



UNIVERSIDAD INTERNACIONAL DEL ECUADOR

**FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y TECNOLOGÍAS
APLICADAS**

**DESARROLLO DE UN SOFTWARE DE SIMULACIÓN, QUE
PROPORCIONE DATOS DEL FLUJO DE NEUTRONES EN UN
MATERIAL RADIATIVO**

**PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO EN
MECATRÓNICA**

ECHEVERRÍA RÍOS DIEGO FABIÁN

DIRECTOR: MSc. Suntaxi Carlos

Quito, 25 de Septiembre de 2014

DECLARACIÓN

Yo Diego Fabián Echeverría Ríos, declaro bajo juramento que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual correspondientes a este trabajo, a la Universidad Internacional del Ecuador, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Diego Fabián Echeverría Ríos

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por Diego Fabián Echeverría Ríos, bajo mi supervisión.

Msc. Carlos Suntaxi.

DIRECTOR DE PROYECTO

Dedicatoria

A mis amigos, a mis padres y a mi novia por su apoyo incondicional.

Agradecimientos

Al Profesor Ph.D. Ericson López por guiarme e instruirme en todo el proyecto de titulación, aclarando conceptos importantes en la aplicación de los métodos numéricos y del modelo matemático.

Al Profesor Ph.D. Hernán Benalcázar Gómez por cambiar mi vida académica y mostrarme lo fascinante del mundo de las matemáticas aplicadas, además de ser un apoyo incondicional en los momentos en que necesité una guía.

Al Profesor Msc. Roque Santos por guiarme e instruirme en los conceptos de la energía nuclear, contribuyendo en la obtención y validación de datos del presente proyecto.

Al Ph.D Ramiro Brito, por siempre estar atento a mi desarrollo académico, por la motivación que me transmitió en toda la carrera y por no abandonar a sus estudiantes en sus proyectos.

Resumen

La presente tesis detalla los principios de la producción de energía nuclear, así como la influencia que ésta ha tenido en el mundo, en Latinoamérica y en el Ecuador. Se desarrolla el modelo matemático que describe el comportamiento de los neutrones en un material radiactivo, además se plantea la solución de la ecuación lineal de Boltzmann en una dimensión, el problema específico de fuente, mediante cuatro métodos numéricos: Euler mejorado, Galerkin, Elementos Finitos y Ordenadas Discretas. El objetivo de resolver el problema con estos métodos es determinar cuál es el más efectivo, variando los parámetros de cálculo y mostrando los resultados de forma fácil y didáctica, además proporciona distintas técnicas de discretización, para que el lector desarrolle destrezas y logre aplicarlas al resolver las ecuaciones que se planteen en un futuro.

Con la solución del problema de fuente, se obtendrá la concentración de neutrones en la barra de combustible de un reactor nuclear tipo PWR, modelo AP1000 de la empresa Westinghouse, determinando la generación de energía producida por fisión y desarrollando un perfil de temperaturas en cada uno de los componentes de la varilla de combustible del reactor mencionado.

Se detallan los principios del control de reactores nucleares, estudiando las ecuaciones de la cinética de un reactor y se plantean conceptos del control automático.

Finalmente se desarrollan los algoritmos de los métodos numéricos y se obtienen los resultados de concentración de neutrones y producción de energía; posteriormente se implementan ambas soluciones al programa de simulación, detallando el desarrollo en el área informática, su interfaz de usuario y sus resultados.

CONTENIDO

CAPÍTULO 1.....	1
INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 SITUACIÓN EN EL MUNDO.....	1
1.2 SITUACIÓN EN AMÉRICA-LATINA (Energía Nuclear, 2012)	4
1.3 SITUACIÓN EN ECUADOR.....	5
1.4 VENTAJAS Y DESVENTAJAS	6
1.5 CONCEPTOS FUNDAMENTALES (Landolt H., 2005).....	7
1.5.1 FISIÓN Y PRODUCCIÓN DE ENERGÍA	8
1.5.2 TIPOS DE REACTORES NUCLEARES	8
1.5.2.1 Generalidades de los reactores PWR	9
1.5.2.2 Generalidades de los reactores BWR	9
1.5.2.3 Comparación entre los reactores PWR y BWR	10
1.6 COMPONENTES DEL REACTOR NUCLEAR WESTINGHOUSE MODELO AP1000	11
1.6.1 NÚCLEO.....	11
1.6.1.1 Moderador.....	11
1.6.1.2 Elemento combustible	12
1.6.1.3 Recubrimientos	12
1.6.1.4 Varilla de combustible	14
1.6.1.2 Edificio de contención	15
1.6.2 FUNCIONAMIENTO DEL REACTOR.....	16
1.6.3 CARACTERÍSTICAS ESPECÍFICAS DEL REACTOR	17
CAPÍTULO 2.....	19
MODELO MATEMÁTICO DE LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE NEUTRONES.....	19
2.1 INTERACCIÓN DE LOS NEUTRONES CON LA MATERIA	20
2.1.1 COLISIONES DE DISPERSIÓN	20
2.1.1.1 Colisión elástica	20
2.1.1.2 Colisión inelástica	20
2.1.2 COLISIONES DE ABSORCIÓN NEUTRÓNICA	21
2.1.2.1 Captura radiactiva.....	21
2.1.2.2 Captura no radiactiva	21
2.1.2.3 Captura de activación y desintegración β	21
2.1.2.4 Captura de activación y desintegración α	22

2.1.2.5 Captura de fisión.....	22
2.2 LEYES QUE RIGEN EL COMPORTAMIENTO DEL FLUJO DE NEUTRONES	22
2.2.1 SECCIÓN EFICAZ	22
2.2.1.1 Sección Eficaz Macroscópica:.....	23
2.2.1.2 Sección Eficaz Microscópica.....	25
2.2.1.3 Tasa de interacción.....	26
2.3 VARIABLES QUE INTERVIENEN EN LA DIFUSIÓN DE NEUTRONES.....	27
2.3.1 VARIABLES INDEPENDIENTES (Lewis E. E., Integro-differential neutron Boltzman equation, 1984).....	28
2.3.2 VARIABLES DEPENDIENTES (Lewis E. E., Integro-differential neutron Boltzman equation, 1984)	30
2.4 FLUJO DE NEUTRONES QUE SE PRODUCEN EN EL INTERIOR DE UN REACTOR NUCLEAR	34
2.5 ECUACIÓN DE BALANCE	37
2.5.1 TEOREMA DE TRANSPORTE DE REYNOLDS	37
2.5.2 CONTRIBUCIÓN AL BALANCE TOTAL DE NEUTRONES.....	38
2.6 EL PROBLEMA DE CRITICIDAD	41
2.7 CONDICIONES DE FRONTERA	43
2.8 DISCRETIZACIÓN DE LA VARIABLE ENERGÉTICA	44
2.9 ANÁLISIS ESPACIAL Y ANGULAR.....	47
2.9.1 ANÁLISIS EN TRES DIMENSIONES	48
2.9.2 ANÁLISIS EN UNA DIMENSIÓN.....	49
CAPÍTULO 3.....	52
APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS, PARA LA RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE UNIDIMENSIONAL.	52
3.1 CONCEPTOS DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS.....	53
3.1.1 INTRODUCCIÓN.....	53
3.1.2 CONCEPTOS FUNDAMENTALES EN EL DESARROLLO DE ALGORITMOS MATEMÁTICOS.....	53
3.2 APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS.....	56
3.2.1 ORDENADAS DISCRETAS	56
3.2.1.1 Importancia	57
3.2.1.2 Aplicación	57
3.3.2 MÉTODO DE EULER MEJORADO	66

3.3.2.1	Importancia	66
3.3.2.2	Aplicación	67
3.3.3	MÉTODO DE RESIDUOS PONDERADOS	79
3.3.3.1	Método de Galerkin.....	84
3.3.4	EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)	90
3.3.4.1	Importancia	91
3.3.4.2	Aplicación	92
3.4.4.2.1	<i>Aproximación con 2 y 4 elementos lineales</i>	93
3.4.4.2.2	<i>Aproximación con 4 elementos cuadrados</i>	110
CAPÍTULO 4	119
EVALUACIÓN NUMÉRICA DEL MODELO NEUTRÓNICO	119
4.1	DESARROLLO DE SOFTWARE	119
4.4.1	ESPECIFICACIONES PREVIAS	120
4.4.2	DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN	121
4.4.2.1	Requerimientos.....	121
4.4.2.2	Diseño.....	121
4.4.2.2.1	<i>Interfaz Principal</i>	122
4.4.2.2.2	<i>Interfaz de Valores de Energía</i>	127
4.5.2	REQUERIMIENTOS DE HARDWARE	129
4.5.3	REQUERIMIENTOS DE SOFTWARE	129
4.6	PARÁMETROS Y DATOS DE ENTRADA.....	129
4.7	ERROR PORCENTUAL DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS	130
4.8	EVALUACIÓN DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS.	131
4.8.1	EVALUACIÓN DEL MÉTODO DE LAS ORDENADAS DISCRETAS.	132
4.8.1.1	Resultados del método de las Ordenadas Discretas.....	134
4.8.2	EVALUACIÓN DEL MÉTODO DE EULER MEJORADO.	136
4.8.2.1	Error del método de Euler Mejorado.	138
4.8.3	EVALUACIÓN DEL MÉTODO DE LOS RESIDUOS PONDERADOS (GALERKIN).	141
4.8.3.1	Error del método de los Residuos Ponderados (Galerkin).....	143
4.8.4	EVALUACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS CON 2 y 4 ELEMENTOS LINEALES.	144
4.8.4.1	Error del método de los Elementos Finitos con 2 y 4 elementos lineales. ...	146
4.8.5	EVALUACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS CON 4 ELEMENTOS CUADRÁTICOS.	147
4.9	RESULTADOS.....	152
CAPÍTULO 5	154

ANÁLISIS ENERGÉTICO EN LA VARILLA DE COMBUSTIBLE	154
5.1 IMPORTANCIA.....	154
5.2 PROPIEDADES FÍSICAS DEL COMBUSTIBLE (UO ₂)	155
5.3 GENERACIÓN DE ENERGÍA TÉRMICA EN EL COMBUSTIBLE.....	157
5.4 MODELO DE LA SIMETRÍA PARA LA DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS	160
5.4.1 DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS EN LA ZONA 1	162
5.4.1.1 Conductividad Térmica	162
5.4.1.2 Ecuación general de conducción con generación de energía térmica en geometrías radiales	164
5.4.1.3 Aplicación	165
5.4.2 DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS EN LA ZONA 2.....	167
5.4.2.1 Conductividad térmica del gas (Helio).....	167
5.4.3 DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS EN LA ZONA 3.....	170
5.4.3.1 Características del Zirlo	170
5.4.3.2 Conducción térmica en el recubrimiento (Zirlo)	171
5.4.4 DISTRIBUCIÓN DE TEMPERTURAS EN LA ZONA 4	172
5.4.4.1 Convección forzada	174
5.5 EVALUACIÓN DEL MODELO ENERGÉTICO.	176
5.5.1 CÁLCULO DE LA PRODUCCIÓN DE ENERGÍA EN LA BARRA DE COMBUSTIBLE.	176
5.5.2 CÁLCULO DEL PERFIL DE TEMPERATURAS EN LA VARILLA DE COMBUSTIBLE.	177
5.5.3 RESULTADOS DEL SOFTWARE DE SIMULACIÓN	179
 CAPÍTULO 6.....	 182
 TEORÍA DEL CONTROL AUTOMÁTICO EN UN REACTOR NUCLEAR.....	 182
6.1 INTRODUCCIÓN AL CONTROL AUTOMÁTICO	182
6.2 CONCEPTOS GENERALES DEL CONTROL DE REACTORES NUCLEARES	186
6.2.1 VIDA NEUTRÓNICA	188
6.2.2 REACTIVIDAD Y FACTOR DE MULTIPLICACIÓN EFECTIVO	188
6.3 APLICACIÓN DE LOS CONCEPTOS DEL CONTROL AUTOMÁTICO	190
6.3.1 MODELO MATEMÁTICO DE LA CINÉTICA DE UN REACTOR NUCLEAR.....	191
 CAPÍTULO 7.....	 206
 CONCLUSIONES.....	 206

7.1 CONCLUSIONES DE LA INVESTIGACIÓN	206
7.2 ESTUDIOS FUTUROS	208
BIBLIOGRAFÍA.....	210

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. 1: Reactores nucleares por país.....	3
Tabla 1. 2: Características reactor PWR AP 1000	18
Tabla 4. 1: Dimensiones de la varilla de combustible.....	130
Tabla 5. 1: Propiedades físicas del Dióxido de Uranio.	157
Tabla 6. 1: Parámetros del modelo cinético del reactor AP100.	196

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. 1: Ubicación geográfica de reactores nucleares en operación en el mundo.....	4
Figura 1. 2: Capacidad instalada tipo fuente	6
Figura 1. 3: Núcleo del reactor y sus recubrimientos.....	13
Figura 1. 4: Distribución de los elementos combustibles en el núcleo, con distintos porcentajes de quemado.....	14
Figura 1. 5: Elementos de la varilla y elemento de combustible.	15
Figura 1. 6: Componentes reactor nuclear.	17
Figura 2. 1: Haz de neutrones que inciden sobre un blanco de volumen diferencial.	24
Figura 2. 2: Representación espacial: posición-velocidad de un neutrón.	29
Figura 2. 3: Flujo de neutrones a través del volumen de control.	33
Figura 2. 4: Condiciones de frontera de vacío y de reflexión.....	44
Figura 2. 5: Rango de energía dividido en G grupos.....	45
Figura 2. 6: Esfera de radio unidad.....	48
Figura 2. 7: Desplazamiento de los neutrones en una dimensión.	49
Figura 3. 1: Funciones de Forma lineales.	97
Figura 3. 2: Funciones de Forma y elementos lineales del espacio discreto.	98
Figura 3. 3: Elemento cuadrático unidimensional, con las tres funciones de interpolación.	111
Figura 3. 4: Discretización del dominio en 4 elementos cuadráticos, con sus respectivas funciones de forma.	112
Figura 4. 1: Interfaz principal del software.....	122
Figura 4. 2: Parámetros de cálculo, menú de raíces y polinomios de Legendre.....	124
Figura 4. 3: Parámetros de cálculo, menú de métodos numéricos.	124
Figura 4. 4: Contenedor y caja de texto del valor de fuente.	125
Figura 4. 5: Contenedor de los datos de combustible.	126
Figura 4. 6: Contenedor y botones de las acciones del software.....	127
Figura 4. 7: Interfaz de Temperaturas sin accionar el RadioButon “Ver”.	128
Figura 4. 8: Interfaz de Temperaturas con el RadioButon “Ver” accionado.	129
Figura 4. 9: Comportamiento del flujo neutrónico, con el combustible UO_2 , obtenido con el método de O. Discretas.	135

Figura 4. 10: Comportamiento del flujo neutrónico, con el combustible <i>MOX</i> , obtenido con el método de O. Discretas.....	136
Figura 4. 11: Simulación del método de Euler Mejorado con una partición de $M = 170$.	139
Figura 4. 12: Simulación del método de Euler Mejorado con una partición de $M = 980$.	140
Figura 4. 13: Simulación del método de Galerkin, con una petición de 170.	143
Figura 4. 14: Simulación del MEF, evaluado con 4 elementos lineales.	147
Figura 4. 15: Simulación del MEF, evaluado con 4 elementos cuadráticos.	152
Figura 5. 1: Zonas y elementos de la parte simétrica de la varilla de combustible.	161
Figura 5. 2: Simulación del comportamiento energético del material <i>UO2</i>	180
Figura 5. 3: Simulación del comportamiento energético del material <i>MOX</i>	181
Figura 6. 1: Diagrama básico del control automático.....	183
Figura 6. 2: Sistema en lazo abierto.....	184
Figura 6. 3: Sistema en lazo cerrado.	185
Figura 6. 4: Sistema de control general de un reactor nuclear.	191
Figura 6. 5: Plano complejo s	199
Figura 6. 6: Ubicación de los polos de la función de transferencia en lazo abierto del reactor nuclear.....	200
Figura 6. 7: Diagrama de bloques del modelo del reactor nuclear mediante SIMULINK, en lazo abierto.	201
Figura 6. 8: Simulación del comportamiento del modelo en lazo abierto.	202
Figura 6. 9: Diagrama de bloques del modelo del reactor nuclear mediante SIMULINK en lazo cerrado.....	202
Figura 6. 10: Simulación del comportamiento del modelo en lazo cerrado.....	203
Figura 6. 11: Diagrama de bloques del control PID del modelo del reactor nuclear.	204
Figura 6. 12: Dimensionamiento de los parámetros del controlador PID, a través de la función Tuning de SIMULINK.....	204
Figura 6. 13: Simulación del comportamiento del sistema con un controlador PID.....	205

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

El cambio continuo y la constante demanda de energía de la sociedad, ha creado diversas necesidades, las mismas que dieron lugar al desarrollo de distintas formas de producción de energía.

Toda fuente de energía proviene de la naturaleza y dependiendo de la frecuencia con la que se regenera, se clasifica en: energías renovables y energías no renovables. Las energías renovables provienen de fuentes inagotables que se generan de forma natural, las principales son: Geotérmica (Energía térmica proveniente del interior de la tierra), Mareomotriz (Aprovecha la energía cinética del mar), Fotovoltaica (Sol), Solar Térmica (Sol), Biomasa (genera energía térmica de la combustión de material orgánico muerto), Eólica (Aprovecha la energía cinética del aire) e Hidráulica (Aprovecha la energía cinética del agua). Ver (ComEnergy, 2012)¹.

Las energías no renovables toman este nombre al consumirse mucho antes del tiempo necesario para su formación, las principales formas de obtención de esta energía son: a través del carbón, gas natural, petróleo y fisión nuclear.

1.1 SITUACIÓN EN EL MUNDO

Distintos gobiernos conocen los beneficios de la energía nuclear, como una fuente que garantiza el abastecimiento eléctrico, frena las emisiones contaminantes, reduce la dependencia energética exterior y produce electricidad de forma constante a precios estables y predecibles.

¹ ComEnergy. (2012). *Energía Nuclear*. Recuperado el 05 de Enero de 2013, de Energía Nuclear: http://energia-nuclear.net/Tipos_de_energia

Según los datos de la IAEA de sus siglas en inglés “International Atomic Energy Agency”, ver (Agency, 2013)², en la actualidad existen 435 reactores nucleares operando a nivel mundial, estos producen aproximadamente el 15% de la energía eléctrica que se consume en el planeta. Uno de los países que apoya la energía nuclear es Francia, donde el 77,71% de su electricidad es de origen nuclear. En Finlandia, el 30% de la electricidad proviene de los cuatro reactores que se encuentran funcionando. Reino Unido cuenta con 19 reactores que en 2011 produjeron el 17,82% de su electricidad.

A continuación se muestra una tabla de los reactores nucleares por países y el porcentaje de energía eléctrica que aportan:

² Agency, I. A. (21 de 01 de 2013). *International Atomic Energy Agency*. Recuperado el 21 de 01 de 2013, de International Atomic Energy Agency: <http://www.iaea.org>

Tabla 1. 1: Reactores nucleares por país.

País	Reactores en operación	Reactores en construcción	% electricidad de origen nuclear.
Alemania	9	-	17,79
Argentina	2	1	4,97
Armenia	1	-	33,17
Bélgica	7	-	55,96
Brasil	2	1	3,17
Bulgaria	2	2	32,58
Canadá	19	-	15,33
Czech. R	6	-	32,96
China	17	32	1,85
Corea del Sur	23	4	34,64
Eslovaquia	4	2	54,02
Eslovenia	1	-	41,73
España	8	-	19,64
Estados Unidos	104	5	19,25
Finlandia	4	1	31,58
Francia	58	1	77,71
Holanda	1	-	3,60
Hungría	4	-	43,25
India	20	7	3,68
Irán	1	-	-
Japón	50	2	18,14
México	2	-	3,55
Pakistán	3	2	3,77
Reino Unido	19	-	17,82
Rumanía	2	-	18,98
Rusia	33	11	17,59
Suecia	10	-	39,62
Suiza	5	-	40,85
Sudáfrica	2	-	5,19
Taiwan	6	2	19,02
Ucrania	15	2	47,20
TOTAL	436	73	-

Fuente: Datos 2012 IAEA.

