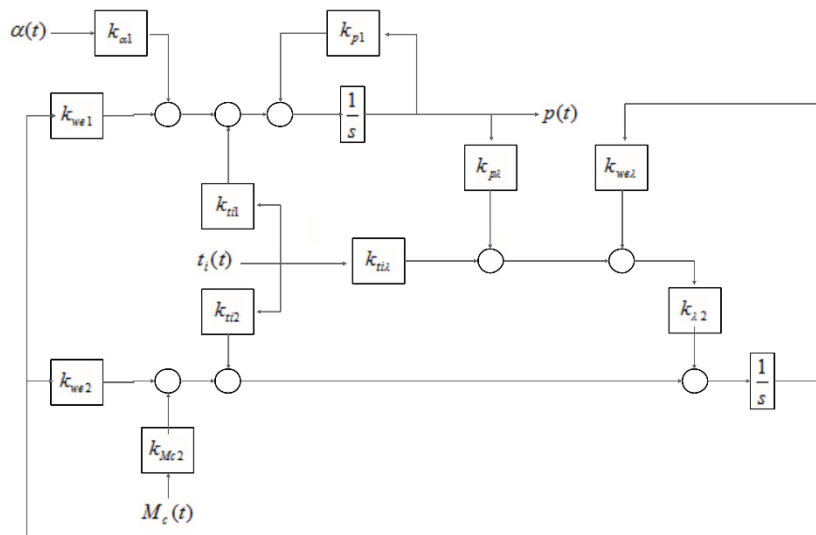


Figura 6.22.- Reducción del diagrama de bloques para la presión (1)

Reorganizando y reduciendo la Figura 6.22, el diagrama de bloques queda como se muestra a continuación:

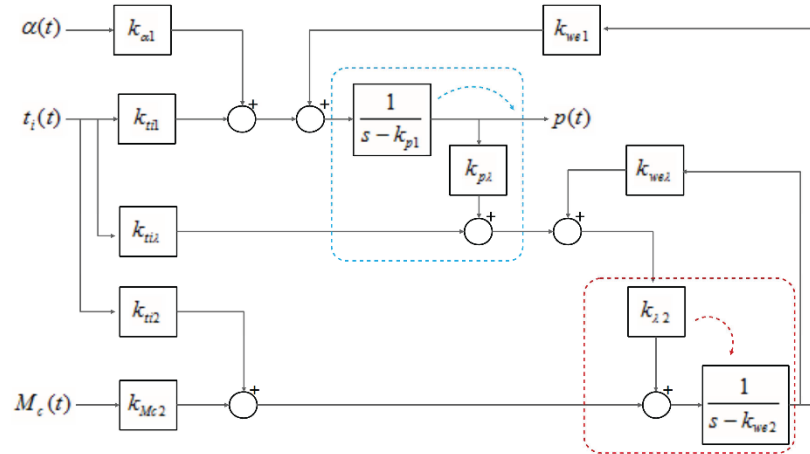


Figura 6.23.- Reducción del diagrama de bloques para la presión (2)

Realizando los intercambios señalados por los recuadros azul y rojo de la Figura 6.23 se tiene el siguiente diagrama reducido:

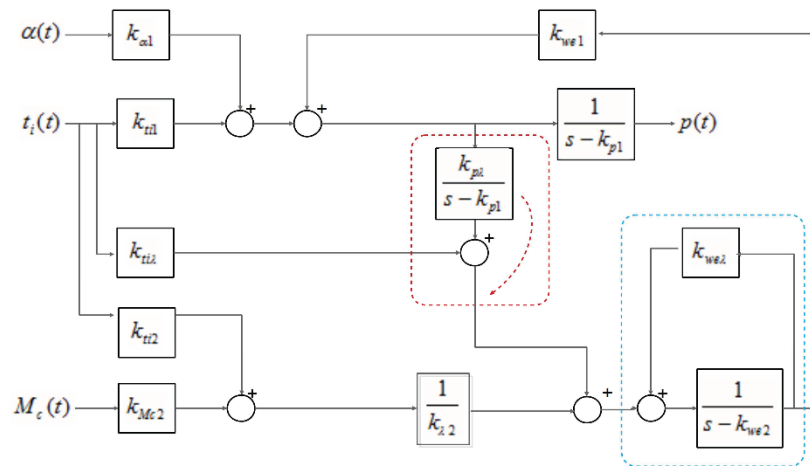


Figura 6.24.-Reducción del diagrama de bloques para la presión (3)

Lo encuadrado en azul es una realimentación simple, y en rojo un intercambio bloque-sumador, por lo que en ambos casos se puede reducir el sistema. El resultado de ambas reducciones se muestra en la Figura 6.25.