En la Figura 1. 1 se muestra la distribución geográfica de los reactores nucleares en función del año de creación:



Figura 1. 1: Ubicación geográfica de reactores nucleares en operación en el mundo.

Fuente: Información IAEA, 2012.

A finales del 2012, 73 reactores nucleares empezaron su construcción en países como China, India, Bulgaria, Japón, Rusia, Corea del Sur, Finlandia y Francia.

1.2 SITUACIÓN EN AMÉRICA-LATINA (Energía Nuclear, 2012)³

La generación de energía eléctrica en Latinoamérica producto de la energía nuclear, es baja a comparación de otros continentes como Europa, apenas el 2%, esta energía es producida tan solo por 3 países: Argentina, Brasil y México. En estos países se encuentran distribuidos los 7 reactores nucleares de la región, que son: Laguna Verde I y II en México, Angra I y II en Brasil y Atucha I, II y Embalse en Argentina. Estas centrales representan aproximadamente el 1,5% de la

³Energía Nuclear. (26 de Mayo de 2012). Recuperado el 20 de Enero de 2013, de Energía Nuclear: http://energia-nuclear.net/situacion/energia_nuclear_en_el_mundo.html

capacidad instalada neta mundial. Sobre una base nacional, representan el 10% de la generación eléctrica total en la Argentina, alrededor del 4,6% en México, y el 2,8% en el Brasil.

Países que mostraron interés en los últimos años como Chile, Venezuela y Uruguay, desde el terremoto y tsunami en Japón (2011), no han continuado con los trabajos de investigación en energía nuclear, ya que consideran otras alternativas por los latentes y posibles sucesos de sismos de la región, en especial el caso chileno.

1.3 SITUACIÓN EN ECUADOR

En Ecuador se maneja la energía atómica desde 1990, gracias al acelerador de electrones que llegó a la Escuela Politécnica Nacional (EPN), desde entonces, se realizan investigaciones y aplicaciones industriales. En noviembre de 2008 la Agencia Internacional de Energía Atómica, elaboró un mapa en el que se indica la existencia de posibles campos de uranio en Tena, Loja, Cuenca, Macas y Zamora.

En el año 2009, el gobierno ecuatoriano firmó un convenio con Rusia, el cual plantea la colaboración en el área de energía nuclear. Este convenio en su artículo 2 cita los dos principales objetivos, los cuales son: Proyección, construcción y explotación de reactores nucleares; y, Exploración y explotación de yacimientos de uranio. Este precedente fue el punto de partida para que el Ecuador comience su preparación para un futuro desarrollo nuclear. A la vez, se suscribió otro convenio con la EPN denominado EPN-MEER, éste trata de la preparación de profesionales en el área nuclear para que se continúe con los proyectos planteados en ambos convenios.

Actualmente, el Ecuador forma parte del Organismo Internacional de Energía Atómica (OEIA), y coopera conjuntamente en la parte técnica para desarrollar proyectos en el área nuclear a nivel local y Latinoamericano.

A continuación se presenta una gráfica de la capacidad energética instalada en el Ecuador por tipo de fuente:

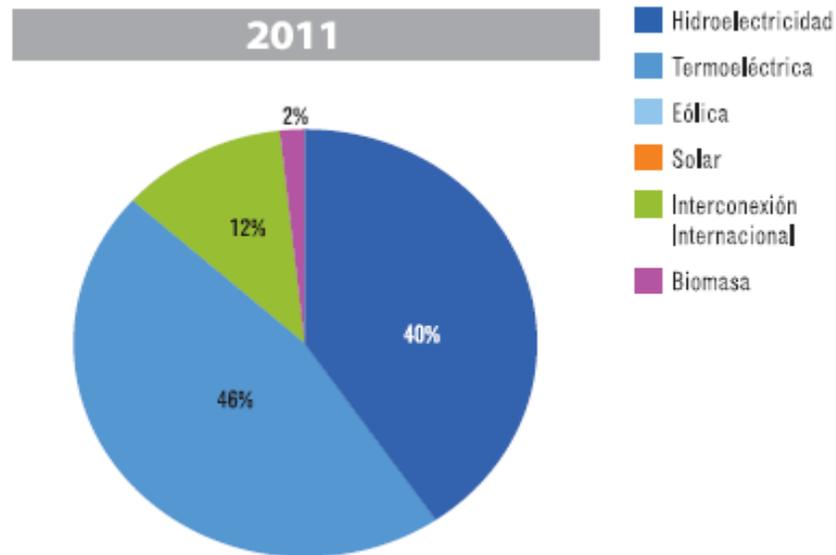


Figura 1. 2: Capacidad instalada tipo fuente

Fuente: Datos Conelec 2011.

De la Figura 1. 2, tomando en cuenta las necesidades y los tipos de energía que presentan en la actualidad el Ecuador, se puede determinar que es necesario la inserción de otras fuentes de energía, que sean menos perjudiciales para el medio ambiente, que no nos haga dependientes de situaciones climatológicas y tampoco de otros países, a la vez de una producción de electricidad que sea económica y que solo dependa de la gestión de los ecuatorianos. Como se pudo observar en las secciones 1.2 y 1.3, una de estas alternativas es la energía nuclear, que debe tener mayor campo de investigación y aplicación en el país.

1.4 VENTAJAS Y DESVENTAJAS

A pesar, que la energía nuclear es clasificada como una energía no renovable, la producción de energía con relación a la cantidad de combustible empleado es considerable, comparándola con otros tipos de energía, además las reservas de material nuclear son abundantes, estas características permiten que la energía nuclear sea considerada en el mundo y en el Ecuador como una energía alternativa y beneficiosa.

En la actualidad se consumen más combustibles fósiles de los que se generan, siendo un factor evidente el agotamiento de estos recursos en un futuro no muy lejano. Otra ventaja importante de la energía nuclear, es que no emite gases perjudiciales al medio ambiente como el CO₂, componente que contribuye al efecto invernadero y por ende al calentamiento global.

Una de las desventajas se encuentra en el riesgo de accidentes, tanto provocados por negligencia humana así como por un desastre natural, dos de estas catástrofes se pueden citar con los ejemplos que se dieron en 1986 en Chernóbil, Rusia y la más reciente en 2011 en Fukushima, Japón. Este tipo de accidentes liberan una gran cantidad de energía radiactiva, que es mortal para los seres vivos y el medio ambiente en general, además de contaminar con radiación todo el sector por muchos años, impidiendo que la vida vuelva a generarse de forma natural.

Los residuos radiactivos, también se pueden considerar como una desventaja, ya que este material pierde su actividad radiactiva en cientos o miles de años y para desecharlos correctamente, se deben hacer estudios para designar el área de almacenamiento, que deberá ser despoblado, sin riesgo de desastres naturales y su construcción deberá contar con normas de seguridad, para que esta radiación no se libere.

1.5 CONCEPTOS FUNDAMENTALES (Landolt H., 2005)⁴

La energía nuclear es aquella energía que se obtiene de una reacción a nivel atómico, existen dos tipos de reacción nuclear que liberan grandes cantidades de energía, la fusión y la fisión; la fusión es la unión de dos átomos para formar uno solo y la fisión es la división de un átomo inestable en dos o tres átomos (según el caso) más ligeros o estables.

⁴ Landolt H., B. R. (2005). *Nuclear Energy: Principles of fission reactors*. Berlin Heidelberg: Springer, pags(5-12)

1.5.1 FISIÓN Y PRODUCCIÓN DE ENERGÍA

La energía eléctrica que se obtiene a través de la energía generada por un reactor nuclear, se origina en el núcleo, tanto del reactor como de los átomos de su combustible (material radiactivo).

El Uranio 235, es un elemento muy pesado y por consiguiente inestable, debido al número de neutrones que posee (146 neutrones y 92 protones), para romper éste átomo, se emplea un neutrón porque es neutro eléctricamente y por tanto, al contrario que el protón, no es repelido por el núcleo.

El neutrón se lanza y al chocar con el átomo de Uranio-235, se convierte en Uranio-236 durante un brevísimo espacio de tiempo, como este último átomo es sumamente inestable, se divide en dos átomos más ligeros y desprende tres neutrones y elementos de fisión. Estos 3 neutrones vuelven a chocar con otros 3 átomos de Uranio-235, liberando en total 9 neutrones, energía y dos átomos más ligeros, y así sucesivamente, generándose de esta forma una reacción en cadena; toda esta reacción se denomina fisión nuclear.

Las barras de U235 se introducen como pastillas en el núcleo del reactor, al iniciarse el proceso de fisión, se desprende energía en forma de calor, éste calienta el agua que es conducida por unas tuberías a un contenedor en el que se genera vapor de agua a alta presión y temperatura. El agua en forma de gas sale del edificio de contención debido a la alta presión hasta llegar a una turbina, donde la energía calorífica del vapor se transforma en energía cinética, la turbina está conectada a un generador eléctrico mediante el cual se transformará la energía cinética en energía eléctrica.

1.5.2 TIPOS DE REACTORES NUCLEARES

Existen varios criterios, por los cuales se clasifican a los reactores nucleares (Energía Nuclear, 2009)⁵, estos son: por el diseño en la generación de vapor, por

⁵ *Energía Nuclear*. (15 de 03 de 2009). Recuperado el 09 de 08 de 2012, de <http://energia-nuclear.net/reactor-nuclear/tipos-de-reactor-nuclear.html>

su combustible empleado, por la velocidad de los neutrones, por el moderador utilizado o por su refrigerante.

Todos estos conceptos se relacionan entre los distintos reactores nucleares, pero un criterio que los define muy bien y se logra diferenciar a cada reactor por su diseño, es por su generación de vapor. Existen dos principales reactores que se destacan, el reactor de generación de vapor de agua a presión (PWR) y el de generación de vapor de agua por ebullición (BWR).

1.5.2.1 Generalidades de los reactores PWR

Los reactores de agua a presión utilizan como moderador y refrigerante agua liviana (agua normal, composición H_2O), además cuentan con tres circuitos que forman parte del sistema de refrigeración y de producción de vapor, en el primer circuito se calienta el agua al estar en contacto con el recubrimiento del combustible, a una presión alrededor de los 16MPa, en el segundo circuito se realiza el intercambio de energía con la turbina, gracias al intercambiador de calor, cuando el agua ha perdido su energía, pasa al tercer circuito donde es condensada y vuelve al primer circuito.

La finalidad de utilizar bombas de agua, para mantener una presión alta en los circuitos, es que el agua no cambie de fase en el núcleo del reactor y se pueda aprovechar todo el vapor en la turbina.

Las barras de control se ingresan desde la parte superior del núcleo y cuando es necesaria la inserción total de las barras, simplemente se las deja caer por medio de la gravedad.

Los reactores PWR producen entre 900 y 1500 MW de potencia y también se los puede encontrar en otras aplicaciones, como por ejemplo, la fuente de energía en submarinos o para propulsión de aviones en bases marítimas.

1.5.2.2 Generalidades de los reactores BWR

Los reactores de agua por ebullición utilizan agua como refrigerante y moderador, el agua se mantiene a una presión constante de 70 atm, al entrar en contacto con

el recubrimiento del combustible cambia de fase, el vapor impulsa la turbina que mueve el generador, produciendo energía eléctrica.

Las centrales BWR no tienen generador de vapor a diferencia de las PWR, que es la interface entre el agua del primario y el vapor del secundario y al no introducir componentes adicionales en el proceso de generación de vapor se acerca más a la concepción clásica de una central térmica.

Las barras de control se introducen por la parte inferior de la vasija debido a la presencia de los separadores y secadores de vapor.

La vasija del reactor y sus componentes asociados operan a una presión notablemente baja (alrededor de 75 veces la presión atmosférica) en comparación con un PWR (unas 158 veces la presión atmosférica).

La vasija del reactor está sometida a irradiación notablemente menor en comparación al PWR, y por tanto no se vuelve tan frágil con el paso del tiempo.

La potencia promedio de los reactores BWR, están entre los 600 y 700 MW.

1.5.2.3 Comparación entre los reactores PWR y BWR

Los reactores BWR, requieren de una vasija de presión mucho más grande que los del PWR y esto implica más costos en la construcción, aunque no requieren de tantas tuberías para llevar el refrigerante como los reactores PWR.

Al necesitar de otros mecanismos que ayuden a introducir la totalidad de las barras de control en el núcleo del reactor, se incrementa el costo en el circuito de control en los reactores BWR.

De igual forma en los reactores BWR, si la refrigeración falla el momento de apagar el reactor, este puede sobrecalentarse hasta temperaturas por encima de los 2200 grados, llevando al agua a descomponerse en hidrógeno y oxígeno, causando un alto riesgo de explosión, que puede amenazar la integridad estructural del reactor.

Los reactores PWR, pueden generar la cantidad de potencia suficiente con cantidades menores de material fisible.

Debido a su bajo costo, elevada seguridad operacional, alta potencia generada en el reactor y aprovechada en la conversión a energía eléctrica, elimina la evaporación nucleada y la capa de corrosión en las varillas de combustible y por ser un reactor moderno, y muy utilizado a nivel mundial; se ha seleccionado al reactor nuclear PWR, fabricado por la compañía Westinghouse, su modelo AP 1000, como el ideal para su investigación y uso de los parámetros de diseño, para el desarrollo de las teorías y del software de simulación de la presente tesis.

1.6 COMPONENTES DEL REACTOR NUCLEAR WESTINGHOUSE MODELO AP1000

1.6.1 NÚCLEO

El núcleo es la parte principal de un reactor nuclear, en él se realiza el proceso de fisión y el primer intercambio energético con el fluido refrigerante. Se encuentra ubicado en el interior de un recubrimiento de acero a presión (Vasija del reactor) y está formado por un conjunto de arreglos de elementos combustibles y barras de control. Para el reactor AP 1000, el refrigerante y moderador es agua liviana.

1.6.1.1 Moderador

El moderador es un elemento que se encuentra en el núcleo del reactor, su principal función es el retardo de los neutrones energéticos. Cuando se produce la fisión nuclear, los neutrones que se desprenden tienen una velocidad aproximada de 20000 km/s. Con esta velocidad, la probabilidad de que un átomo lo absorba y se fisione, es muy baja, es por esto que el moderador es muy importante en una reacción en cadena eficaz en el núcleo del reactor. Los neutrones energéticos, al chocar con el fluido, perderán velocidad y tendrán mayor probabilidad de generar fisión en los átomos de dióxido de uranio. En los reactores Westinghouse AP1000, el moderador utilizado es agua liviana.

1.6.1.2 Elemento combustible

Un elemento combustible está conformado por un arreglo de 289 rejillas o espacios, 264 de estos espacios son ocupados por las varillas de combustible, estas varillas en su interior presentan las pastillas o barras del material radiactivo, 24 espacios más están designados para la inserción de barras de control y el último espacio se utiliza para fines de control, es decir podrá ser utilizado para introducir algún tipo de sensor. Este espacio se encuentra en el centro del arreglo y tiene un tubo guía que en su parte superior e inferior se encuentran soportes que sirven de conexión para las demás varillas.

Todas estas especificaciones son exclusivas del reactor AP 1000, la distribución y el número de espacios del elemento combustible, varían para cada reactor, pero su característica es la misma, distribuir las varillas de combustible y de control de forma organizada y estable.

1.6.1.3 Recubrimientos

En todo este proceso la seguridad es un elemento muy importante en el diseño de reactores nucleares, por ello el reactor y el generador de vapor se encuentran encerrados en una estructura grande llamada Edificio de Contención, construido de hormigón, acero o una combinación de ambos; está diseñado para que en caso de emergencia, contenga un escape de gases radiactivos que alcancen presiones en el rango de 60 a 200 psi o 4 a 13.6 atmósferas. Dentro del edificio de contención se encuentra otro recubrimiento, fabricado de acero y que contiene al núcleo del reactor a una presión determinada, este revestimiento se llama Vasija del reactor y su función es contener los posibles escapes de radiación del núcleo.

En los E.E.U.U, el diseño y grosor de la contención y del blindaje de hormigón se rigen por las reglamentaciones federales (10 CFR 50.55a).

En la Figura 1. 3 se presentan, los componentes del núcleo del reactor y sus recubrimientos. En la Figura 1. 4, se representa gráficamente la distribución de los elementos de combustible, existen varias formas de asignación y el área de la

ingeniería nuclear que estudia dicha distribución se llama en la Gestión del combustible (Tsoulfanidis, 1993)⁶.

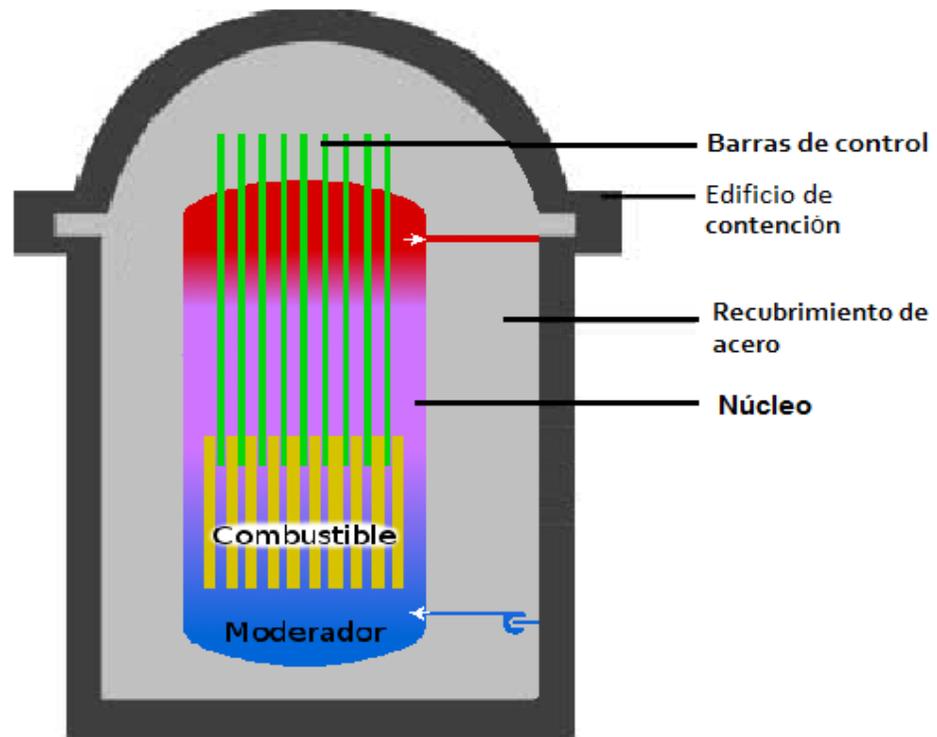


Figura 1. 3: Núcleo del reactor y sus recubrimientos.

Fuente: El Autor.

⁶ Tsoulfanidis, R. G. (1993). *The Nuclear Fuel Cycle: Analysis and Management*. Amer Nuclear Society.

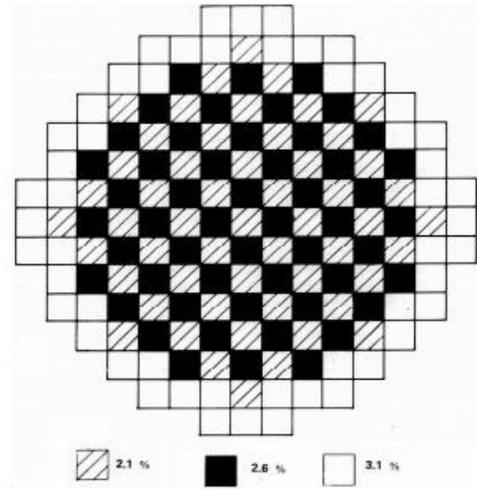


Figura 1. 4: Distribución de los elementos combustibles en el núcleo, con distintos porcentajes de quemado.