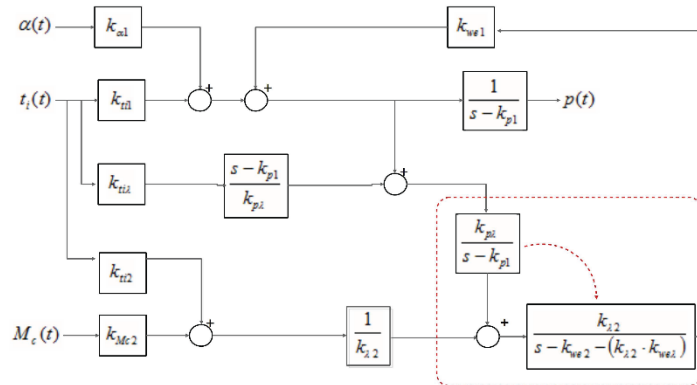


Figura 6.25.- Reducción del diagrama de bloques para la presión (4)

Realizando el intercambio señalado en la Figura 6.25, el esquema reducido queda:

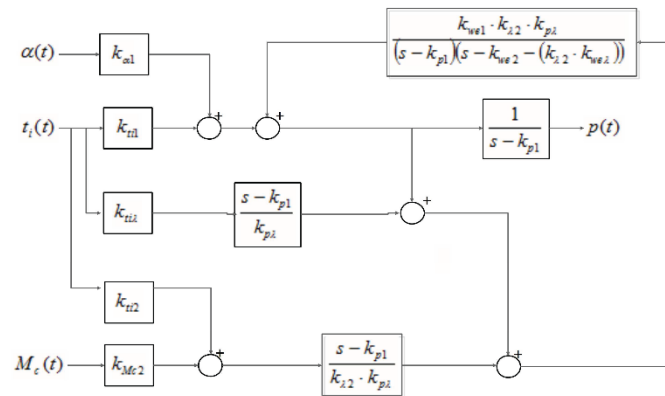


Figura 6.26.- Reducción del diagrama de bloques para la presión (5)

El diagrama anterior puede reducirse como sigue:

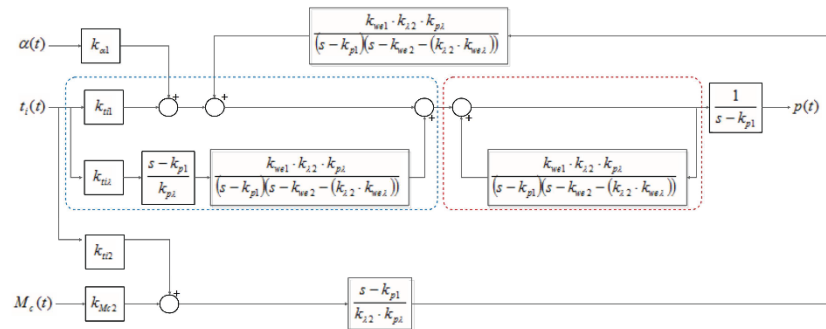


Figura 6.27.- Reducción del diagrama de bloques para la presión (6)

Lo contenido en el recuadro rojo se trata de una realimentación, mientras que lo del azul es una estructura en paralelo. En ambos casos se puede llevar a cabo la reducción del diagrama de bloques, de manera que se tiene:

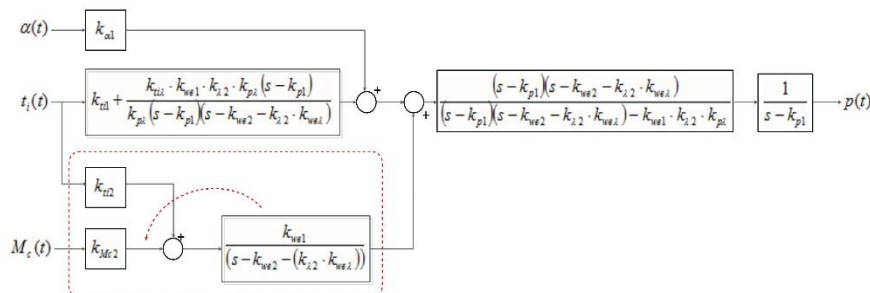


Figura 6.28.- Reducción del diagrama de bloques para la presión (7)

Realizando el intercambio bloque-sumador señalado en el diagrama anterior, y operando con los bloques, el diagrama queda como se muestra en la Figura 6.29:

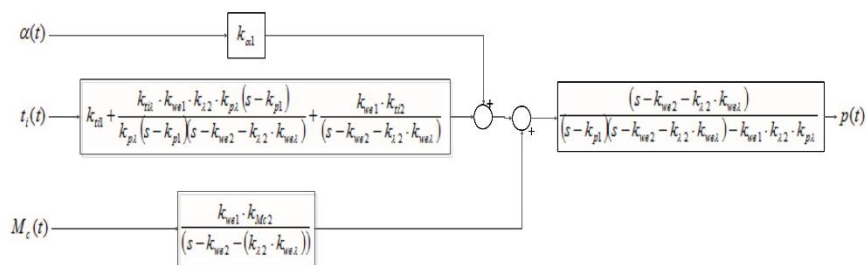


Figura 6.29.- Reducción del diagrama de bloques para la presión (8)

Simplificando y operando se tiene:

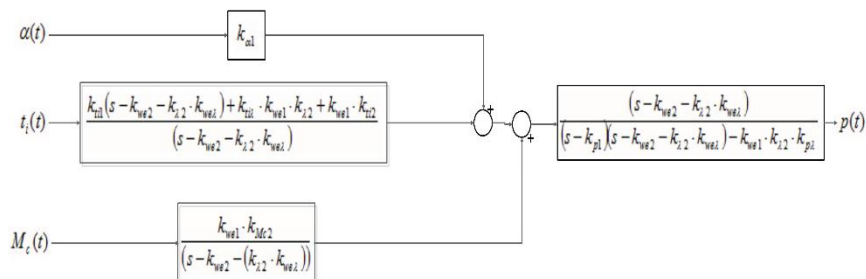


Figura 6.30.- Reducción del diagrama de bloques para la presión (9)

De manera que el diagrama de bloques reducido final para el caso de la presión queda:

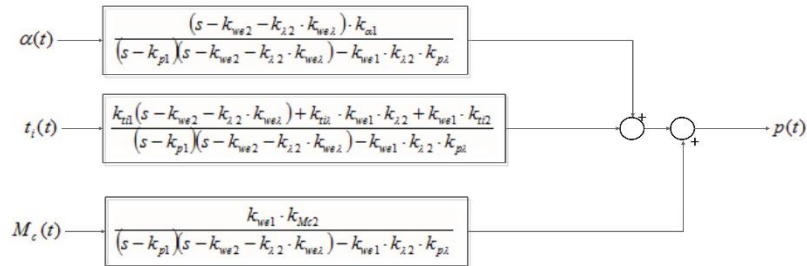


Figura 6.31.- Reducción del diagrama de bloques para la presión (10)

Al igual que ocurría con las dos salidas estudiadas anteriormente (Figura 6.12 y Figura 6.21), las funciones de transferencia que relacionan las entradas con la salida en la Figura 6.31 son de segundo orden con los mismos polos, pero con ceros y ganancias diferentes.

Para el caso de la presión, las funciones de las entradas de mariposa y tiempo de inyección poseen un cero, mientras que la del par de carga no. Los ceros en ambos casos son diferentes, al igual que las ganancias.

A modo de conclusión de la linealización del sistema, cabe señalar que, a la luz de los resultados obtenidos en este capítulo, y a pesar de que los valores numéricos de los parámetros que conforman las funciones de transferencia no se han podido determinar como consecuencia de la tremenda complejidad de dicho trabajo, la estructura de las mismas ha podido ser determinada de una forma satisfactoria. De hecho, todo apunta a que el sistema estudiado se trata de uno de segundo orden en el que, para cada una de las tres salidas, las funciones que relacionan cada una de las entradas con las mismas tienen los mismos polos, diferenciándose únicamente en el número de ceros y en la ganancia.

El conocimiento de este hecho puede ser de gran ayuda para la posterior identificación de la dinámica del sistema y la verificación de que ésta está bien realizada.

7.2.- Parámetros del inyector

Tal y como se ha comentado en el Capítulo 5, la expresión que muestra la relación entre la masa de combustible inyectado y el tiempo de inyección es la siguiente:

$$m_{H_2}(t) = K_{iny} (t_i(t) - t_{0iny}) \quad (\text{Ec. 7.1})$$

donde $m_{H_2}(t)$ masa de combustible inyectado en g/ciclo;
 $t_i(t)$ tiempo de inyección en ms; y
 K_{iny} y t_{0iny} parámetros del inyector.

En lo que respecta a los parámetros del inyector, t_{0iny} representa el tiempo muerto del inyector, debido a que es un sistema mecánico y no instantáneo. Por otra parte, K_{iny} representa la constante de proporcionalidad entre el tiempo de inyección y la masa inyectada. Algunos fabricantes adjuntan los valores de estos parámetros en la ficha técnica del inyector. Sin embargo, la gran mayoría no lo hace, por lo que deben ser identificados mediante la realización de ensayos experimentales. En el caso concreto de los inyectores utilizados en este Proyecto Fin de Carrera, sus parámetros correspondientes deben ser identificados experimentalmente. Para ello se debe realizar un ensayo relativamente sencillo.