Fuente: Tsoufanidis, R. G. (1993). *The Nuclear Fuel Cycle: Analysis and Management*. Amer Nuclear Society.

1.6.1.4 Varilla de combustible

Es el componente que contiene a las pastillas de combustible de UO_2 , está hecho de Zirlo, que es una aleación de zirconio, muy resistente a la radiación y con un punto de fusión muy alto. Las pastillas de UO_2 están distribuidas en forma de pila una sobre otra, entre ellas y el recubrimiento de Zirlo, existe helio, este diseño permite que la dilatación térmica que experimentan las pastillas no afecte al recubrimiento o existan fracturas en el material, esto sería un escenario muy grave, ya que la fuga de radiación en la varilla perjudicaría a todo el sistema. Se seleccionó helio como un fluido de recubrimiento, debido a que tiene una buena conductividad térmica. En la Figura 1. 5, se observa la configuración de la varilla de combustible, conjuntamente con los componentes del elemento combustible.

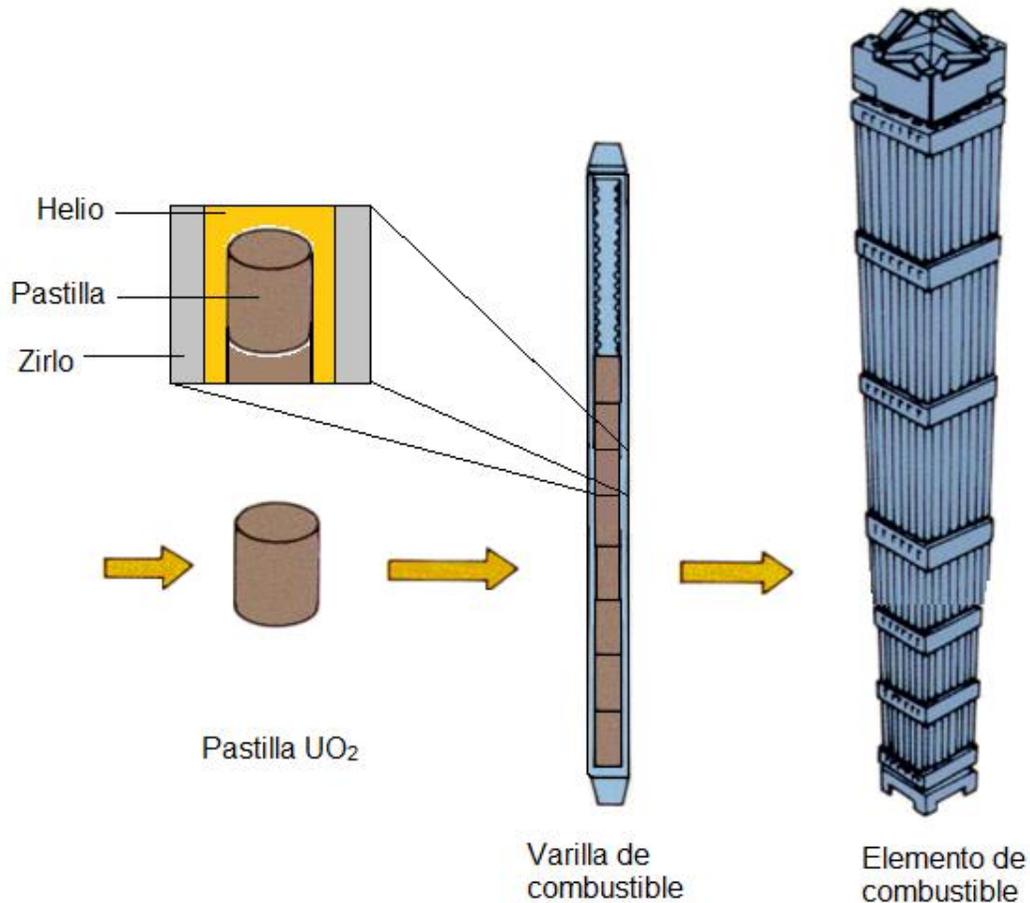


Figura 1. 5: Elementos de la varilla y elemento de combustible.

Fuente 1: http://www.rinconeducativo.org/radiacio/7_energa_nuclear.html

Fuente 2: El Autor.

1.6.1.2 Edificio de contención

El edificio de contención es más pequeño que el de un reactor BWR, pero resiste presiones muy elevadas. Es una estructura de acero independiente, con un espesor de 4,5 centímetros y 39,6 metros de diámetro.

Los componentes restantes del reactor se los describe en la siguiente sección, como parte del funcionamiento, donde se puede detallar sus características y la relación que tienen con los demás componentes.

1.6.2 FUNCIONAMIENTO DEL REACTOR

El reactor AP 1000, utiliza como combustible al dióxido de uranio y como moderador y refrigerante agua liviana. El refrigerante ingresa al primer circuito, a una determinada presión, mediante un conjunto de bombas, posteriormente se introduce en el núcleo del reactor, donde gana energía térmica al estar en contacto con el recubrimiento de la aleación de zirconio. Con una nueva temperatura, pasa por un presurizador, una vez regulada la presión, ingresa al segundo circuito, el primer componente del segundo circuito lo conforma un intercambiador de calor, parte del refrigerante en estado gaseoso se condensa y retorna al primer circuito y la otra parte transfiere su energía a una o varias turbinas, en ellas la energía cinética es transformada en energía eléctrica, que se distribuye para el consumo. Una vez que el refrigerante ha perdido su energía, este se condensa e ingresa al tercer circuito, donde se enfría al estar en contacto con tuberías que contienen agua fría, esta agua normalmente es tomada de ríos o mares cercanos a la planta, una vez enfriado el refrigerante ingresa nuevamente al primer circuito, donde inicia nuevamente el ciclo.

Todo el ciclo de generación de energía y el paso del refrigerante, en sus distintas etapas, además de los componentes de una planta nuclear están descritos gráficamente en la Figura 1. 6. También se puede observar dos configuraciones a la salida del agua fría, que puede ser a través de ríos, lagos o mares o a través de torres de enfriamiento.

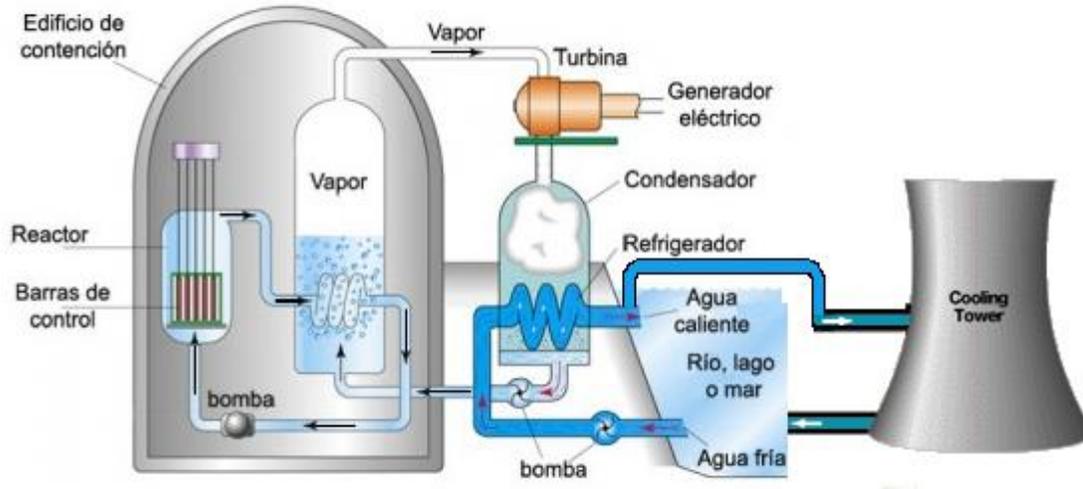


Figura 1. 6: Componentes reactor nuclear.

Fuente 1: <http://energia-nuclear.net>.

Fuente 2: El Autor.

1.6.3 CARACTERÍSTICAS ESPECÍFICAS DEL REACTOR

Una vez que se ha detallado los componentes y el funcionamiento del reactor nuclear AP 1000, es necesario especificar su información. En la tabla 2.1, se detallan cada una de las características necesarias para el desarrollo del software de simulación.

Tabla 1. 2: Características reactor PWR AP 1000

Descripción	Valor	Unidades
Generales		
Combustible	Dioxido de uranio UO2	
Moderador	Agua liviana	
Material del recubrimiento	Zilo	
Refrigerante	Agua liviana	
Gas de relleno	Helio	
Barras de control	Boro, Indio, Cadmio y Plata	
Recubrimiento B. de Control	Acero 304	
Tiempo de vida de la planta	60	Años
Energia		
Potencia máxima de operación	48845	<i>K W/m</i>
Potencia promedio de operación	18970	<i>K W/m</i>
Potencia electrica generada	1117	<i>M W</i>
Combustible		
Masa en el reactor	95974	<i>kg</i>
Masa en la varilla	1.7477	<i>kg</i>
Conductividad térmica	2.7	<i>W/m K</i>
Coefficiente de dilatación lineal	0.000025	<i>1/K</i>
Emisividad	0.85	
Elemento Combustible		
Número de Elementos de combustible en el reactor	157	
Número de Varillas de combustible en el elemento	264	
Dimensiones		
Radio pastilla UO2	0.004095	<i>m</i>
Radio interno del recubrimiento	0.00419	<i>m</i>
Radio externo del recubrimiento	0.00475	<i>m</i>
Largo activo de la varilla de combustible	4.3	<i>m</i>
Largo de las pastillas de combustible	9.82	<i>mm</i>
Paso entre barrillas de combustible	12.59	<i>mm</i>

Fuente: Catalogo reactores nucleares Westinghouse.

CAPÍTULO 2

MODELO MATEMÁTICO DE LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE DE NEUTRONES

Después de describir de forma general a la energía nuclear, es momento de plantear las leyes que rigen el comportamiento de los neutrones, desde su concepto hasta su representación matemática.

Una forma muy utilizada para realizar modelos matemáticos, es mediante la concepción del problema, determinando qué elementos intervienen y cómo se los desarrolla, utilizando la ayuda de gráficos y leyes que rigen su comportamiento, además es recomendable partir desde los conceptos básicos hasta los complejos y de esta forma plantear las ecuaciones resultantes.

El elemento principal del proceso de fisión nuclear es el neutrón. El neutrón existe en el interior del núcleo, tiene carga nula y su masa (1.0087 uma) es muy cercana a la masa atómica. Cuando se encuentra en el confinamiento del núcleo la energía de enlace hace que permanezca estable, pero, cuando se encuentra libre se lo considera inestable y se desintegra en un tiempo aproximado de 10.6 minutos; éste no es el caso de un neutrón libre en un reactor nuclear ya que la interacción de los neutrones hace que su tiempo de reacción sea mucho menor, en el orden de 10^{-4} s y si se trata de reacciones directas este tiempo se aminora. Dado este comportamiento en un reactor nuclear se puede catalogar a los neutrones libres en el presente estudio, como estables.

2.1 INTERACCIÓN DE LOS NEUTRONES CON LA MATERIA

Sin considerar su estructura interna, un neutrón es una partícula de carga nula, lo que le permite interactuar directamente con el núcleo del átomo, sin tener ninguna afectación por la carga negativa de la nube de electrones, ni por la carga positiva en el interior del núcleo. De esta manera, los neutrones no interactúan con la totalidad del átomo sino únicamente con su núcleo.

Las reacciones nucleares derivadas de esta interacción de los neutrones con los núcleos, se pueden clasificar en dos grupos: colisiones de dispersión y colisiones de absorción.

2.1.1 COLISIONES DE DISPERSIÓN

En este tipo de colisión, el neutrón que golpea con un núcleo tendrá una energía menor a la inicial (siempre y cuando no sea un neutrón térmico). Estas colisiones se clasifican en elásticas e inelásticas (Lewis E. E., Section 1-2 , 2008)⁷.

2.1.1.1 Colisión elástica

En este tipo de colisión al golpear el neutrón con el núcleo, éste no experimenta ningún tipo de excitación, sino que simplemente se le transfiere energía cinética, la cual es proporcionada por el neutrón. Esta interacción se denota por el símbolo ($n . n$) en la notación de reacciones nucleares.

2.1.1.2 Colisión inelástica

En este tipo de colisión al ocurrir el choque, el núcleo absorbe parte de la energía del neutrón; y, de esta manera queda excitado (reacción endotérmica). Para que el núcleo vuelva a su estado base o nivel energético fundamental, éste libera radiación electromagnética, específicamente rayos γ . Para que pueda ocurrir este tipo de interacción es necesario que el neutrón posea energía mayor o igual al primer nivel de energía de excitación del núcleo.

⁷ Lewis, E. E. (2008). Section 1-2 . En E. E. Lewis, *Computational Methods of Neutron Transport* (págs. 7-8). 1st Edition.

Es importante mencionar que de acuerdo con las características de los átomos, las colisiones elásticas, ocurrirán en mayor parte cuando el neutrón choque con un átomo ligero ya que sus niveles de excitación son elevados, aproximadamente en el orden de MeV ; en cambio, las colisiones inelásticas se darán con una mayor probabilidad cuando el neutrón choque con un átomo pesado, ya que sus niveles de excitación son bajos, aproximadamente en el orden de KeV .

2.1.2 COLISIONES DE ABSORCIÓN NEUTRÓNICA

Cuando un neutrón choca con el núcleo y éste es absorbido, es decir pasa a formar parte de la composición del núcleo del átomo, se dice que ha ocurrido una absorción neutrónica. El átomo resultante es un isotopo del mismo elemento y puede dar lugar a distintos procesos de absorción nuclear los cuales son:

2.1.2.1 Captura radiactiva

Esta reacción por absorción ocurre cuando el neutrón al chocar es capturado por el núcleo, dando lugar a un isotopo excitado, que posteriormente alcanzará su estado fundamental al emitir rayos γ , estos rayos se denominan rayos γ de captura y esta interacción se denota por el símbolo $(n . \gamma)$.

2.1.2.2 Captura no radiactiva

Esta reacción por absorción ocurre cuando el neutrón al chocar es capturado por el núcleo, pero no lo excita, es decir, el isotopo resultante se encuentra en su estado fundamental.

2.1.2.3 Captura de activación y desintegración β

Esta reacción ocurre cuando el neutrón al chocar es capturado por el núcleo, originando un átomo inestable. Al mismo tiempo un neutrón del núcleo se desintegra emitiendo una partícula β^- un antineutrón $\bar{\nu}_e$ y produciendo un protón, lo cual hace que su número atómico aumente en una unidad. Su notación es $(n . \beta)$.

2.1.2.4 Captura de activación y desintegración α

En este proceso de absorción al excitarse el núcleo, emitirá partículas α para volver a su estado base. Este proceso se utiliza en el control de la reacción nuclear en el reactor, introduciendo barras de boro para que absorban los neutrones libres y ocurra una reacción en cadena controlada. Su notación es (n, α) .

2.1.2.5 Captura de fisión

El neutrón al chocar con el núcleo pesado, es absorbido y el átomo gana una unidad en su número atómico, esto ocurre durante un brevísimo tiempo ya que el núcleo se encuentra muy inestable, lo cual hace que se divida en dos o tres (menos probable) núcleos (átomos) que liberan una energía aproximada de 100 *MeV* y un número determinado de neutrones, por lo general, por cada átomo fisionado se liberan tres neutrones.

2.2 LEYES QUE RIGEN EL COMPORTAMIENTO DEL FLUJO DE NEUTRONES

2.2.1 SECCIÓN EFICAZ

Luego de especificar cómo interactúan los neutrones con el núcleo de los átomos, se debe partir de esta explicación, para describir matemáticamente cada una de las interacciones posibles y así cuantificarlas en función de las variables a estudiar.

Para cuantificar las reacciones nucleares que se puedan presentar, una buena forma de describirlas es desde el punto de vista estadístico, ya que la probabilidad de que ocurra una de estas reacciones, dependerá de varios factores como son: el tipo de núcleo blanco y su densidad en un volumen determinado, la energía de la partícula incidente y el tipo de reacción a considerar.

Si todas las partículas que inciden en un volumen determinado, generan una reacción nuclear, una buena forma de determinar esta probabilidad es:

$$P = \frac{\text{Número de interacciones producidas}}{\text{Número de partículas que inciden}}$$

Ahora bien, el grado con el cual los neutrones interactúan con los núcleos blancos, dará un valor cuantificado y a esto se denomina *sección eficaz*.

2.2.1.1 Sección Eficaz Macroscópica:

Para describir la sección eficaz macroscópica, se presenta un escenario que permita determinar de forma clara este concepto. Se considera un haz monoenergético de neutrones el cual incide sobre un blanco que tiene una profundidad diferencial, este blanco está compuesto de un material homogéneo y una densidad superficial determinada, esta descripción se la visualiza en la Figura 2. 1. La intensidad del haz de neutrones incidente se verá afectado después de pasar por el blanco, ya que varios neutrones habrán interactuado con los núcleos del material, este comportamiento se describe matemáticamente de la siguiente forma:

$$\frac{dI}{dx} = -\Sigma I_0 \quad (2. 1)$$

Donde:

I_0 Intensidad de neutrones que incide en el blanco. [cm^2/s].

dx Espesor diferencial. [cm]

Σ Sección eficaz macroscópica. [cm^{-1}]

dI Intensidad final de los neutrones. [cm^2/s]

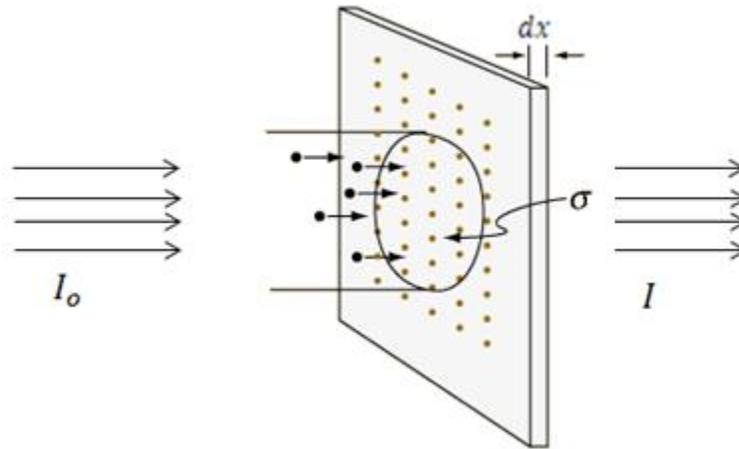


Figura 2. 1: Haz de neutrones que inciden sobre un blanco de volumen diferencial.

Fuente 1: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu>.

Fuente 2: El Autor.

Esto quiere decir que la tasa de cambio de la intensidad de neutrones con relación al espesor del blanco, será igual a la intensidad de neutrones que inciden por la constante de proporcionalidad o *sección eficaz macroscópica*, que es el factor de interacción en todo el blanco del haz de neutrones. Ésta, está en función del número de núcleos presentes en el blanco por lo que será una magnitud relativa al comportamiento macroscópico del material y de la interacción que se esté tomando en cuenta.

Si el haz de neutrones recorre una cierta distancia hasta golpear el blanco en un segundo, entonces la intensidad del haz estará dado en cm^2/s . Si se resuelve la ecuación (2.1), se obtiene la ecuación de la intensidad I para cada recorrido de x dado:

$$I = I_0 e^{-\Sigma x}$$

Si $\lambda = \frac{1}{\Sigma}$, se reemplaza en la ecuación anterior, se obtiene:

$$I = I_0 e^{-\frac{1}{\lambda}x} \quad (2.2)$$

Donde λ es el *recorrido libre medio*, como se observa si λ es igual a x , es decir cada vez que ha avanzado una distancia igual al recorrido libre medio, la intensidad del haz disminuye en relación a e . Esto quiere decir que λ corresponde a la distancia media necesaria para que ocurra un determinado tipo de interacción. Es importante especificar que este comportamiento está representado desde un punto de vista de probabilidades, como se detalló al inicio de este capítulo, toda ésta información esta referenciada según (Lewis E. E., 2008)⁸, (Charles, 1957)⁹.

Como la intensidad inicial está dada en cm^2/s , el recorrido libre medio λ tiene unidades de cm y Σ en cm^{-1} , como el resultado de la relación de estas dos magnitudes es la potencia del operador e , este factor tendrá unidades adimensionales y por lo tanto se comprueba que la intensidad estará en cm^2/s .

2.2.1.2 Sección Eficaz Microscópica

Como se analizó anteriormente la relación con la cual interactúan los neutrones con los átomos, es la sección eficaz y como ésta depende del número de átomos que se encuentren en el blanco por unidad de volumen o también llamado densidad atómica N , se puede representar éste fenómeno de interacción en términos de la probabilidad de choque por núcleo, de lo cual se obtiene:

$$\Sigma = \sigma N \quad (2.3)$$

Donde:

Σ Sección eficaz macroscópica. [cm^{-1}]

σ Sección eficaz microscópica. [*barn*] [$10^{-24}cm^2$]

N Densidad atómica. [Átomos/ cm^{-3}]

La *sección eficaz microscópica* sigue siendo una constante de proporcionalidad pero, en este caso, representa las características físicas de los núcleos de forma

⁸ Lewis, E. E. (2008). Section 1-2. En E. E. Lewis, *Fundamentals of Nuclear Reactor Physics* (págs. 12-13). AP.

⁹ Charles, F. B. (1957). Nuclear Engineering. En F. B. Charles, *Nuclear Engineering* (págs. 11-13). New York: McGraw-Hil.

individual. Al ser una magnitud muy pequeña, se mide en barns o barnios, cuya abreviación es b y es equivalente a 10^{-24}cm^2 .

Como se detalló en la sección 2.2 los neutrones interactúan con los núcleos de distintas formas y como la sección eficaz es la relación de interacción de los núcleos, se puede representar cada una de estas interacciones en sus secciones eficaces, de esta forma σ_s será la sección eficaz de dispersión (en inglés “*scattering*”) y σ_a será la sección eficaz de absorción, también se pueden ampliar estos términos por sus condiciones particulares, por ejemplo: en la absorción se puede dar el caso de la fisión y su sección eficaz será representada por σ_f , así se puede describir cada caso de interacción posible con su sección eficaz. Si se suma todas las secciones eficaces de todas las posibles interacciones, se obtiene la sección eficaz total.

$$\sigma_t = \sigma_\gamma + \sigma_s + \sigma_a + \sigma_f \dots$$

2.2.1.3 Tasa de interacción

Es la representación de la cantidad de colisiones producidas en un medio por unidad de tiempo, es decir el número de interacciones por cm^3/s , también llamada en otros textos como *rapidez de colisión*, está representado matemáticamente de la siguiente forma:

$$F = I N \sigma$$

O en función de la sección eficaz macroscópica:

$$F = I \Sigma = \phi \Sigma \tag{2.4}$$

Donde ϕ es el *flujo neutrónico* o *flujo escalar* y se representa como el número de neutrones por su rapidez:

$$\phi = n * v \quad (2.5)$$

Donde:

n Número de neutrones.

v Rapidez. [cm/s]

2.3 VARIABLES QUE INTERVIENEN EN LA DIFUSIÓN DE NEUTRONES

El comportamiento de los neutrones en el confinamiento de un reactor nuclear es desordenado ya que, al golpear con los núcleos se generan diversas reacciones nucleares, trasladándose de un lado a otro y describiendo trayectorias diferentes en cada colisión. Los neutrones que poseían una dirección, una posición y una energía particular, después de un tiempo se encontrarán con otra dirección, posicionados en otro lugar del volumen del reactor y con otra energía. Para éste tipo de comportamiento de los neutrones, se debe realizar un análisis de cómo fueron transportados y bajo qué condiciones, de ésta manera se podrá desarrollar un modelo matemático que describa el comportamiento del transporte de los neutrones en su totalidad, para posteriormente, aplicar los métodos numéricos correspondientes y realizar la simulación del sistema.

El número máximo de interacciones que pueden ocurrir en un reactor nuclear, permite analizar al problema en un espacio continuo, como un promedio total de todas estas colisiones, éste análisis se puede realizar bajo los principios planteados por Ludwig Edward Boltzmann, que desarrolló varias teorías sobre el comportamiento de las moléculas en movimiento, sus velocidades y cómo interactúan entre sí, cuando ha ocurrido un choque entre ellas. Aunque este análisis se obtuvo para partículas de gases ideales, se puede aplicar al transporte de neutrones, ya que en éste caso al ser mucho menor la densidad de los neutrones comparada con la densidad de los núcleos, hace que aquellas teorías

se puedan aplicar, como es el caso de la teoría de transporte de Boltzmann o también llamada la ecuación lineal de Boltzmann.

Existen varias formas de plantear la ecuación de transporte de neutrones, pero la formulación integro-diferencial es la más aplicada para sistemas de reactores nucleares o aplicaciones físicas, sin embargo no es la única, ésta representación servirá para el análisis presentado en la sección 2.6. Para llegar a este resultado, primero se plantean las características particulares de cada término del comportamiento de transporte, en forma cuantificada, pero esta vez, tomando en cuenta las variables dependientes e independientes que intervienen en cada término.

2.3.1 VARIABLES INDEPENDIENTES (Lewis E. E., Integro-differential neutron Boltzman equation, 1984)¹⁰

Se supone un neutrón posicionado en un espacio que por el momento no habrá necesidad de delimitarlo, para describir en qué posición de este volumen se encuentra, es necesario representarlo en coordenadas cartesianas, así éste neutrón estará descrito en el espacio de la siguiente forma: $n(\vec{r}) = (xi, yj, zk)$, donde \vec{r} es el vector posición en las coordenadas cartesianas. Ahora, este neutrón también se encontrará con una rapidez y dirección determinada, pero como no es posible describir la posición y la velocidad del neutrón en el mismo espacio, será necesario describir la velocidad del neutrón en un espacio de velocidades, éste estará superpuesto al vector posición y en él se representa el vector velocidad \vec{V} , que especifica un punto en la superficie de una esfera ficticia de radio unidad, el cual rodea el neutrón y apunta en la dirección de desplazamiento. Esto quiere decir, que el vector velocidad se encuentra descrito en coordenadas esféricas y en función de sus vectores base (Radio de la esfera igual a la unidad), estas representaciones se visualizan en la Figura 2. 2.

Como cualquier vector se puede representar en función de sus vectores base, el vector velocidad también se lo puede representar de esta manera, donde la

¹⁰ Lewis, E. E. (1984). Integro-differential neutron Boltzman equation. En E. E. Lewis, & W. F. Miller, *Computational Methods of Neutron Transport* (págs. 4-5). John Wiley & Sons.

velocidad del neutrón en la posición \vec{r} , será: $\vec{V} = \vec{u} \cdot V$, en la cual V , es la rapidez y \vec{u} es el vector base en coordenadas esféricas $\vec{u}(\theta, \varphi)$.

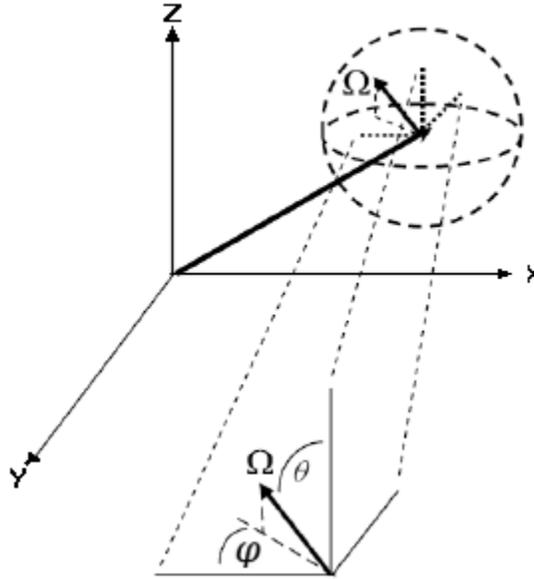


Figura 2. 2: Representación espacial: posición-velocidad de un neutrón.

Fuente 1: *Computational methods of neutron transport*, E. E. Lewis and W. F. Miller, New York: John Wiley & Sons, 1984.

Fuente 2: El Autor.

La rapidez del neutrón permitirá determinar con que energía cinética se encuentra, en una posición \vec{r} y en la dirección $\vec{\Omega}(\theta, \varphi)$, así se obtiene:

$$E = \frac{1}{2} m V^2$$

Un neutrón de masa m en un instante de tiempo t , se lo puede representar en sus seis variables clásicas independientes $(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ que representan el estado de movimiento del neutrón o de un conjunto de neutrones.

2.3.2 VARIABLES DEPENDIENTES (Lewis E. E., *Integro-differential neutron Boltzman equation, 1984*)¹¹

Cualquier característica del comportamiento de los neutrones puede ser expresada en función de sus seis variables clásicas de estado de movimiento, como se detalló en la sección 2.5.1. Si estas seis variables se las agrupa en un solo vector $\vec{P} = (\vec{r}, \vec{V})$, éste vector representará el espacio de fase del neutrón.

Si se descompone a la velocidad en su dirección y rapidez se obtiene:

$$\vec{P} = (\vec{r}, E, \vec{\Omega}).$$

Al realizar el análisis del transporte de neutrones, su ubicación, trayectoria y energía variarán en el tiempo y en el espacio en el cual estén representados, por lo que, se obtendrá una variación de éstas seis variables, así: $(\Delta\vec{r}, \Delta E, \Delta\vec{V}) = \Delta\vec{P}$, será una variación en el espacio de fase del neutrón.

Una característica muy importante en el estudio de la Teoría de Transporte, es el número de neutrones, detallándola en un tiempo determinado y en un espacio como el descrito en la sección 2.5.1, se describe de la siguiente forma:

$$N(\Delta\vec{r}, \Delta E, \Delta\vec{\Omega})$$

La dirección de la velocidad del neutrón al estar representada en coordenadas esféricas, se puede describir como una variación de un ángulo sólido. Los ángulos sólidos se miden en esteroradianes y son una buena forma de especificar una variación de trayectorias en un espacio en tres dimensiones.

Ya que el transporte de neutrones se lo está estudiando dentro de un reactor nuclear, se desea conocer el número de neutrones que se encuentran en un determinado volumen del reactor, entonces por cada diferencial de volumen en su confinamiento y dependiendo de la posición en la que se desee estudiar, ésta variable, existirá un número determinado de neutrones. Al integrar éste término,

¹¹ Lewis, E. E. (1984). *Integro-differential neutron Boltzman equation*. En E. E. Lewis, & W. F. Miller, *Computational Methods of neutron transport* (págs. 5-8).

especificando los límites superior e inferior de la integral de volumen, se obtendrán el número de neutrones en todo el reactor nuclear, ya que se especificará su volumen en las coordenadas cartesianas (x, y, z) . Descrito matemáticamente se obtiene:

$$N(E, \Omega) = \int_V N(r, E, \Omega) dr \quad (2.6)$$

En la ecuación (2.6), dr por su descripción en coordenadas cartesianas representa el diferencial de volumen y la integral de la función sobre V dará el número de neutrones presentes en el volumen que se desea estudiar y si los límites superior e inferior representan el volumen total del reactor, se obtendrá esta variable en el confinamiento del reactor nuclear. Éste término $N(r, E, \Omega)$ se conoce como la *función de distribución de neutrones*, es el número de neutrones por cm^3 , en la posición r .

Al transcurrir un tiempo determinado, se presentará una variación en la trayectoria y en la energía de los neutrones, producto de las colisiones que sufren en el reactor, considerando esta variación como un diferencial de estas variables, se obtendrá el número de neutrones en cada transición.

El diferencial de trayectoria se puede expresar como un diferencial de ángulo sólido. Al integrar la función, se debe especificar los límites de integración, para obtener todas las posibles direcciones en las que un neutrón puede dirigirse, se debe integrar sobre toda la esfera de radio unidad, es decir sobre 4π , que es la totalidad de estereorradianes en una esfera.

Otra variable que sufrirá un cambio es la energía, ya que al chocar con otros neutrones se ganará o se perderá dicha magnitud, entonces el número de neutrones por cm^3 que poseen energías entre E y $E + dE$, con una dirección $d\Omega$ será:

$$N(r) = \int_0^\infty \int_{4\pi} N(r, E, \Omega) d\Omega dE \quad (2.7)$$

Donde:

N Densidad neutrónica. [*neutrones/cm³*]

r Posición en coordenadas cartesianas. [*cm*]

E Energía. [*J*]

Ω Dirección del neutrón en coordenadas polares. [*sr*]

Si se multiplica la ecuación (2.7) por la velocidad, se tiene el flujo neutrónico y si se multiplica por la sección eficaz macroscópica, se obtendrá la razón de interacción por unidad de energía con dirección Ω , en la posición r , de la siguiente manera:

$$F(r) = \int_0^{\infty} \int_{4\pi} \Sigma(r, \Omega, E) \phi(r, \Omega, E) d\Omega dE \quad (2.8)$$

La ecuación (2.8) representa la razón de interacción total que ocurre en el reactor, pero también se puede expresar esta ecuación como la sumatoria de las razones de interacción individuales, especificando en cada término la sección eficaz en la que se está realizando el análisis. Así se obtiene:

$$F_t = F_s + F_a + F_f \dots$$

En el estudio del transporte de neutrones, también se debe tomar en cuenta el flujo de neutrones que, entran o salen a través de la superficie del volumen del reactor nuclear. En éste caso la dirección del flujo debe ser perpendicular a una sección de área de dicho volumen, a éste flujo se lo denomina en algunos textos como *vector de flujo angular*, su magnitud es la tasa de flujo de neutrones por esteroradian, energía y área, en dirección Ω , que pasa a través de un área unitaria normal a \vec{n} . En la Figura 2. 3 se muestra el vector normal \vec{n} que pasa a través del área unitaria; y, a la vez, un conjunto de vectores normales a la superficie, los cuales representan la dirección del flujo de neutrones que entran y salen del volumen de control. A continuación se representa éste comportamiento:

$$\vec{J} = N(r, \Omega, E) \cdot \vec{V} dS = N(r, \Omega, E) \cdot \vec{\Omega} \cdot V dS \quad (2.9)$$

Donde V es la rapidez del flujo, N es el número de neutrones, \vec{n} es el vector normal a la superficie y dS es un diferencial de área perpendicular a la dirección del flujo de neutrones. De la ecuación (2.5) se representa el flujo neutrónico, reemplazando en (2.9) y multiplicando por el vector normal a la superficie dS se obtiene el flujo de neutrones que atraviesa la superficie de frontera:

$$\vec{J} \cdot \vec{n} = \iint_S \phi(r, \Omega, E) \cdot \vec{\Omega} \cdot \vec{n} dS \quad (2.10)$$

Si se aplica el Teorema de Gauss, el cual dice que el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada, se puede relacionar con la integral de la divergencia de dicho campo sobre el volumen que encierra esta superficie, se obtiene:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{J}(r, \Omega, E) dV = \iint_S \vec{J}(r, \Omega, E) \cdot \vec{n} dS \quad (2.11)$$

Donde J es el flujo total de neutrones por cm^3 que atraviesan la superficie de forma perpendicular sobre todo el volumen de control, en otras palabras el flujo de neutrones que entran o salen de la superficie del volumen del reactor nuclear.

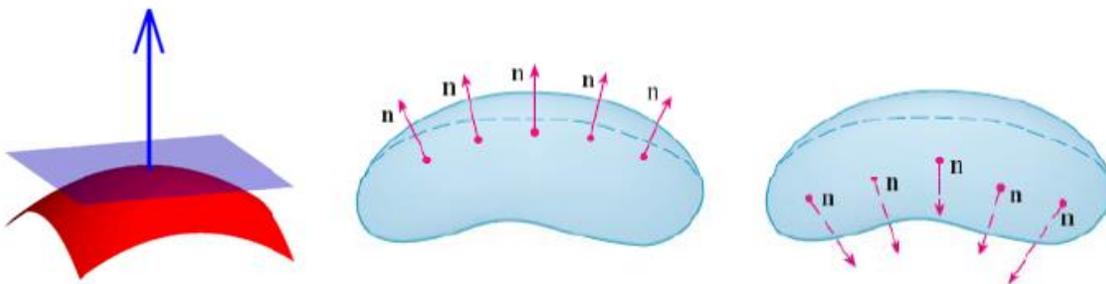


Figura 2. 3: Flujo de neutrones a través del volumen de control.

Fuente 1: <http://cse.csusb.edu>.

Fuente 2: El Autor.

2.4 FLUJO DE NEUTRONES QUE SE PRODUCEN EN EL INTERIOR DE UN REACTOR NUCLEAR

En el núcleo de un reactor nuclear, se encuentra su combustible o las barras radioactivas, como se describió en el capítulo 1, estas barras pueden ser de Uranio 235, u otros elementos radiactivos, como por ejemplo el Pl239. En este estudio se tomará exclusivamente al U235 como el material radiactivo de combustible.

Para generar una reacción en cadena y que el reactor empiece a producir grandes cantidades de energía, primero se debe disparar una cantidad de neutrones que empiecen con la reacción de fisión, en la mayoría de reactores la fuente que produce dichos neutrones, se encuentra en el interior de las barras de combustible, tomando éste caso en particular, se puede observar que no existirá un flujo de neutrones que ingrese por la superficie del volumen de control, entonces el término del flujo angular vectorial (determinado en la sección 2.5.2) especificará solamente a los neutrones que abandonan el volumen a través de la superficie.

Entonces los neutrones que se disparan dentro del confinamiento del reactor, chocarán con los núcleos blancos y generarán tres tipos de reacciones, la primera es, que el núcleo no los absorba y el neutrón sea dispersado, el segundo caso es, que el núcleo los absorba pero sin generar fisión y el tercero es, que el núcleo blanco absorba al neutrón y se produzca la reacción de fisión.

En la presente sección se estudiarán dos casos: el de fisión y el de dispersión, ya que éstos términos originarán neutrones dentro del volumen de control, el término de captura no radioactiva se determinará directamente en las ecuaciones de balance de la sección 2.6.