El ensayo para la determinación de los parámetros del inyector Quantum utilizado para la inyección de hidrógeno consiste, únicamente, en la anotación de los valores del caudalímetro de combustible y del régimen de giro para distintos valores de tiempo de inyección. Así, una vez conocidos el flujo de combustible y las revoluciones, es posible la determinación de la masa de combustible inyectada por ciclo para un tiempo de inyección determinado, ya que se sabe que la relación entre el flujo de combustible y la masa inyectada viene dada por la expresión mostrada a continuación [22]:

$$\dot{m}_{H_2}(t) = 3,333 \cdot 10^{-8} m_{H_2}(t) n(t) \quad (\text{Ec. 7.2})$$

donde $\dot{m}_{H_2}(t)$ flujo de combustible en kg/s;
 $m_{H_2}(t)$ masa de combustible inyectado en g/ciclo; y
 $n(t)$ régimen de giro en rpm.

La Tabla 2.1 muestra los datos que se obtuvieron tras la realización del ensayo descrito:

ti (ms)	RPM	Caudal_H2(l/min)	Caudal_H2(kg/s)	Masa_H2 (g/ciclo)
2,53	781,768	15,779	2,36422E-05	0,90734973
2,54	828,816	18,601	2,78705E-05	1,008907369
2,82	1011,414	28,417	4,25781E-05	1,263055383
2,96	1045,738	31,409	4,70612E-05	1,350219412
2,49	1365,201	31,056	4,65322E-05	1,022638286
2,33	1288,874	28,82	4,3182E-05	1,005209632
2,33	1516,451	35,696	5,34845E-05	1,058191573
3,03	1000,382	30,966	4,63974E-05	1,391529342
3,6	1001,104	38,846	5,82043E-05	1,744376539
4,4	1001,053	50,805	7,61228E-05	2,281510711
4,53	1001,221	53,714	8,04815E-05	2,411741033
5,05	1000,817	60,881	9,122E-05	2,734640436

Tabla 7.1.- Datos del ensayo para la determinación de los parámetros del inyector

Representando en una gráfica la relación entre la masa de hidrógeno y el tiempo de inyección se tiene:

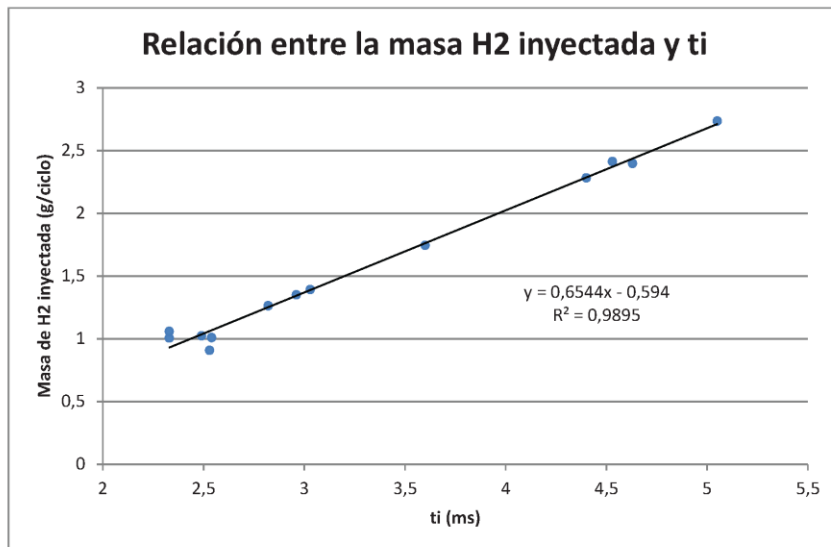


Figura 7.5.- Relación entre la masa de combustible inyectada y el tiempo de inyección

Analizando la gráfica anterior se llega a la conclusión de que, tal y como se esperaba, se da una relación lineal entre la masa de combustible inyectado y el tiempo de inyección. Si se centra el estudio en los valores más bajos de dicho tiempo, que presumiblemente serán los dados en el ralentí, se observa una ligera tendencia a la no-linealidad. Sin embargo, durante el desarrollo del presente proyecto, la relación lineal se asumirá como válida para todo el rango de valores del tiempo de inyección.