En el caso de la dispersión, la fuente dentro del reactor disparará neutrones energéticos que chocarán con los núcleos blancos y cambiarán de trayectoria, de energía y de posición pero, seguirán existiendo dentro del volumen del reactor. Para describir éste procedimiento, es necesario ponerlo en términos de la sección

eficaz macroscópica de dispersión Σ_s , de la ecuación (2.1) el flujo disperso es igual, al flujo incidente por la sección eficaz macroscópica de dispersión, ahora bien, como se está analizando el problema dentro del reactor nuclear, la magnitud que atraviesa el flujo neutrónico será un diferencial de volumen y no sólo de un espesor en una dimensión, así la integral sobre todo el volumen de control, dará el flujo de neutrones de dispersión en el reactor nuclear. De esta forma se determina que:

$$\phi_s = \int_V \int_0^\infty \int_{4\pi} \phi(r, \Omega_o, E_o) \Sigma_s(r, \Omega_o, \Omega, E - E_o) d\Omega_o dE_o dr \quad (2.12)$$

Dónde:

ϕ_o Flujo escalar incidente. [Número de neutrones / $cm^2 \cdot s$]

Σ_s Sección eficaz macroscópica de dispersión. [cm^{-1}]

Ω_o Dirección inicial en tres dimensiones. [sr]

Ω Dirección final en tres dimensiones. [sr]

E_o Energía inicial del neutrón. [J]

E Energía final del neutrón. [J]

Para el caso particular de la fisión, cuando los neutrones proyectados chocan con los núcleos blancos, se producirá la captura del neutrón, el núcleo quedará excitado, se volverá tan inestable que se fisiónará en dos núcleos estables, produciendo gran cantidad de energía, productos de fisión y dos o tres neutrones (como se explicó en la sección 1.5). Para describir este comportamiento, una forma fácil y factible de hacerlo es por medio de la estadística, así la probabilidad fraccional de que un neutrón de fisión aparezca es igual a: $\frac{X(E)}{4\pi}$

Si se normaliza, se obtiene: $\int_0^\infty X(E) dE = 1$

Ahora el número promedio de neutrones producidos por fisión será: $\nu(E)$ [neutrones]

La probabilidad de que un flujo de neutrones choque con una sección eficaz de fisión es:

$$\Sigma_f(r, E_o) \phi(r, \Omega_o, E_o) = \text{probabilidad de choque de fisión.}$$

Al multiplicar la probabilidad fraccional de que un neutrón de fisión aparezca, con un diferencial de trayectoria y con una energía determinada, por el número promedio de neutrones producidos por fisión, por la probabilidad de que un flujo de neutrones choque con una sección eficaz de fisión y por un diferencial de volumen; todo este producto se integra sobre el volumen de control, se obtendrá el flujo total de neutrones producidos por fisión en todo el reactor nuclear. Matemáticamente se representa:

$$\Phi_f = \int_V \int_0^\infty \int_{4\pi} \frac{\chi(E)}{4\pi} \nu(E) \phi(r, \Omega_o, E_o) \Sigma_f(r, E_o) d\Omega_o dE_o dr \quad (2.13)$$

El último término de producción de neutrones dentro del volumen de control, es el que origina el proceso de fisión, se llama término fuente y se lo representa de la siguiente forma:

$$\text{Fuente} = Q(r, \Omega, E)$$

Una vez que se han determinado los términos de producción de neutrones en el confinamiento del reactor nuclear de forma matemática (Lewis E. E., Contributions to the total neutron balance, 1984)¹², (Sesonske, 1990)¹³, se puede plantear con todos estos antecedentes la ecuación de balance de neutrones.

¹² Lewis, E. E. (1984). Contributions to the total neutron balance. En E. E. Lewis, & W. F. Miller, *Computational Methods of Neutron* (págs. 9-11). New York: John Wiley & Sons.

¹³ Sesonske, S. G. (1990). Conceptos del flujo de neutrones. En S. G. Sesonske, *Ingeniería de Reactores Nucleares* (págs. 21-25). Barcelona: Reverte.

2.5 ECUACIÓN DE BALANCE

La ecuación de balance de neutrones, proporcionará la información de la cantidad de neutrones que se encuentran dentro de un volumen arbitrario, en cualquier instante de tiempo. Este dato es justamente el propósito del modelo matemático que se desea representar.

Para realizar el análisis en función del tiempo, del volumen arbitrario que contiene a los neutrones o también llamado volumen de control, es importante primero, entrar en el estudio del Teorema del Transporte de Reynolds, ya que este análisis se lo realizó bajo este concepto.

2.5.1 TEOREMA DE TRANSPORTE DE REYNOLDS

El Teorema del Transporte de Reynolds realiza un análisis del comportamiento de un volumen de control que se mueve con el flujo de un material, en un tiempo determinado. El Teorema proporciona la información de la tasa de cambio de una propiedad extensiva de este material en función del tiempo y la relaciona con, el intercambio de materia que experimenta el volumen de control a través de su superficie, conjuntamente con la contribución de producción interna del material. Matemáticamente el teorema está expresado de la siguiente forma:

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} B(r, t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial B(r)}{\partial t} dV + \int_{V(t)} \nabla \cdot \vec{V} B(r) dV \quad (2.14)$$

El término de la izquierda es la tasa de cambio de la propiedad extensiva $B(r, t)$ en función del tiempo, el primer término del lado derecho de la igualdad, se refiere a la tasa de acumulación en el interior del volumen y el segundo término de la derecha de la igualdad, es la cantidad de $B(r)$ que pasa a través de la superficie del volumen de control, por ello $\nabla \cdot \vec{V} B(r)$.

Como se observa en la descripción (ampliar información en (Bird, 1998)¹⁴ (Jakobsen, 2007)¹⁵) este teorema relaciona las características que se necesita

¹⁴ Bird, S. (1998). LA ECUACION DE CONTINUIDAD. En S. Bird, *Fenómenos de transporte* (págs. 3.4-3.17). Lightfoot.

para desarrollar la ecuación de balance de neutrones. Simplemente se reemplaza la propiedad extensiva por la propiedad que se desea determinar, que en este caso es el flujo de neutrones; y, además, se reemplazan los términos de absorción, pérdida y dispersión estudiados en la sección anterior.

2.5.2 CONTRIBUCIÓN AL BALANCE TOTAL DE NEUTRONES

Para plantear la ecuación de balance de neutrones, primero se debe escribir en palabras, las cantidades de ganancia y pérdida. De esta forma, la razón de cambio del número de neutrones con respecto al tiempo, dentro de un volumen delimitado, será igual a la razón de producción de los neutrones, menos la razón de pérdida. De forma esquematizada se tiene:

$$\boxed{\text{Flujo de neutrones en } t} = \boxed{\text{Flujo de neutrones producidos: Difusión y Fisión}} - \boxed{\text{Flujo de neutrones perdidos: Absorción y Escape}}$$

Se reemplaza cada término por su correspondiente matemático:

$$\text{Flujo de neutrones producidos} = \int_{V(t)} \phi_{fuente}(r, t) dV$$

Al igual que se reemplaza el término de producción por los términos de difusión y fisión obtenidos en la sección (2.5.3), así:

¹⁵ Jakobsen, H. A. (2007). Equation of Change for Multi-Component Mixtures. En H. A. Jakobsen, *Chemical Reactors Modelling* (págs. 8-17). Berlin: Springer.

$$\begin{aligned}
& \int_{V(t)} \Phi_{\text{fuente}}(r, t) dV \\
&= \int_V \int_0^\infty \int_{4\pi} \frac{X(E)}{4\pi} v(E) \phi(r, \Omega_o, E_o, t) \Sigma_f(r, E_o) d\Omega_o dE_o dr \\
&+ \int_V \int_0^\infty \int_{4\pi} \phi(r, \Omega_o, E_o, t) \Sigma_s(r, \Omega_o, \Omega, E - E_o) d\Omega_o dE_o dr \\
&+ Q(r, \Omega, E, t)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Y para el flujo de neutrones que se absorben o se pierden por la superficie del volumen se tiene:

$$\text{Flujo de neutrones que se absorben o se pierden fuera del volumen} = \int_{V(t)} \phi_{\text{perdida}}(r, t) dV$$

De la misma forma se reemplaza el término de pérdida por los términos de absorción y flujo de neutrones que abandonan el volumen a través de la superficie, obtenidos en la sección (2.5.2), así:

$$\begin{aligned}
& \int_{V(t)} \phi_{\text{perdida}}(r, t) dV \\
&= \int_{V(t)} \Sigma_a(r, \Omega, E) \phi(r, \Omega, E, t) + \int_{V(t)} \nabla \cdot \Omega \phi(r, \Omega, E, t) dV
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Si se reemplazan todos éstos términos en la ecuación de continuidad, se obtendrá la ecuación lineal de Boltzmann, la cual describe el comportamiento del transporte de los neutrones en función del tiempo, en un volumen determinado.

$$\begin{aligned}
& \int_{V(t)} \frac{\partial \phi(r, \Omega, E, t)}{\partial t} d \\
&= \int_V \int_0^\infty \int_{4\pi} \frac{X(E)}{4\pi} v(E) \phi(r, \Omega_o, E_o, t) \Sigma_f(r, E_o) d\Omega_o dE_o dr \\
&+ \int_V \int_0^\infty \int_{4\pi} \phi(r, \Omega_o, E_o, t) \Sigma_s(r, \Omega_o, \Omega, E - E_o) d\Omega_o dE_o dr \quad (2.17) \\
&- \int_V \Sigma_a(r, \Omega, E, t) \phi(r, \Omega, E, t) dr - \int_V \nabla \cdot \Omega \phi(r, \Omega, E, t) dr \\
&+ Q(r, \Omega, E, t)
\end{aligned}$$

Ya que se consideró un volumen arbitrario y asumiendo un integrando continuo, se pueden eliminar las integrales sobre el volumen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \phi(r, \Omega, E, t)}{\partial t} &= \int_0^\infty \int_{4\pi} \frac{X(E)}{4\pi} v(E) \phi(r, \Omega_o, E_o) \Sigma_f(r, E_o) d\Omega_o dE_o \\
&+ \int_0^\infty \int_{4\pi} \phi(r, \Omega_o, E_o, t) \Sigma_s(r, \Omega_o, \Omega, E - E_o) d\Omega_o dE_o \quad (2.18) \\
&- \Sigma_a(r, \Omega, E, t) \phi(r, \Omega, E, t) - \nabla \cdot \Omega \phi(r, \Omega, E, t) \\
&+ Q(r, \Omega, E, t)
\end{aligned}$$

Para simplificar aún más la ecuación (2.18) se introduce el término de flujo angular en la ecuación (2.19), en ella se puede observar que el flujo escalar se obtiene al integrar el flujo angular sobre todas las direcciones posibles.

$$\phi(r) = \frac{1}{4} \int_{S^2} \psi(r, \Omega_o) d\Omega_o \quad (2.19)$$

Dónde:

ψ Flujo angular. [*neutrones/cm² . s . eV*]

Finalmente reemplazando la ecuación (2.19) en la ecuación (2.18) y aplicando las simplificaciones descritas en (Lewis E. E., Contributions to the total neutron balance, 1984)¹⁶, se obtiene la ecuación lineal de Boltzmann:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{v} \frac{\partial \psi(r, \Omega, E, t)}{\partial t} &= \int_{\mathbb{R}^+} \int_{S^2} \frac{X(E)}{4\pi} v(E) \psi(r, \Omega_o, E_o, t) \Sigma_f(r, E_o) d\Omega_o dE_o \\
 &+ \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{S^2} \psi(r, \Omega_o, E_o, t) \Sigma_s(r, \Omega_o, \Omega, E - E_o) d\Omega_o dE_o \\
 &- \Sigma_a(r, \Omega, E, t) \psi(r, \Omega, E, t) - \nabla \cdot \Omega \psi(r, \Omega, E, t) \\
 &+ Q(r, \Omega, E, t)
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

La ecuación (2.20), describe el caso particular, que se tratará en el presente proyecto, este es, el problema de fuente, llamado así porque en el inicio del funcionamiento del reactor nuclear, es necesario irradiar al combustible con neutrones, que serán la fuente de energía que inicie la reacción en cadena del proceso de fisión, este proceso generara nuevos productos y neutrones libres; la acumulación de estos neutrones, proporcionará la información necesaria para obtener los datos de concentración y de energía, que se generan en el combustible del reactor.

2.6 EL PROBLEMA DE CRITICIDAD

Cuando se introduce una fuente de neutrones en el reactor nuclear, éstos al chocar, producen otros neutrones por la reacción de fisión, el objetivo principal en cualquier reactor nuclear, es crear una reacción en cadena controlada, capaz de aprovechar la energía producida por las reacciones nucleares, pero, que pueda manejarse según los alcances de los operadores del reactor.

¹⁶ Lewis, E. E. (1984). Contributions to the total neutron balance. En E. E. Lewis, & W. F. Miller, *Computational Methods of Neutron* (págs. 29-39). New York: John Wiley & Sons.

El objetivo del diseño de un reactor es crear una reacción en cadena controlada, esto se logra a través de un flujo de neutrones que no cambien en función del tiempo una vez iniciado el proceso, es decir, una vez introducida la fuente de energía. De la misma forma el número de neutrones que se producen dentro del volumen debe ser igual al número de neutrones que lo abandonan. Cuando existe tal comportamiento en el interior de un reactor, se dice que es *crítico* (Glasstone & Sesonske, El problema de criticidad, 1990)¹⁷.

Para plantear el problema de criticidad simplemente se eliminan de la ecuación (2.20) los términos de: variación en función del tiempo $\frac{\partial \psi(r, \Omega, E, t)}{\partial t}$ y de fuente de neutrones $Q(r, \Omega, E, t)$, de esta forma se obtiene una ecuación de balance en estado estacionario y el problema de criticidad queda planteado de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 0 = & \int_{\mathbb{R}^+} \int_{S^2} \frac{X(E)}{4\pi} v(E) \psi(r, \Omega_o, E_o) \Sigma_f(r, E_o) d\Omega_o dE_o \\
 & + \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{S^2} \psi(r, \Omega_o, E_o, t) \Sigma_s(r, \Omega_o, \Omega, E - E_o) d\Omega_o dE_o \\
 & - \Sigma_a(r, \Omega, E, t) \psi(r, \Omega, E, t) - \nabla \cdot \Omega \psi(r, \Omega, E, t)
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Para observar de mejor forma cada término de la ecuación de transporte, se los planteará en sus operadores, de la siguiente manera:

Operador de Fisión: $\mathcal{F}\psi = \int_{\mathbb{R}^+} \int_{S^2} \frac{X(E)}{4\pi} v(E) \psi(r, \Omega_o, E_o) \Sigma_f(r, E_o) d\Omega_o dE_o$

Operador de Dispersión: $S\psi = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^+} \int_{S^2} \psi(r, \Omega_o, E_o, t) \Sigma_s(r, \Omega_o, \Omega, E - E_o) d\Omega_o dE_o$

Operador de Pérdida: $\tau \psi = -\Sigma_a(r, \Omega, E, t) \psi(r, \Omega, E, t) - \nabla \cdot \Omega \psi(r, \Omega, E, t)$

La ecuación (2.21) en función de sus operadores resulta:

¹⁷ Glasstone, S., & Sesonske, A. (1990). El problema de criticidad. En S. Glasstone, & A. Sesonske, *Ingeniería de Reactores Nucleares* (pág. 119).

$$\tau \psi = \mathcal{F}\psi + S\psi$$

Al tratarse de una configuración arbitraria, para conocer qué tan lejos o que tan cerca se encuentra la ecuación de su estado crítico, se debe introducir la función cero y convertir el problema de criticidad, en un problema de valor propio. Introduciendo un término escalar λ , por cada producto de fisión y el valor propio mínimo para $\lambda > 0$, con su correspondiente función propia ψ , de esta forma se plantea el siguiente problema de valor propio:

$$(\tau - S) \psi = \psi \mathcal{F} \lambda$$

Si $\lambda > 1$, el problema será *subcrítico*, si $\lambda < 0$, el problema será *supercrítico* y si $\lambda = 1$, el problema estará en su estado crítico deseado.

2.7 CONDICIONES DE FRONTERA

Para el problema de criticidad y para la ecuación de transporte de neutrones es conveniente plantear dos condiciones de frontera que describirán el comportamiento del sistema de forma clara y efectiva, la primera es la condición de frontera de vacío. Como se detalló anteriormente la única fuente de neutrones proviene del interior del volumen del reactor, en este caso todo el flujo de neutrones en dirección al volumen que se encuentre en su frontera será igual a cero, de esta forma se tiene:

$$\psi(r, \Omega, E) = 0 \quad \text{cuando} \quad \Omega \cdot n(r) < 0 \quad r \in dV$$

Donde $n(r)$, denota la normal exterior en la posición $r \in dV$ y también, se asume que el volumen V , es continuo e integrable en cada punto.

La segunda condición de frontera que se determinará es la condición de reflexión. Cuando un flujo de neutrones choca contra la frontera del volumen, una parte del flujo sale a través de la frontera y otra es reflejada hacia el interior del volumen, en este caso se dice que el flujo de neutrones que salió del volumen, es igual al flujo de neutrones que se reflejó al interior, de esta forma se describe:

$$\psi(r, \Omega, E) = \psi(r, \Omega_o, E) \quad \text{cuando} \quad \Omega \cdot n(r) < 0 \quad r \in dV$$

La descripción gráfica de las dos condiciones de frontera planteadas se encuentra en la Figura 2. 4.

Estas condiciones están planteadas y descritas en (Sánchez & Santandrea, 2002)¹⁸.

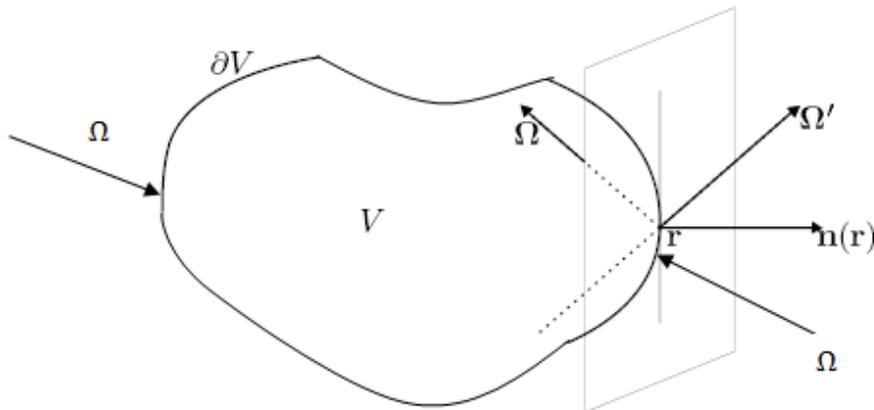


Figura 2. 4: Condiciones de frontera de vacío y de reflexión.

Fuente: E. E. Lewis and W. F. Miller, J. (1984). Computational Methods of Neutron, (pag 9).

2.8 DISCRETIZACIÓN DE LA VARIABLE ENERGÉTICA

Una técnica muy utilizada para la discretización de la variable de energía en problemas determinísticos, se llama, el método multigrupos de difusión. Este método consiste en dividir a todo el rango continuo de energía, en intervalos o grupos, así los neutrones tendrán una determinada energía, dependiendo en el rango o grupo en el que se encuentren.

En la Figura 2.5, se encuentra la división en grupos del espectro de energía.

¹⁸ Sánchez, R., & Santandrea, S. (2002). Treatment of boundary conditions. En R. Sánchez, & S. Santandrea, *Nuclear Computational Science* (pág. 7).

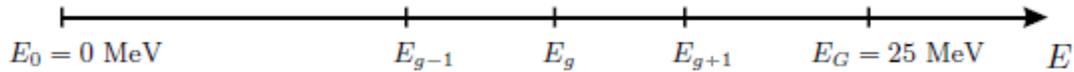


Figura 2. 5: Rango de energía dividido en G grupos.

Fuente 1: E. E. Lewis and W. F. Miller, *Computational Methods of Neutron*.

Fuente 2: El Autor.

Se puede plantear el flujo angular de neutrones en términos de grupos de energía.

$$\psi_g(r, \Omega) = \int \psi(r, E, \Omega) dE \quad \text{para } g=1, \dots, G.$$

El flujo angular se puede expresar en función de sus flujos de grupo de energía, así para el grupo de energía g , se plantea:

$$\psi_g(r, E, \Omega) = \psi_g(r, \Omega) \cdot f(E) \quad (2.22)$$

para $E_{g-1} \leq E \leq E_g$

Donde el valor total de energía de la función f en cada grupo es igual a 1, para $g = 1, \dots, G$.

De la misma forma y con un tratamiento análogo, el término de fuente se puede expresar de la siguiente forma:

$$Q(r, E, \Omega) = f(E) \cdot Q_g(r, \Omega) \quad (2.23)$$

para $E_{g-1} \leq E \leq E_g$

Y en términos de grupo de energía:

$$Q_g(r, \Omega) = \int Q(r, E, \Omega) dE \quad \text{Para } g = 1, \dots, G.$$

Integrando sobre $E \in (E_{g-1}, E_g)$, dividiendo los intervalos de energía de (2.22) en sumas de intervalos sobre los diferentes grupos de energías (E_{g-1}, E_g) y aplicando

las operaciones descritas en (Lewis & Miller, Monoenergetic Aproximation, 1984)¹⁹, la ecuación lineal de Boltzmann para un solo grupo energético resulta.

$$\begin{aligned}
 & \sigma_g(r, \Omega) \psi(r, \Omega) + \nabla \cdot \Omega \psi_g(r, \Omega) \\
 & = \frac{X_g}{4\pi} \sum_{g_0=1}^G V_{g_0}(r) \sigma_f(r) \int_{S^2} \psi_{g_0}(r, \Omega_o) d\Omega_o + Q_o(r, \Omega) \\
 & + \frac{1}{4\pi} \sum_{g_0=1}^G \int_{S^2} \psi_o(r, \Omega_o) \sigma_{sgg_0}(r, \Omega_o, \Omega) d\Omega_o
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Como se aclaró anteriormente esta tesis hará referencia solamente al problema monoenergético, asumiendo que $G = 1$, lo cual quiere decir que todos los neutrones producidos por fisión tendrán la misma energía, también se puede asumir el término de probabilidad de aparición de un neutrón con una energía determinada como $X = 1$. Al considerarse sólo un grupo de energía, se puede reducir los subíndices de los términos y plantear la notación específica para problemas monoenergéticos. De esta manera la ecuación (2.24) podrá escribirse de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 & \sigma(\vec{r}) \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \nabla \cdot \Omega \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) \\
 & = \frac{V(\vec{r}) \sigma_f(\vec{r})}{4\pi} \int_{S^2} \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}_o) d\Omega_o \\
 & + \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \sigma_s(\vec{r}, \vec{\Omega}_o, \vec{\Omega}) \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}_o) d\vec{\Omega}_o + Q(\vec{r}, \vec{\Omega})
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Dónde:

$\psi(r, \Omega)$ Flujo neutrónico por unidad de ángulo sólido. [*Neutrones/cm² sr s*]

\vec{r} Vector posición en el espacio. [*cm*]

¹⁹ Lewis, E. E., & Miller, W. F. (1984). Monoenergetic Aproximation. En E. E. Lewis, & W. F. Miller, *Computational Methods of Neutron* (págs. 17-25). New York: John Wiley & Sons.

$\vec{\Omega}$	Vector unitario de la velocidad (dirección). [<i>sr</i>]
$\vec{\Omega}_o$	Vector unitario de la velocidad antes de un choque. [<i>sr</i>]
$V(\vec{r})$	Velocidad de los neutrones producidos por fisión. [<i>cm/s</i>]
$\sigma(\vec{r})$	Sección eficaz microscópica de absorción. [<i>barn</i>] [10^{-24}cm^2]
$\sigma_f(\vec{r})$	Sección eficaz microscópica de fisión. [<i>barn</i>] [10^{-24}cm^2]
$\sigma_s(\vec{r}, \vec{\Omega}_o, \vec{\Omega})$	Sección eficaz microscópica de dispersión. [<i>barn</i>] [10^{-24}cm^2]
$Q(r, \Omega)$	Fuente de energía neutrónica. [<i>MeV</i>]
$\vec{\Omega} \cdot \nabla \cdot \psi(r, \Omega)$	Flujo que se pierde a través de la superficie de frontera. [<i>Neutrones/cm² . s . eV</i>]

La ecuación (2.25), es la ecuación lineal de Boltzmann en tres dimensiones, el problema específico de fuente. De forma general describe el transporte de los neutrones, causado por las interacciones con los núcleos de los átomos de un material radiactivo y específicamente proporciona la información de la tasa de acumulación de neutrones, en un volumen de control.

2.9 ANÁLISIS ESPACIAL Y ANGULAR

En la presente sección se estudiarán y determinarán los modelos de la ecuación de transporte de neutrones en tres y una dimensión respectivamente. Existen situaciones en las que el diseño geométrico de una barra radiactiva o del combustible nuclear permite asumir como constantes las coordenadas que no sufrirán cambio, en estos casos se puede simplificar esta ecuación en problemas de 2D y 1D. Además este tipo de simplificaciones son posibles ya que se está estudiando un problema homogéneo, monoenergético y con dispersión isotrópica, todas las secciones transversales serán constantes y con el planteamiento de las condiciones de frontera y el flujo neutrónico nulo en el exterior del volumen de control, todos los neutrones viajan con la misma constante de velocidad y no

existirá el ingreso de neutrones del exterior (Lewis E. E., Contributions to the total neutron balance, 1984)²⁰.

2.9.1 ANÁLISIS EN TRES DIMENSIONES

Una forma válida de modelar las ecuaciones de transporte en sus respectivas dimensiones, es a través de un bosquejo de una esfera de radio unitario, con sus respectivas coordenadas polares, de esta forma se puede observar que en tres dimensiones, la dirección del neutrón estará representada por un ángulo sólido $(r, \Omega_o) \in V \times S^2$, que tiene sus respectivas proyecciones en coordenadas polares $(\theta, \varphi) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi]$, en S^2 , como se muestra en la Figura 2. 6.

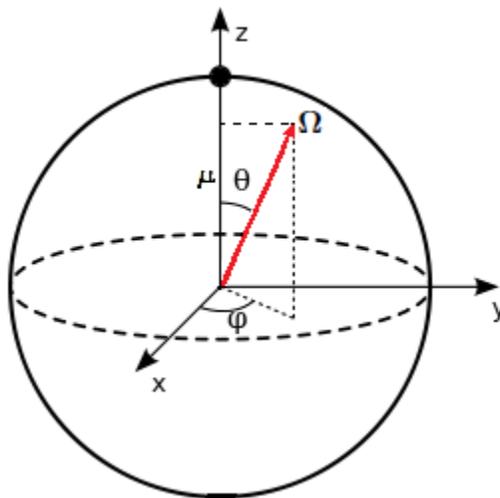


Figura 2. 6: Esfera de radio unidad.

Fuente 1: <http://onunezm.blogspot.com/2010/02/procesadores-cuanticos-de-relatividad.html>.

Fuente 2: El Autor.

El modelo matemático en tres dimensiones de la ecuación de transporte se reduce de la siguiente forma:

²⁰ E. E. Lewis and W. F. Miller, J. (1984). *Computational Methods of Neutron*. New York: John Wiley & Sons, pp 42-47.

$$\begin{aligned}
& \frac{V\sigma_f}{4\pi} \int_{S^2} \psi(r, \Omega_o) d\Omega_o \\
& = -\frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{S^2} \psi(r, \Omega_o) d\Omega_o + \sigma_a \psi(r, \Omega) + \nabla \cdot \Omega \psi(r, \Omega) \\
& - Q(\vec{r}, \vec{\Omega})
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Para todo $(r, \Omega_o) \in V \times S^2$, y sujeto a las condiciones de frontera:

$$\psi(0, \mu) = 0 \quad \text{cuando} \quad \mu > 0 \quad \text{y} \quad \psi(1, \mu) = 0 \quad \text{cuando} \quad \mu < 0$$

2.9.2 ANÁLISIS EN UNA DIMENSIÓN

De la misma forma, si se representa un neutrón que se mueve en una sola dimensión, éste solo tendrá dos posibles direcciones, ir hacia adelante o ir hacia atrás. Referenciando nuevamente en la esfera de radio unidad, pero esta vez, solo se tomando en cuenta la componente del eje z , se obtendrán las direcciones de los neutrones que se mueven en una dimensión, mediante el $\cos \theta$, este comportamiento se observa en la Figura 2. 7.

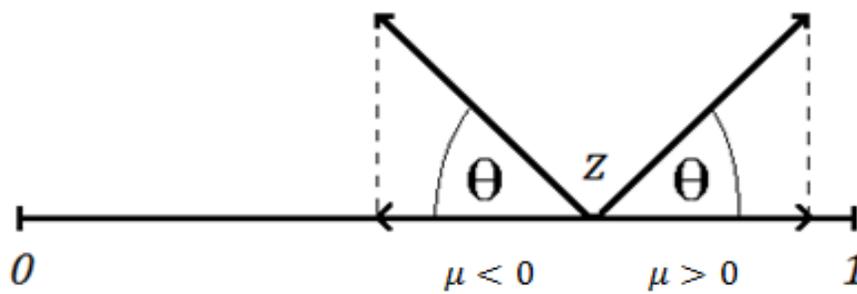


Figura 2. 7: Desplazamiento de los neutrones en una dimensión.

Fuente: El Autor.

$$\mu = \cos \theta \in [-1, 1]$$

En este caso, el flujo neutrónico será $\psi(z, \mu)$, donde z , es la variable sobre la cual el neutrón se mueve y μ es su dirección, para $z \in [0, 1]$ y $\mu = \cos \theta \in [-1, 1]$. El modelo en una dimensión se representa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{V\sigma_f}{2} \int_{-1}^1 \psi(z, \mu_o) d\mu_o + \frac{\sigma_s}{2} \int_{-1}^1 \psi(z, \mu_o) d\mu_o + Q(r, \mu) \\ = \sigma_a \psi(z, \mu) + \mu \frac{\partial \psi(z, \mu)}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.27)$$

Dónde:

z Posición de los neutrones sobre el eje z (una dimensión). [cm]

μ_o Dirección inicial de los neutrones. [rad]

μ Dirección final de los neutrones. [rad]

Con sus respectivas condiciones de frontera y vacío:

$$\psi(0, \mu) = 0 \quad \text{cuando} \quad \mu > 0 \quad \text{y} \quad \psi(1, \mu) = 0 \quad \text{cuando} \quad \mu < 0$$

Como se observa en la ecuación de transporte en una dimensión, se encuentran presentes tres términos que actúan como una fuente o una contribución a la acumulación de neutrones, éstos son: el término de fisión, el término de dispersión y el término fuente. Ahora bien, como estos tres términos son un aporte a la acumulación de neutrones, se los puede plantear como un sólo término de fuente $q(z)$. La ecuación resulta:

$$\begin{aligned} \sigma_a \psi(z, \mu) + \mu \frac{\partial \psi(z, \mu)}{\partial z} = q(z) \quad z \in [0, 1], \quad \mu \in [-1, 1] \\ \psi(0, \mu) = 0 \quad \text{cuando} \quad \mu > 0, \\ \psi(1, \mu) = 0 \quad \text{cuando} \quad \mu < 0 \end{aligned} \quad (2.28)$$

La ecuación (2.28) es la ecuación lineal de Boltzmann en una dimensión, el problema específico de fuente, donde el término $q(z)$, engloba los aportes de la

contribución de neutrones al sistema, incluido la fuente inicial $Q(z, \mu)$. Esta ecuación representa el transporte de los neutrones dentro de un material radiactivo y es la ecuación usada en el presente proyecto, con la cual se obtendrán los resultados del flujo neutrónico.

CAPÍTULO 3

APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS, PARA LA RESOLUCIÓN DE LA ECUACIÓN DE TRANSPORTE UNIDIMENSIONAL.

Una vez que se ha modelado el comportamiento del flujo de neutrones en un material radiactivo, es momento de analizar el modelo matemático y dar solución a la ecuación de transporte de neutrones. Ya que existen varias formas de resolver el problema, en primera instancia se tratará de obtener una solución analítica, caso contrario, se aplicarán estrategias o métodos que permitan obtener la solución de la ecuación, con el menor error posible. Posteriormente se aplicarán otros métodos numéricos para realizar un análisis de su exactitud y precisión, comparando los resultados de dichos métodos con los resultados de la primera solución, de esta forma se obtendrá el error de cada método numérico y se determinará su efectividad, en la solución de la ecuación de transporte de neutrones.

Es importante estudiar, analizar y determinar las destrezas matemáticas que se pueden aplicar, a cada solución, para reducir el número de operaciones y por consiguiente el error que se propaga. De esta forma, también se logrará disponer de un algoritmo que utilice menos herramientas de programación y así optimizar los recursos informáticos como son, la memoria y el procesador, lo que permitirá que el software de simulación se ejecute de forma eficaz y pueda obtener las soluciones deseadas en un tiempo corto.

A continuación se aplican distintas destrezas, leyes y métodos numéricos que permitan obtener los datos más efectivos del flujo de neutrones en un material radiactivo.

3.1 CONCEPTOS DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

3.1.1 INTRODUCCIÓN

Para poder entender de mejor manera y saber aplicar los métodos numéricos correspondientes que den solución a la ecuación de transporte de neutrones, es importante conocer cómo se llegó a formular estos métodos; la respuesta se encuentra en una rama de las matemáticas llamada Análisis Numérico.

El Análisis Numérico es un área de las matemáticas y de las ciencias de la computación que, analiza, crea e implementa algoritmos para dar solución a problemas presentes en el mundo continuo de las matemáticas.

El análisis numérico surge de la necesidad de encontrar soluciones a los problemas continuos, estas necesidades se fueron presentando al conocer que, ciertos problemas en espacios continuos, no tenían soluciones exactas o sus soluciones demandaban grandes cantidades de cálculos, operaciones y esfuerzos innecesarios al momento de obtener una respuesta. Así se fueron desarrollando varias técnicas, métodos y estudios, que fueron desencadenando en una operación muy importante que es la discretización.

La discretización es el proceso de transferir modelos y ecuaciones continuas, a sus contrapartes discretas, este proceso se lleva a cabo habitualmente como un primer paso, para que las ecuaciones diferenciales puedan ser tratadas en la evaluación numérica y posteriormente en su aplicación respectiva en los programas de ordenadores (Editor, 2013)²¹.

3.1.2 CONCEPTOS FUNDAMENTALES EN EL DESARROLLO DE ALGORITMOS MATEMÁTICOS

Es necesario detallar algunos conceptos que permitan desarrollar algoritmos óptimos y eficientes. Tres conceptos muy importantes en el análisis numérico y en la aplicación de los métodos numéricos son: la precisión, la exactitud y el error.

²¹ Editor. (08 de 05 de 2013). *Pi Medios*. Recuperado el 28 de 08 de 2013, de Pi Medios: <http://pimedios.es/2013/05/08/breve-historia-de-los-metodos-numericos-en-ecuaciones-diferenciales/>

Según (Thoméé, 1969)²², la precisión es: “el número de cifras que representan una magnitud, se pueden definir a partir de la dispersión obtenida de la recopilación de los valores de repeticiones de una misma magnitud”. La relación de la dispersión y la precisión es inversamente proporcional, esto quiere decir que mientras más dispersión exista, habrá menos precisión.

Otro concepto importante es la exactitud, muestra que tan cerca del valor real se encuentra el valor que se acaba de medir, así cuando se presenta la exactitud de un valor, éste, se expresa mediante un valor absoluto y su total, es la diferencia del valor real, con respecto al experimental. De este concepto se deduce un tercero, que es el error, el error juega un papel muy importante al momento de obtener una solución aproximada, sin importar el tipo de problema que se esté tratando, el objetivo principal, siempre será reducirlo al mínimo, evitar su propagación y que sea imperceptible en los datos finales obtenidos.

Como se detalló anteriormente la informática formó parte fundamental en el desarrollo del análisis numérico y de los métodos numéricos. Al manejar grandes cantidades de datos y necesitar de acciones repetitivas para calcular de forma aproximada pero precisa los problemas planteados, fue fundamental, el uso y la evolución de los ordenadores, en esta área específica, también se manejan conceptos muy importantes al momento de desarrollar algoritmos de los métodos numéricos, los cuales se describen a continuación.

El CPU o la unidad central de proceso, es la parte principal del ordenador, interpreta las instrucciones contenidas en los programas y es el encargado de procesar todos los cálculos de código binario, trabaja activamente con la memoria principal y consta de dos componentes, la unidad de control y la unidad aritmética-lógica; el primer componente (UC) es el encargado de buscar las instrucciones en la memoria principal, decodificarlas y ejecutarlas, empleando para ello la unidad de proceso; el segundo componente (UAL) tiene como función el cálculo de las operaciones aritméticas y lógicas entre dos valores.

²² Thomée, V. (1969). *Stability Theory for Partial Difference Operators*. SIAM Review, pp 8-9.

Otro concepto que es importante tener en cuenta es la memoria, igualmente existen tipos de memorias que hacen que el ordenador trabaje de forma integrada y óptima. La memoria RAM o memoria volátil de sus siglas en inglés “Random-Access-Memory”, se la llama memoria volátil, porque es una memoria temporal, cuando se deja de suministrarle energía, ésta pierde toda su información; trabaja íntimamente con el procesador ya que, cuando se ejecuta un programa, parte del programa, primero se ubica en la memoria RAM, luego se comunican los datos que van a ser utilizados por un bus de datos y posteriormente se los procesa en el microcontrolador.

La memoria ROM de sus siglas en inglés “Read Only Memory” es la memoria que no es susceptible a cambio, en consecuencia, solo puede ser leída; en ella reside una pequeña parte del sistema operativo, necesaria para que el ordenador se pueda poner en marcha. La velocidad con que se puede acceder a los datos almacenados en este tipo de memorias es muy inferior, comparado con la memoria RAM.

La memoria Caché, es una parte fundamental en el procesamiento de los datos, ya que tiene una funcionalidad similar a la memoria RAM, esto quiere decir, que es volátil, también tiene una capacidad de almacenamiento menor a la memoria principal, pero es de mayor velocidad. El procesador la utiliza, para acceder de forma rápida a datos que se utilizan con mayor frecuencia.

Después de detallar claramente los componentes de hardware que se utilizarán cuando el software de simulación se encuentre en ejecución, se observa que, la primera acción que el sistema operativo realiza, es colocar parte de la información del programa de simulación en la memoria RAM. Luego, el procesador determinará, que parte de esta información la llevará a la memoria Caché para poder tener un acceso más rápido, posteriormente, asignará espacios de memoria de las variables que se definen en el programa. Interpretará cada una de las sentencias que lo conforman, ejecutará las operaciones lógico-aritméticas

dependiendo de los datos o información que ingrese el usuario y mostrará los datos obtenidos después de todo este proceso de cálculo (Hacker85)²³.

Después de haber detallado todo este sistema, se puede ver de manera clara que el software de simulación interactúa, con el usuario y con el hardware, siendo importante la descripción del proceso y de los conceptos anteriormente planteados.

La presente tesis forma parte de la obtención del título en Ingeniería Mecatrónica; uno de los fines más importantes de la Ing. Mecatrónica es la optimización de los recursos (materia prima, mano de obra, material tecnológico, etc.), este caso, no es la excepción, ya que se están utilizando recursos de hardware y software, en el desarrollo y la ejecución del programa de simulación.

Con este antecedente un objetivo fundamental en el presente capítulo, será la optimización de los recursos informáticos, a través del estudio de los métodos numéricos y de la aplicación de operaciones, teorías y destrezas matemáticas, que den solución a las ecuaciones planteadas. Esta solución se da a través de un software de simulación, que le permite al usuario observar el comportamiento del fenómeno del transporte de neutrones de forma didáctica, dinámica y amigable; además será una herramienta consistente para las futuras investigaciones en el área de la energía nuclear.

3.2 APLICACIÓN DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

3.2.1 ORDENADAS DISCRETAS

El método de las ordenadas discretas fue primeramente detallado por Wick en el año 1943, cuando trataba de dar solución a una ecuación que representaba la

²³ Hacker85. (s.f.). *MetNumVCM*. Recuperado el 30 de 08 de 2013, de MetNumVCM: metnumvmc/unidad-i-2/1-2-1-2-conceptos-basicos-cifra-significativa-precision-exactitud-incertidumbre-y-sesgo

difusión de neutrones en una pila, posteriormente este método fue desarrollado y aplicado por el astrofísico hindú Subrahmanyan Chandrasekhar en 1950, mientras realizaba una investigación de la radiación estelar y atmosférica. En los años 60s serían aplicados a los problemas de transporte de neutrones y desde el año 1988 el método fue utilizado en los problemas de transferencia de calor, siendo sus principales ejecutores Truelove y Fiveland (Ivanov, 2006)²⁴.