Aproximando por mínimos cuadrados una línea de tendencia, se obtiene los parámetros que ajustan dichos valores a una recta, obteniéndose como resultado una expresión que representa la relación entre la masa inyectada y el tiempo de inyección:

$$y = 0,6544x - 0,594 \rightarrow m_{H_2}(t) = 0,6544 t_i(t) - 0,594 \quad (\text{Ec. 7.3})$$

Comparando esta expresión con la (Ec. 7.1), se tiene que los parámetros del inyector identificados son:

$$K_{iny} = 0,6544 \quad (\text{Ec. 7.4})$$

$$t_{0iny} = \frac{0,594}{0,6544} = 0,9077 \quad (\text{Ec. 7.5})$$

De esta forma, a partir del tiempo de inyección es posible la obtención del flujo de combustible inyectado para cada valor régimen concreto.

7.3.- Par de pérdidas mecánicas e inercia del motor

Las pérdidas mecánicas que se producen en un motor de cuatro tiempos pueden ser clasificadas de la siguiente forma:

- Pérdidas por rozamiento. Dado que numerosas partes del motor están en contacto y poseen movimiento relativo entre sí, se produce la aparición de una fuerza de rozamiento. Para evitar desgastes y calentamientos excesivos de las superficies, todas las piezas en contacto estarán lubricadas con aceite, por lo que no se producirá contacto metal-metal entre las superficies. A este tipo de rozamiento se le denomina rozamiento hidrodinámico, y dependerá fundamentalmente de la viscosidad del lubricante. En particular, los elementos que más pérdidas por rozamiento provocan son los cojinetes (20-30%), los segmentos de los pistones (50-70%) y elementos de distribución (10-20%).

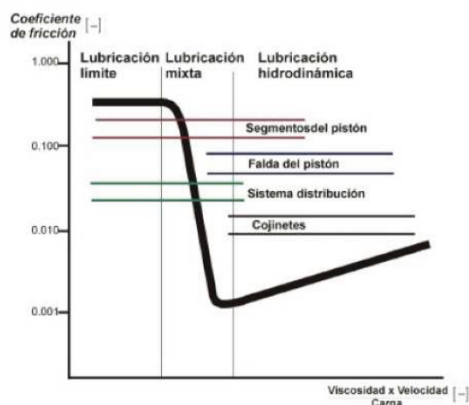


Figura 7.6.- Diagrama de Stribeck.

- Pérdidas por bombeo. Se deben a la fuerza que requiere el motor para aspirar el aire y expulsarlo en las carreras de admisión y escape, respectivamente. Normalmente son mayores a cargas parciales que a plena carga. Estas pérdidas dependen de la contrapresión de escape, así como de las pérdidas de carga en la admisión y del diagrama de distribución del motor.
- Pérdidas por accionamientos auxiliares tales como bomba de agua, bomba de aceite, alternador, servodirección, aire acondicionado, etc. En este trabajo se consideran nulas.

La suma de la potencia absorbida por cada una de estas pérdidas es la potencia absorbida por las pérdidas mecánicas totales del motor:

$$N_{pm} = N_R + N_B + N_A \quad (\text{Ec. 7.6})$$

Además, la potencia absorbida por las pérdidas mecánicas es igual a la diferencia entre la potencia efectiva y la indicada:

$$N_{pm} = N_e + N_i \quad (\text{Ec. 7.7})$$

7.6.- Rendimiento volumétrico

En este apartado se pretende realizar la identificación del rendimiento volumétrico para su posterior utilización en el simulador. Sin embargo, como ya se comentó anteriormente, existen dos tipos de rendimiento volumétrico, el referido a la mezcla de aire-combustible y el del aire seco.

Dado el hecho de que el combustible del motor en estudio es hidrógeno en estado gaseoso, el rendimiento volumétrico relativo al aire seco puede resultar ser un parámetro que diferencie a los motores de combustibles gaseosos frente a los de gasolina, ya que al tratarse de un combustible muy poco denso hace que entre menos aire a los cilindros cuanto más combustible se inyecte, provocando una disminución del rendimiento del aire. Por tanto, a pesar de que para el modelado se ha considerado únicamente el rendimiento volumétrico de la mezcla, en este apartado se va a realizar también la identificación del rendimiento volumétrico relativo al aire seco debido al gran interés que provoca su posible variación en función de lambda. Si esto último se cumple, se podrá demostrar el hecho de que, con la misma cantidad de combustible inyectado, los motores generan menos potencia funcionando con hidrógeno que con gasolina.