3.2.1.1 Importancia

El método de las ordenadas discretas, es uno de los métodos numéricos determinísticos más utilizados en la resolución de ecuaciones de difusión y transporte, además de ser uno de los métodos más precisos aplicados a la discretización de la variable angular en la ecuación lineal de Boltzmann.

Para obtener el flujo escalar de neutrones, se debe integrar a la ecuación (2.28), con respecto a la variable angular μ , donde su rango de integración está definido en el intervalo $[-1, 1]$, por consiguiente no es apropiado aplicar métodos de integración trapezoidales como la aproximación de Eddington, ya que los resultados obtenidos no tendrían una buena exactitud y su atención sería más compleja. El método que opera dentro del rango mencionado y ofrece datos muy precisos, es el método de las Ordenadas Discretas, el cual será utilizado en la discretización de la variable angular, debido a su eficiente aplicación, en la ecuación de transporte de neutrones.

3.2.1.2 Aplicación

El principio fundamental del método, es aproximar la integral del flujo angular como una sumatoria pesada, en ciertos puntos de una malla espacial y con un número de direcciones fijas. Esta sumatoria se describe como una cuadratura de Gauss, eligiendo los pesos y las raíces de los polinomios de Legendre, para la aproximación de la sumatoria pesada. Al aplicar esta sumatoria, se evalúa a la ecuación, en ciertas direcciones correspondientes a los puntos del rango de

²⁴ Ivanov, K. (2006). *Neutron Transport Theory*. Moscu: 206 Reber.

integración $[-1, 1]$ de la variable independiente μ . Empleando la cuadratura de Gauss de $2N$ puntos con $\{\mu_i\} \subset [-1, 1] \setminus \{0\}$, con sus respectivos pesos $\{w_i\}$ y para los puntos $k = -N, -(N-1), \dots, -1, 1, \dots, N-1, N$, la aproximación se formula de la siguiente forma:

$$\int_{-1}^1 f(\mu) d\mu \approx \sum_{|i|=1}^N w_i f(\mu_i) \quad (3.1)$$

Dónde:

$f(\mu)$ Es la función a evaluar.

w_i Son los pesos de los polinomios de Legendre, para cada i .

μ_i Son los polinomios de Legendre para cada i .

Si la malla espacial se divide en N puntos los cuales se especificaron en el párrafo anterior, entonces μ_j , será la variable angular en cada uno de los puntos j , pero como μ está definido en $[-1, 1]$, estos puntos tienen que ser equidistantes del medio del rango μ_0 y a la vez tienen que ser opuestos, a estos valores también se los conoce como números espejo, porque tienen el mismo valor pero diferente signo. Así los pesos y los puntos simétricos y opuestos se plantean a continuación:

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_N \leq 1,$$

$$\mu_i = -\mu_{-i}, \quad i = 1, \dots, N$$

$$w_i = w_{-i}, \quad i = 1, \dots, N$$

Una vez determinados los puntos y los pesos, se puede observar que el flujo angular será tratado, tanto en la dirección positiva, como en la negativa. También es importante mencionar que, la integral se puede aproximar por la sumatoria gaussiana, siempre y cuando $\psi(z, \mu_0)$ se escriba como un polinomio de la variable μ de grado menor o igual que $2m-1$.

Los polinomios de interpolación que se deben aplicar a la cuadratura de Gauss se encuentran dentro del rango especificado y bajo las delimitaciones indicadas anteriormente. Ya que el flujo de neutrones nunca puede ser negativo, es importante establecer que los pesos siempre deben ser positivos, además no deben existir neutrones con dirección nula, todas estas especificaciones se pueden encontrar en los puntos de la cuadratura de Gauss-Legendre, ya que las abscisas x_i en la función de la cuadratura, que está definida en el intervalo $[-1, 1]$, son las raíces de los polinomios de *Legendre* de grado n , pero para que estos puntos satisfagan las condiciones planteadas en la ecuación (3. 1), se debe utilizar los polinomios de Legendre de orden $2n$, ya que los ceros o soluciones de estos polinomios de orden par, el cero no es una solución, de esta forma se elimina la probabilidad de que un neutrón tenga una dirección nula.

La aplicación del método de las ordenadas discretas, le permitirá al usuario del software de simulación, calcular la aproximación del flujo escalar de neutrones, especificando la precisión con la que se desee calcular, eligiendo el valor de N (Número de puntos en los cuales se evalúa la dirección de los neutrones), tan grande como le permita la conversión de la solución.

Cuando el rango de integración es diferente a $[-1, 1]$, existe una formulación universal de la cuadratura de Gauss-Legendre, que permite transformar cualquier integral sobre $[a, b]$, en una aproximación con límites de integración en el rango $[-1, 1]$. A continuación se plantea la formulación universal:

$$\int_a^b f(x) \sim \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^N w_i f\left(\frac{b-a}{2} r_i + \frac{b+a}{2}\right) \quad (3. 2)$$

Dónde:

a Límite de integración inferior.

b Límite de integración superior.

w_i Pesos de los polinomios de Legendre, para cada i .

rl_i Raíces de los polinomios de Legendre, para cada i .

$f(x)$ Función a integrar.

De la ecuación (2. 28), se puede apreciar que su solución proporcionará la información del flujo angular de neutrones, datos que no serán útiles para determinar el perfil de temperaturas en los distintos puntos de la varilla de combustible del reactor nuclear; el objetivo de este capítulo es obtener el flujo escalar de neutrones, mediante la aplicación distintos métodos numéricos.

Para obtener el flujo escalar de neutrones, se debe evaluar al flujo angular sobre todas las posibles direcciones que puedan tomar los neutrones. Aplicando la ecuación (2.19), a la ecuación (2. 28), resulta.

$$\sigma_a \int_{-1}^1 \psi(z, \mu) d\mu + \mu \int_{-1}^1 \frac{\partial \psi(z, \mu)}{\partial z} d\mu = q(z) \quad (3.3)$$

$$\psi(0, \mu) = 0 \quad \text{cuando} \quad \mu > 0 \quad \text{y} \quad \psi(1, \mu) = 0 \quad \text{cuando} \quad \mu < 0$$

La ecuación (3. 3) es el problema de fuente y su solución permitirá obtener el flujo escalar de neutrones presentes en la barra de combustible radiactivo. Esta ecuación es el problema a dar solución, como se puede observar es una ecuación intergo-diferencial de primer orden no homogénea, que depende de dos variables, la variable espacial z y la variable angular μ .

Para obtener la solución de la ecuación (3. 3), primero hay que plantearla como la ecuación (2. 28) y obtener el flujo angular, posteriormente se evaluará a esta solución, sobre todas las posibles direcciones de la variable angular y se obtendrá el flujo escalar.

Se plantea el problema de fuente para un flujo angular de neutrones.

$$\sigma_a \psi(z, \mu) + \mu \frac{\partial \psi(z, \mu)}{\partial z} = q(z) \quad z \in [0,1], \quad \mu \in [-1, 1]$$

$$\psi(0, \mu) = 0 \quad \text{cuando} \quad \mu > 0 \quad \text{y} \quad \psi(1, \mu) = 0 \quad \text{cuando} \quad \mu < 0$$

Ya que la ecuación (3. 3) es una ecuación lineal no homogénea, se puede obtener su respuesta, mediante el método de solución de la función del *factor integrante*, este método permite obtener la solución homogénea y particular del problema; al sumar ambas soluciones, se obtiene la respuesta final de la ecuación diferencial.

Se plantea la solución homogénea de (3. 3):

$$\sigma_a \psi(z, \mu) + \mu \frac{\partial \psi(z, \mu)}{\partial z} = 0$$

$$\mu \frac{d\psi}{\psi} = -\sigma_a dz$$

Integro a ambos lados:

$$\mu \int \frac{d\psi}{\psi} = - \int \sigma_a dz$$

$$\ln(\psi) = -\sigma_a \frac{z}{\mu}$$

$$\psi = e^{-\frac{\sigma_a z}{\mu}}$$

(3. 4)

Donde (3. 4) es el factor integrante, el siguiente paso es multiplicarlo por cada término de la ecuación (2. 28), para obtener la solución general.

$$e^{-\frac{\sigma_a z}{\mu}} \sigma_a \psi + e^{-\frac{\sigma_a z}{\mu}} \mu \frac{\partial \psi}{\partial z} = e^{-\frac{\sigma_a z}{\mu}} q$$

La parte izquierda de la igualdad, es la derivada del producto de dos funciones, se plantea como tal.

$$\frac{d}{dz} \left(\mu \psi e^{-\frac{\sigma_a z}{\mu}} \right) = q e^{-\frac{\sigma_a z}{\mu}}$$

$$\int d \left(\mu \psi e^{-\frac{\sigma_a z}{\mu}} \right) = \int \left(q e^{-\frac{\sigma_a z}{\mu}} \right) dz$$

$$\mu \psi e^{\frac{\sigma_a z}{\mu}} = q \mu \frac{1}{\sigma_a} e^{\frac{\sigma_a z}{\mu}} + C$$

C Es la constante de integración.

$$\psi(z, \mu) = q \frac{1}{\sigma_a} + C \frac{1}{\mu} e^{-\frac{\sigma_a z}{\mu}} \quad (3.5)$$

Para determinar la constante de integración de la ecuación (3.5), se debe aplicar las condiciones de frontera. Para la primera condición, se reemplaza el valor de $z = 0$, en (3.5).

$$\psi(0, \mu) = 0 \quad \text{cuando} \quad \mu > 0$$

$$0 = q \frac{1}{\sigma_a} + C \frac{1}{\mu} e^{-\frac{\sigma_a * 0}{\mu}}$$

$$-q \frac{1}{\sigma_a} = \frac{C}{\mu}$$

$$C = -q \frac{\mu}{\sigma_a}$$

Una vez obtenido el valor de la constante de integración C , se reemplaza en la ecuación (3.5) y se integra con respecto a μ , en el intervalo correspondiente a la primera condición de frontera $[0, 1]$.

$$\phi^+ = \int_0^1 \left(q \frac{1}{\sigma_a} - q \frac{1}{\sigma_a} e^{-\frac{\sigma_a z}{\mu}} \right) d\mu \quad (3.6)$$

Debido a que no es posible determinar de forma analítica el término $\int_0^1 q \frac{1}{\sigma_a} e^{-\frac{\sigma_a * 0}{\mu}} d\mu$, no se puede encontrar una solución exacta al problema, es en este instante donde se debe aplicar el método de las Ordenadas Discretas, para aproximar la integral y obtener el flujo de escalar de neutrones ϕ^+ .

Se aplica el método de las Ordenadas Discretas, con la primera condición de frontera.

$$\psi(0, \mu) = 0 \quad \text{cuando} \quad \mu > 0$$

$$\phi^+ = \int_0^1 \psi \, d\mu$$

Donde ϕ^+ , es el flujo escalar de neutrones con dirección $\mu > 0$.

Ya que los límites de integración han cambiado de $[-1, 1]$ a $[0, 1]$, el método de las Ordenadas Discretas será aplicado a la ecuación (3. 6), mediante la ecuación (3. 2), de la siguiente forma.

$$\begin{aligned} \phi^+ &= \int_0^1 \left(q \frac{1}{\sigma_a} - q \frac{1}{\sigma_a} e^{-\frac{\sigma_a z}{\mu}} \right) d\mu \\ \phi^+ &= \int_a^b \psi(z) \sim \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^N w l_i f\left(\frac{b-a}{2} r l_i + \frac{b-a}{2}\right) \\ \mu_i &= \frac{b-a}{2} r l_i + \frac{b-a}{2} \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \dots, N \\ \phi^+ &= \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^N w l_i * \left(q \frac{1}{\sigma_a} - q \frac{1}{\sigma_a} e^{-\frac{\sigma_a z}{\mu_i}} \right) \end{aligned} \quad (3. 7)$$

Donde:

ϕ^+ Flujo de neutrones con dirección $\mu > 0$, obtenido con el método de las Ordenadas Discretas. [*neutrones/cm²*]

$a = 0$ Límite de integración inferior.

$b = 1$ Límite de integración superior.

De igual forma se aplica la segunda condición de frontera, para determinar la constante de integración, de este segundo caso. En lugar del valor de 1 en el extremo del domino, se evaluará con el valor del diámetro de la barra radiactiva d .

$$\psi(d, \mu) = 0 \quad \text{cuando} \quad \mu < 0$$

$$\psi(d, \mu) = q \frac{1}{\sigma_a} + C \frac{1}{\mu} e^{-\frac{\sigma_a * d}{\mu}}$$

$$0 = q \frac{1}{\sigma_a} + C \frac{1}{\mu} e^{-\frac{\sigma_a * d}{\mu}}$$

$$-q \frac{1}{\sigma_a} = \frac{C}{\mu} e^{-\frac{\sigma_a * d}{\mu}}$$

$$C = -q \frac{\mu}{\sigma_a} \left(e^{\frac{\sigma_a * d}{\mu}} \right)$$

Reemplazo C:

$$\phi^- = q \frac{1}{\sigma_a} \left[1 - e^{\frac{\sigma_a(d-z)}{\mu}} \right] \quad (3.8)$$

Para la segunda condición, se debe evaluar a los neutrones con dirección $\mu < 0$, entonces, la ecuación del flujo escalar de neutrones, tomará la siguiente forma.

$$\phi^- = \int_{-1}^0 \left(q \frac{1}{\sigma_a} \left[1 - e^{\frac{\sigma_a(d-z)}{\mu}} \right] \right) d\mu$$

$$\phi^- = \int_{-1}^0 \psi d\mu$$

De igual manera que en el primer caso, no se pudo determinar de forma analítica el término $\int_{-1}^0 -q \frac{1}{\sigma_a} e^{\frac{\sigma_a(d-z)}{\mu}} d\mu$, una vez más, es momento de aplicar el método de las Ordenadas Discretas, para aproximar la integral y obtener el flujo de escalar de neutrones ϕ^- .

Aplicando la ecuación (3. 2) para el segundo caso se tiene.

$$\phi^- = \int_{-1}^0 \left(q \frac{1}{\sigma_a} \left[1 - e^{\frac{\sigma_a(d-z)}{\mu}} \right] \right) d\mu$$

$$\phi^- = \int_a^b \psi(z) \sim \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N w l_i \psi \left(\frac{1}{2} r l_i - \frac{1}{2} \right)$$

$$\mu_i = \frac{b-a}{2} r_i + \frac{b-a}{2} \quad \text{con } i = 1, 2, 3, \dots, N$$

$$\phi^- = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N w l_i * \left(q \frac{1}{\sigma_a} \left[1 - e^{-\frac{\sigma_a(d-z)}{\mu}} \right] \right) \quad (3.9)$$

Donde:

ϕ^- Flujo de neutrones con dirección $\mu < 0$, obtenido con el método SN.
[neutrones/cm²]

$a = -1$ Límite de integración inferior.

$b = 0$ Límite de integración superior.

Al sumar ambos resultados ϕ^- y ϕ^+ , se obtendrá el flujo escalar de neutrones, esto quiere decir la concentración total de neutrones en todas las posibles direcciones. De esta forma la solución general resulta.

$$\phi = \phi^- + \phi^+ \quad (3.10)$$

Donde ϕ , es la solución de la ecuación lineal de Boltzmann, obtenida con el método de las Ordenadas Discretas.

Al aplicar solamente un método numérico y tratar la variable espacial de forma analítica, esta solución será tomada como referencia, para comparar el error de los métodos numéricos aplicados en las siguientes secciones del presente capítulo.

Como se mencionó anteriormente uno de los objetivos de esta tesis es, proporcionar las destrezas matemáticas para dar solución al problema de transporte de neutrones, a través de diversos métodos numéricos, que a la postre sirvan de apoyo para solucionar problemas más complejos o específicos de la ecuación lineal de Boltzmann; por este motivo, en las siguientes secciones se aplicarán distintos métodos, aptos para la discretización de la variable espacial, que permitan obtener soluciones aproximadas de la concentración de neutrones.

Existen varios métodos que se pueden aplicar a la ecuación (2.28) para discretizar la variable espacial como son: Diferencias Finitas, Elementos Finitos, Crank-Nicholson, Runge-Kutta, etc. A continuación se aplicará un método tradicional como es Euler Mejorado, posteriormente se aplicarán métodos variacionales, como son el método de Galerkin y el método de los Elementos Finitos.

3.3.2 MÉTODO DE EULER MEJORADO

En la historia de las matemáticas, siempre han estado presentes los métodos de soluciones aproximadas, desde soluciones de funciones polinomiales, hasta problemas de astronomía, estos métodos han sido parte importante en el desarrollo de la ciencia y de la ingeniería. Uno de los métodos más antiguos que dan soluciones aproximadas a las ecuaciones diferenciales es el método de Euler.

En esta sección se utilizará el método de Euler Mejorado, para discretizar la variable espacial de la ecuación de transporte de neutrones, éste método es un técnica numérica de primer orden, que da solución a las ecuaciones diferenciales ordinarias, utilizando un valor inicial conocido.

Para disminuir el error, el método utiliza un valor promedio de la derivada, tomada en los dos extremos del intervalo, en lugar de la derivada tomada en un solo extremo.

3.3.2.1 Importancia

El método de Euler es apto para la discretización de la variable espacial, ya que con sus dos esquemas, implícito y explícito, se puede trabajar y emplear las condiciones de vacío y de frontera planteadas en el capítulo 2. En el primer caso, utilizando el esquema de Euler implícito, se realiza una aproximación desde un extremo del dominio espacial, con la variable μ dirigiéndose hacia el exterior del material; y, en el segundo caso (Euler Explícito), se realiza una aproximación desde el otro extremo del dominio, pero esta vez con los neutrones dirigiéndose hacia el interior del núcleo del material, de este modo, se obtiene resultados del flujo de neutrones en toda la dimensión del material radiactivo.

Otra característica importante es la preservación de la simetría de las propiedades y características de la ecuación de transporte y de las matrices que se desarrollarán en las secciones siguientes. Para formular el algoritmo que representa la solución del problema, se necesita aplicar ciertas operaciones matriciales y matemáticas para obtener los datos del flujo de neutrones, en todas las operaciones que se realicen, siempre se conservará la simetría, esto quiere decir que el sistema no sufrirá ningún cambio y su varianza será nula. Este dato, es muy importante ya que se elimina una posibilidad de error en el cálculo y se evita realizar otro tipo de operaciones o cálculos para que el sistema sea simétrico.

3.3.2.2 Aplicación

Las operaciones, destrezas y herramientas que se aplicarán en esta sección, no sólo permitirán que se discretice la variable espacial del problema de fuente, sino que también servirán para tratar los problemas de criticidad descritos anteriormente.

La simetría juega un papel muy importante, ya que permite que el método converja de forma rápida y los datos obtenidos presenten un error mínimo de método, además, al realizar varias simplificaciones a los cálculos, esto admite que el error acumulado se reduzca.

El primer paso para discretizar la variable espacial, es definir un espacio discreto uniforme, donde $z_j = jh, j = 0, \dots, M$ y cada segmento de este espacio será $h = \frac{1}{M}$.

Un esquema muy didáctico para aplicar métodos numéricos, es el método Teta, donde dependiendo del valor que se le dé a θ , resultara el método numérico que se desea utilizar, a continuación se presenta su esquema.

$$\frac{\vartheta_{j+1} - \vartheta_j}{h_{j+1}} = \theta f(t_j; \vartheta_j) + (1 - \theta)f(t_{j+1}; \vartheta_{j+1}) \quad (3.11)$$

Siendo ϑ_j una aproximación de $\vartheta(t_j)$, donde $\theta \in [0,1]$.

Para $\theta = 1$, se deduce.

$$\frac{\vartheta_{j+1} - \vartheta_j}{h_{j+1}} = f(t_j; \vartheta_j) \quad (3.12)$$

Siendo la ecuación (3.12) el esquema de Euler Explícito.