7.6.1.- Rendimiento volumétrico de la mezcla

En el Capítulo 5 se ha modelado el rendimiento volumétrico de la mezcla de manera que depende únicamente del régimen de funcionamiento del motor y de la relación de presiones de escape y admisión, por lo que su expresión viene dada por:

$$\eta_v(p, \omega_e) = \eta_{vp}(p) \eta_{vw}(\omega_e) = \left(\frac{V_c + V_D}{V_D} - \left(\frac{p_{esc}}{p(t)} \right)^{\frac{1}{k}} \frac{V_c}{V_D} \right) (k_0 + k_1 \omega_e(t) + k_2 \omega_e(t)^2) \quad (\text{Ec. 7.20})$$

Sin embargo, la identificación de todos estos parámetros por separado es muy complicada de llevar a cabo, resultando la mejor opción la identificación del rendimiento volumétrico de la mezcla en su conjunto. Para realizar esta identificación se procederá de una forma similar a la llevada a cabo con el coeficiente de descarga, solo que en este caso, en lugar de estudiar el flujo de aire que entra al colector de admisión, se trabajará con el flujo de aire saliente. Por tanto, se tiene la siguiente expresión:

$$\dot{m}_\beta(t) = \frac{p(t)}{R T(t)} V_D \frac{\omega_e(t)}{4\pi} \eta_v^{mezcla} - \dot{m}_{H_2}(t) = 34,32 \dot{m}_{H_2}(t) \lambda(t) \quad (\text{Ec. 7.21})$$

Por lo que el rendimiento volumétrico de la mezcla queda:

$$\eta_v^{mezcla} = \frac{4\pi R T(t) (1 + 34,32 \lambda(t)) \dot{m}_{H_2}(t)}{p(t) V_D \omega_e(t)} \quad (\text{Ec. 7.22})$$

Aplicando esta ecuación (Ec. 7.22) a cada uno de los estados de funcionamiento del motor ensayados, mostrados anteriormente en las Tablas 7.7, 7.8 y 7.9, se obtienen los valores representados gráficamente a continuación (Figura 7.14 y Figura 7.15):

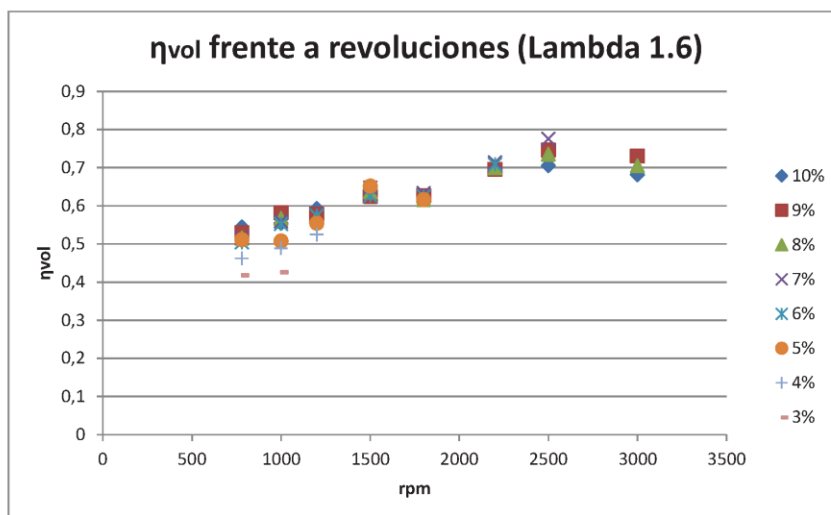


Figura 7.14.- Rendimiento volumétrico frente a revoluciones para lambda igual a 1.6

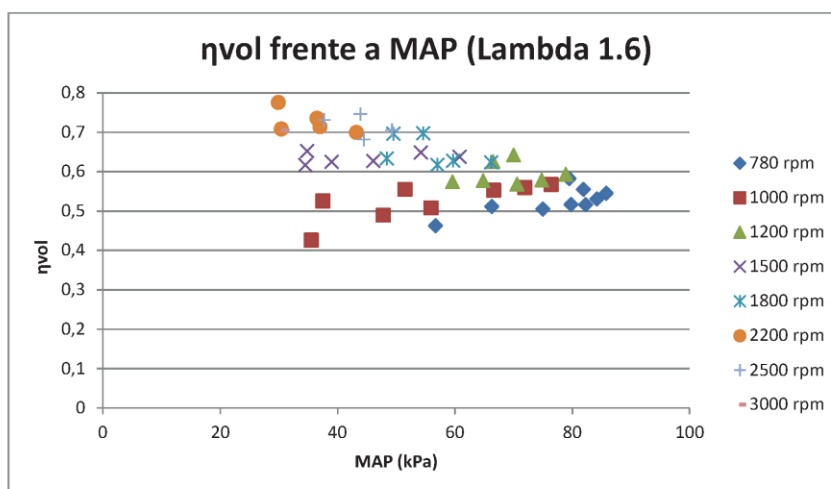


Figura 7.15.- Rendimiento volumétrico frente a la presión de admisión para lambda 1.6

Al igual que como ocurría en el caso de la identificación del coeficiente de descarga, el rendimiento volumétrico de la mezcla apenas varía con lambda, por lo que se toman los valores de la tabla correspondiente al valor 1.6.

Analizando las gráficas se aprecia que el rendimiento volumétrico apenas varía con la apertura de la mariposa. Sin embargo, tal y como se comentó en el capítulo del modelado, sí que varía con el régimen de giro y la presión del colector de admisión.

además de representar gráficamente el ciclo indicado, se mostraban las gráficas de la presión del cilindro frente al ángulo del cigüeñal en las que se superponían los datos obtenidos de los 100 ciclos, con el objetivo de determinar la dispersión cíclica existente.

En las siguientes figuras se muestran a modo de ejemplo algunas de las gráficas obtenidas, concretamente se corresponde con el estado de funcionamiento con $\alpha=5\%$, 1000 rpm y $\lambda=2$.

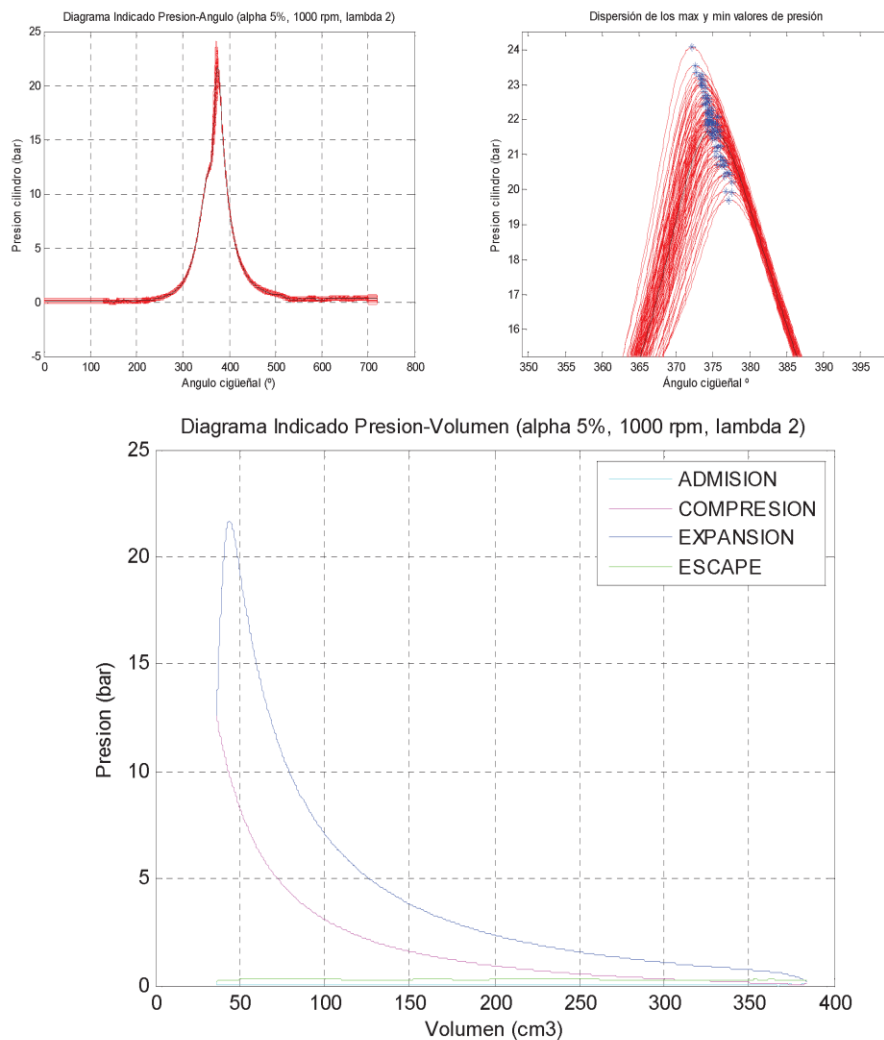


Figura 7.25.- Representaciones del diagrama indicado presión-ángulo, presión-volumen y detalle de la dispersión cíclica

10.- CONCLUSIONES

A la luz de los resultados obtenidos en los numerosos estudios desarrollados en este proyecto, con el objetivo de la creación de un modelo dinámico del sistema, han podido obtenerse una serie de conclusiones cuyo fin es facilitar el desarrollo de futuros trabajos que aseguren la continuidad de la presente investigación.

Primeramente, se ha desarrollado un modelo teórico riguroso, acorde con la bibliografía, y adaptado al caso de hidrógeno que ha permitido comprender los fenómenos físicos que definen el comportamiento del sistema. El resultado han sido dos ecuaciones diferenciales sencillas, pero cuyo desarrollo se complicaba como consecuencia de las numerosas dependencias entre parámetros, dando lugar a un sistema no-lineal. Con el fin de determinar el orden del mismo se ha procedido a la linealización de dichas ecuaciones, obteniéndose como resultado una serie de funciones de transferencia de segundo grado con una estructura similar entre ellas. En concreto, se ha descubierto que las funciones de transferencia que relacionan cada una de las entradas con cada salida poseen los mismos polos, diferenciándose únicamente en los ceros y la ganancia.

Para la determinación de todos y cada uno de los parámetros del modelo se ha procedido a la identificación experimental de los mismos mediante la realización de numerosos ensayos. Los resultados obtenidos de dicha identificación han permitido el análisis del comportamiento de los parámetros y la creación de numerosos mapas.

Con todo lo anterior se ha construido un simulador que permitirá validar los futuros controladores diseñados para el sistema. Dicho simulador es válido tanto para el ralenti como para otros regímenes, a pesar de que en este trabajo sólo se ha estudiado el ralenti. Los resultados han sido coherentes con el comportamiento real del sistema. Sin embargo, en numerosos casos han surgido problemas con la ganancia de las señales a pesar del buen ajuste de la dinámica. La simulación ha demostrado la profunda interrelación existente entre los numerosos parámetros del sistema, de modo que la mala identificación de uno de ellos acarrea el fallo global del sistema. Cabe señalar que los ensayos cuyas condiciones iniciales eran regímenes altos, y que posteriormente se veían modificados por la acción de las entradas del sistema, han ofrecido unos resultados bastante peores de los esperados, por lo que sería conveniente la realización de un estudio más preciso de dicho problema.

Por otro lado, de forma paralela a lo anterior, se ha realizado una identificación experimental de la dinámica que ha generado una descripción del sistema como modelo lineal con incertidumbre. Como técnica identificativa se ha utilizado el método de los mínimos cuadrados, siendo los resultados obtenidos satisfactorios, a pesar de la existencia nuevamente de problemas con la ganancia, los cuales han sido achacados a la utilización de un método paramétrico lineal para el análisis de un sistema no lineal. Además, se ha cuantificado la incertidumbre a la que deberá enfrentarse un futuro diseño de control robusto.

Señalar que los resultados obtenidos en la identificación de la dinámica han sido coherentes con los de la linealización del modelo teórico, ya que la estructura de las funciones de transferencia es similar en ambos estudios, obteniéndose para ambos casos un modelo dinámico fiable del motor en estudio.

Por último, al margen de los objetivos principales de este proyecto, se ha realizado un estudio centrado en el rendimiento volumétrico del aire seco con la intención de demostrar que el aumento de la inyección de hidrógeno provoca una disminución del caudal de aire entrante en los cilindros como consecuencia del gran volumen ocupado por el combustible. Sin embargo, los resultados obtenidos no han sido los esperados, ya que en los mismos el aumento del caudal de

combustible conlleva un aumento del rendimiento. Este comportamiento se ha atribuido al aumento de temperatura y presión dentro del cilindro provocado por un flujo mayor de combustible, que favorece el llenado del mismo durante el cruce de válvulas. Por tanto, este estudio no ha servido para demostrar el efecto negativo del aumento de la inyección.

Anexo 3

Perfil de temperatura atmosférica estándar ISA a 0 m s.n.m

Input:

Altitude + Temp. Offset ▾

0

m ▾

20

°C ▾

Calculate

Reset

Output:

Alt: 0 mTemp. Dev: 20 °C

Temperature	35	°C ▾
Density Altitude	694	m ▾
Pressure	101325	Pa ▾
Air Density	1,14549	kg/m³ ▾
Relative Density	0,935097	(SL ISA=1)
Sonic Speed	351,91	m/s ▾
Viscosity	0,0000191	Pa.s ▾

Fuente: <https://aerotoolbox.com/atmcalc/>

Perfil de temperatura atmosférica estándar ISA a 2850 m s.n.

Input:

Altitude + Temp. Offset ▾

2850

m ▾

20

°C ▾

Calculate

Reset

Output:

Alt: 2850 mTemp. Dev: 20 °C

Temperature	16,475	°C ▾
Density Altitude	3542	m ▾
Pressure	71456	Pa ▾
Air Density	0,85949	kg/m³ ▾
Relative Density	0,701627	(SL ISA=1)
Sonic Speed	341,16	m/s ▾
Viscosity	0,00001819	Pa.s ▾

Fuente: <https://aerotoolbox.com/atmcalc/>