Aplicando este esquema a la ecuación (2.28), se obtiene la aproximación de la derivada de la ecuación diferencial ordinaria, con su variable espacial dividida en el rango discreto del espacio mallado. Así la ecuación resultante será:

$$\mu \frac{\psi(z_j, \mu) - \psi(z_{j-1}, \mu)}{h} + \sigma \psi(z_{j-1}, \mu) = q(z_{j-1}), \quad (3.13)$$

para $\mu > 0, j = 1, \dots, M$

Si se evalúa para $j=1$ y para $j=M$, se obtendrá el flujo angular en $\psi(z_1, \mu)$ y $\psi(z_M, \mu)$. De tal forma que no se obtendrá la solución en todo el rango de la variable espacial. Para obtener el flujo de neutrones en todo el dominio $[0, M]$, es necesario aplicar el método de Euler Implícito y complementar ambos esquemas con herramientas matemáticas que aporten a esta solución.

Para obtener el método de Euler Implícito simplemente se vuelve a la ecuación (3.11), pero en este caso se elige $\theta = 0$, se tiene:

$$\frac{\vartheta_{j+1} - \vartheta_j}{h_{j+1}} = f(t_{j+1}; \vartheta_{j+1}) \quad (3.14)$$

Aplicando este esquema a la ecuación (2.28), se obtiene:

$$\mu \frac{\psi(z_j, \mu) - \psi(z_{j-1}, \mu)}{h} + \sigma \psi(z_j, \mu) = q(z_j), \quad (3.15)$$

para $\mu < 0, j = 1, \dots, M$

Si se evalúa la ecuación (3.15) para $j=1$ y $j=M$, se obtiene el flujo angular en $\psi(z_0, \mu)$ y $\psi(z_{M-1}, \mu)$.

Ambos esquemas (3. 13) y (3. 15) sujetos a las condiciones de vacío y de frontera.

$$\psi(z_0, \mu) = 0 \quad \text{cuando} \quad \mu > 0 \quad \text{y} \quad \psi(z_M, \mu) = 0 \quad \text{cuando} \quad \mu < 0$$

Los dos esquemas operan en rangos específicos del espacio discreto, es necesario que ambos métodos sean complementarios, para obtener una solución en todo el rango espacial. Para esto, se desarrollarán varias operaciones y técnicas que se describen a continuación:

Tomando el primer caso (3. 13) y despejando el término del flujo neutrónico $\psi(z_j, \mu)$, se tiene:

$$\frac{\mu}{h} \psi(z_j, \mu) - \frac{\mu}{h} \psi(z_{j-1}, \mu) + \sigma \psi(z_j, \mu) = q(z_j)$$

$$-\frac{\mu}{h} \psi(z_{j-1}, \mu) + \left(\sigma + \frac{\mu}{h}\right) \psi(z_j, \mu) = q(z_j)$$

Esta ecuación se puede escribir de forma matricial, formulándose de la siguiente manera:

$$A^-(\mu) \psi^-(\mu) = q^- \tag{3. 16}$$

Dónde:

$A^-(\mu)$ Es la matriz de parámetros.

$\psi^-(\mu)$ Es el vector de incógnitas.

q^- Es el vector de la función fuente.

El siguiente paso es evaluar la ecuación (3. 13), para los tres primeros valores y para el último valor de j , $j = 1, 2, 3, \dots, M$.

La matriz $A^-(\mu)$ se proyecta de la siguiente forma:

De igual manera observando cuidadosamente cada característica, se determina que la matriz inversa negativa del esquema de E. Implícito, es igual a la matriz inversa transpuesta del esquema de E. Explícito, así: $(A^-(-\mu))^{-1} = (A^+(\mu))^{-T}$.

Todas estas condiciones son fundamentales, ya que determinan la linealidad entre los dos esquemas, también se puede observar que se conservara su simetría, ya que ambas matrices son simétricas entre sí. Estas propiedades se formulan en la ecuación (3. 18):

$$A^-(-\mu) = (A^+(\mu))^T \quad \text{y} \quad (A^-(-\mu))^{-1} = (A^+(\mu))^{-T} \quad (3. 18)$$

Una vez determinadas las propiedades que presentan ambas matrices, se despeja el flujo angular de la ecuación (3. 16), tomando la siguiente forma matricial:

$$\psi^-(\mu) = (A^-(\mu))^{-1} q^- \quad (3. 19)$$

Se evaluará a la matriz $AI(-\mu)^{-1}$, para los tres primeros valores y para el último valor de $j, j = 1, 2, 3, \dots, M$.

$$\begin{bmatrix} \frac{h}{\mu} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \frac{h}{\mu} \left(1 - \frac{h}{\mu} \sigma\right) & \frac{h}{\mu} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \frac{h}{\mu} \left(1 - \frac{h}{\mu} \sigma\right)^2 & \frac{h}{\mu} \left(1 - \frac{h}{\mu} \sigma\right) & \frac{h}{\mu} & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & & & \cdot & & \\ \cdot & & & \cdot & & \\ \cdot & & & & \cdot & \\ \frac{h}{\mu} \left(1 - \frac{h}{\mu} \sigma\right)^{M-1} & \frac{h}{\mu} \left(1 - \frac{h}{\mu} \sigma\right)^{M-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{h}{\mu} \end{bmatrix}$$

Como se puede observar, esta matriz, también muestra un comportamiento, la diagonal principal presenta el término $\frac{h}{\mu}$ y las diagonales inferiores el polinomio

$\frac{h}{\mu} \left(1 - \frac{h}{\mu} \sigma\right)^i$, con $i = 1, 2, 3, \dots, M - 1$, donde i , incrementa su valor, cada vez que se recorre la matriz y se aleja de la diagonal principal.

Para el esquema de E. Explicito se obtuvo:

$$\psi^+(\mu) = (\psi(z_1, \mu), \dots, \psi(z_M, \mu))^T, q^+ = (q(z_0), \dots, q(z_{M-1}))^T$$

De igual manera, si se despeja el flujo angular de la ecuación (3. 17), se obtiene:

$$\psi^+(\mu) = (A^+(\mu))^{-1} q^+ \quad (3. 20)$$

Se evalúa la matriz $(A(\mu)^+)^{-1}$, para los tres primeros valores y para el último valor de $j, j = 1, 2, 3, \dots, M$.

$$\begin{bmatrix} \frac{h}{\mu} & \frac{h}{\mu} \left(1 - \frac{h}{\mu} \sigma\right) & \frac{h}{\mu} \left(1 - \frac{h}{\mu} \sigma\right)^2 & \dots & \dots & \dots & \frac{h}{\mu} \left(1 - \frac{h}{\mu} \sigma\right)^{M-1} \\ 0 & \frac{h}{\mu} & \frac{h}{\mu} \left(1 - \frac{h}{\mu} \sigma\right) & \dots & \dots & \dots & \frac{h}{\mu} \left(1 - \frac{h}{\mu} \sigma\right)^{M-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{h}{\mu} \end{bmatrix}$$

Se ha comprobado la linealidad $A^-(-\mu)^{-1} = A^+(\mu)^T$, mediante el comportamiento de las matrices analizadas, el siguiente paso a tomar, es encontrar una forma en que estos dos esquemas permitan, determinar una solución en todo el rango del espacio discreto, de igual manera, es muy importante aplicar todas las destrezas de algebra lineal, calculo vectorial y las propiedades de las matrices para cumplir con este paso.

En el primer esquema matricial, para E. Implícito, se obtuvo:

$$\psi^-(\mu) = (\psi(z_0, \mu), \dots, \psi(z_{M-1}, \mu))^T, q^- = (q(z_1), \dots, q(z_M))^T$$

Si se añade una fila en la parte superior y una columna en la parte derecha de la matriz $(A^-(\mu))^{-1}$, se obtendrá la siguiente matriz aumentada:

$$\begin{bmatrix} \frac{h}{\mu} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \frac{h}{\mu}\left(1 - \frac{h}{\mu}\sigma\right) & \frac{h}{\mu} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \frac{h}{\mu}\left(1 - \frac{h}{\mu}\sigma\right)^2 & \frac{h}{\mu}\left(1 - \frac{h}{\mu}\sigma\right) & \frac{h}{\mu} & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ \frac{h}{\mu}\left(1 - \frac{h}{\mu}\sigma\right)^{M-1} & \frac{h}{\mu}\left(1 - \frac{h}{\mu}\sigma\right)^{M-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{h}{\mu} & 0 \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Al multiplicar esta matriz por el vector fuente q^- , $z \in [0, M]$, se obtendrá el flujo angular:

$$\psi^-(\mu) = (\psi(z_0, \mu), \dots, \psi(z_{M-1}, \mu))^T$$

Como se observa, se obtiene el mismo resultado de multiplicar la matriz $(A^-(\mu))^{-1}$, por el vector q^- .

Se aplica el mismo concepto a la matriz $(A^+(\mu))^{-1}$, pero en este caso se aumenta una fila en la parte inferior y una columna en la parte izquierda de la matriz, de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{h}{\mu} & \frac{h}{\mu}\left(1 - \frac{h}{\mu}\sigma\right) & \frac{h}{\mu}\left(1 - \frac{h}{\mu}\sigma\right)^2 & \dots & \dots & \frac{h}{\mu}\left(1 - \frac{h}{\mu}\sigma\right)^{M-1} \\ 0 & 0 & \frac{h}{\mu} & \frac{h}{\mu}\left(1 - \frac{h}{\mu}\sigma\right) & \dots & \dots & \frac{h}{\mu}\left(1 - \frac{h}{\mu}\sigma\right)^{M-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \frac{h}{\mu} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Al multiplicar el vector fuente $q^+, z \in [0, M]$, por la matriz aumentada, se obtendrá el flujo angular:

$$\psi^+(\mu) = (A^+(\mu))^{-1} q^+$$

Igualmente el flujo angular no se ha alterado al realizar las operaciones matriciales.

Para transformar la ecuación de flujo angular de neutrones a una ecuación de flujo escalar, se aplica el concepto del capítulo 2, de la ecuación (2.24), para una dimensión, el cual dice que el flujo escalar, es igual al flujo angular pero evaluado en todas las posibles direcciones, así la ecuación se plantea:

$$\phi = \int_{-1}^1 \psi(\mu) d\mu$$

Para reemplazar los valores del flujo angular en la ecuación y así obtener el flujo escalar de neutrones, hay que recordar que para el esquema de E. Implícito, $\mu < 0$, y para el esquema de E. Explícito, $\mu > 0$, se puede desplegar la integral en sus dos intervalos:

$$\int_{-1}^1 \psi(\mu) d\mu = \int_{-1}^0 [(A^-(\mu))^{-1} q] d\mu + \int_0^1 [(A^+(\mu))^{-1} q] d\mu$$

Ya que los valores de μ son iguales pero opuestos, se puede cambiar los límites de integración del primer término:

$$\int_{-1}^1 \psi(\mu) d\mu = \int_0^1 [(A^-(-\mu))^{-1} q] d\mu + \int_0^1 [(A^+(\mu))^{-1} q] d\mu \quad (3.21)$$

Donde $(A^-(\mu))^{-1}$ y $(A^+(\mu))^{-1}$, son las matrices aumentadas de cada esquema.

Entonces la ecuación (3.21), se escribe de la siguiente forma:

$$\Phi = \int_0^1 [(A^-(-\mu))^{-1} q] d\mu + \int_0^1 [(A^+(\mu))^{-1} q] d\mu \quad (3.22)$$

Como se puede ver, la suma de las dos integrales proporcionará la solución del flujo escalar en todo el rango de la variable espacial y para cada posible dirección μ .

Se puede sumar ambas matrices, ya que están bajo la misma integral.

$$A(\mu) = (A^-(-\mu))^{-1} + (A^+(\mu))^{-1} \quad (3.23)$$

Y si se reemplaza la ecuación (3.23), en la ecuación (3.22), se obtiene:

$$\Phi = \int_0^1 A(\mu) q d\mu \quad (3.24)$$

Todo este proceso de discretización, se encuentra planteado en (Sccheben, 2011)²⁵.

En este punto, se podría realizar el algoritmo que dé solución al problema de transporte, aplicando la discretización del método de Ordenadas Discretas, pero, como se mencionó en la importancia de la aplicación de los métodos numéricos y ya que es una de las cualidades más importantes de la ingeniería, la optimización de los recursos será una prioridad.

²⁵ Scheben, F. (2011). *Iterative Methods for Criticality Computations in Neutron Transport Theory*. Bath.

Para lograr optimizar aún más la solución, se sumarán las dos matrices aumentadas y se evaluarán para los primeros tres valores y para el ultimo valor de $j, j = 1, 2, 3, \dots, M$.

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{h}{\mu} & \frac{h}{\mu}\left(1 - \frac{h}{\mu}\sigma\right) & \frac{h}{\mu}\left(1 - \frac{h}{\mu}\sigma\right)^2 & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{h}{\mu}\left(1 - \frac{h}{\mu}\sigma\right)^{M-1} \\ \frac{h}{\mu} & 0 & \frac{h}{\mu} & \frac{h}{\mu}\left(1 - \frac{h}{\mu}\sigma\right) & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{h}{\mu}\left(1 - \frac{h}{\mu}\sigma\right)^{M-2} \\ \frac{h}{\mu}\left(1 - \frac{h}{\mu}\sigma\right) & \frac{h}{\mu} & 0 & \frac{h}{\mu} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{h}{\mu}\left(1 - \frac{h}{\mu}\sigma\right)^{M-3} \\ \cdot & & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & & \cdot \\ \frac{h}{\mu}\left(1 - \frac{h}{\mu}\sigma\right)^{M-2} & & & & & \frac{h}{\mu} & 0 & \frac{h}{\mu} \\ \frac{h}{\mu}\left(1 - \frac{h}{\mu}\sigma\right)^{M-1} & \frac{h}{\mu}\left(1 - \frac{h}{\mu}\sigma\right)^{M-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{h}{\mu} & 0 \end{bmatrix}$$

Como se observa la matriz $A(\mu)$ presenta un comportamiento, donde su diagonal principal es 0 y los valores que lo preceden son polinomios de $\frac{h}{\mu}\left(1 - \frac{h}{\mu}\sigma\right)$, que aumentan su grado mientras se alejan de la diagonal principal, hasta un polinomio de grado $M - 1$. La matriz $A(\mu)$, conserva su simetría debido a (3. 18) y de igual forma, se puede aproximar la integral con respecto a μ , aplicando el método de las Ordenadas Discretas. Donde se escogen $2N$ puntos con $\{\mu_j\} \subset [-1, 1] \setminus \{0\}$, con sus respectivos pesos $\{w_j\}$, estos valores deben satisfacer las condiciones planteadas en (2. 28), entonces para cada término de $A(\mu)$, se realizará la aproximación: $\sum_{j=1}^N w_j A(\mu_j)$, transformando la integral de la ecuación matricial algebraica, en una sumatoria, con esta sustitución, la variable angular es

discretizada y evaluada para cada posible dirección que los neutrones puedan tomar. Pero ya que los límites de integración están en el rango $[0,1]$, se debe aplicar la ecuación (3. 2), para evaluar la aproximación de la integral en el intervalo de la cuadratura de Gauss-Legendre $[-1,1]$, así el método de las Ordenadas Discretas aplicado a la matriz $A(\mu_j)$ será:

$$\int_a^b A(\mu) \sim \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^N w_i A\left(\frac{b-a}{2} r_i + \frac{b-a}{2}\right) = A \quad (3. 25)$$

Así A es la matriz de parámetros, con sus dos variables discretizadas y al multiplicarla por el vector fuente, se obtendrá un conjunto de datos o un nuevo vector, que será el flujo escalar de neutrones, obtenidos para cada z y μ , según el método de Euler Mejorado y el método de las Ordenadas Discretas. La solución total se plantea:

$$\phi = A q \quad (3. 26)$$

Dónde:

ϕ Flujo escalar de neutrones, según los métodos numéricos de: Euler Mejorado y Ordenadas Discretas. $\left[\frac{\text{neutrones}}{\text{cm}^2\text{s}}\right]$

A Matriz de parámetros.

q Vector fuente. $\left[\frac{\text{neutrones}}{\text{cm}^2\text{s}}\right]$

El algoritmo del método de Euler Mejorado, no sólo da la solución al problema de transporte de neutrones, sino que al hacerlo, optimiza los recursos utilizados. Al no tener la necesidad de resolver un sistema de ecuaciones, no necesita de una eliminación Gaussiana, LU o de Choleski (Benalcázar Gómez, 2012)²⁶, esta solución simplemente crea una matriz, con todas las características de la ecuación

²⁶Benalcázar Gómez, H. (2012). Álgebra Lineal y sus Aplicaciones. En H. Benalcázar Gómez, *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones* (págs. 289-297). Quito: Serie de Matemática Universitaria.

de transporte y la multiplica por el vector de fuente, obteniendo de forma sintetizada el flujo escalar de neutrones.

La discretización de la variable espacial, mediante el Método Mejorado de Euler, Implícito y Explicito, ayudó a encontrar un comportamiento presente en la matriz de parámetros, conjuntamente con las operaciones matriciales y matemáticas antes descritas. El método de las Ordenadas Discretas, permitió aproximar la integral, que describía todas las posibles direcciones de los neutrones, como una sumatoria finita de pesos, en cada término de la matriz. El siguiente paso es simplemente multiplicar, la matriz de parámetros, por el vector fuente, este resultado será un nuevo vector, el cual proporcionará los datos de concentración de neutrones, en una barra radioactiva.

El algoritmo desarrollado a partir de la solución de Euler Mejorado y Ordenadas Discretas (Ecuación (3. 26)), será detallado en el capítulo 4, conjuntamente con sus resultados y el error que presenta.

3.3.3 MÉTODO DE RESIDUOS PONDERADOS

El método de residuos ponderados, es un método numérico variacional, difiere de los métodos clásicos, como son: Euler, Runge-Kutta, Cranck Nicholson, entre otros, debido a que es necesario plantear los problemas que serán tratados, en problemas variacionales. Los problemas variacionales, son planteamientos matemáticos que describen una variación de una magnitud del sistema y cuya solución o soluciones, deben satisfacer las condiciones de extremos del problema, entonces la solución encontrada cumple con el máximo o mínimo de un funcional, que puede describir o no cierta propiedad o característica del sistema.

Las formulaciones variacionales, nacen del desarrollo de un funcional o de un principio variacional, que tiene intrínsecamente todas las características de las ecuaciones que gobiernan el problema.

Primeramente para plantear el método de los Residuos Ponderados, es importante acotar que toda función se puede aproximar como una combinación lineal de sus funciones base, de la siguiente forma:

$$u(x) \approx U_N(x) = \sum_{j=1}^N a_j F_j(x) \quad (3.27)$$

Donde:

- $u(x)$ Solución exacta.
- $U_N(x)$ Solución aproximada.
- a_j Incógnitas del sistema.
- $F_j(x)$ Funciones de forma conocidas.

De esta forma se obtiene una solución aproximada $U_N(x)$ de $u(x)$, transformando a la ecuación original (diferencial), en una ecuación algebraica, donde los valores de las incógnitas a_j , se obtienen, tal que la solución aproximada $U_N(x)$, satisfaga las ecuaciones diferenciales que gobiernan el sistema en todo el dominio Ω .

Ahora bien, si se reemplaza a la ecuación (3.27) en (2.28), el sistema algebraico de ecuaciones, será inconsistente, ya que existirán más ecuaciones que incógnitas, es por esto que es necesario plantear una formulación más general, que permita levantar esta inconsistencia.

Es en esta instancia donde se plantea la *formulación integral* (Bourbaki, 2004)²⁷, que es una forma de representar a la combinación lineal, en forma integral, sin alterar la configuración de las ecuaciones que gobiernan el sistema.

Además de levantar la inconsistencia, la formulación integral proporciona la característica fundamental de los métodos de aproximación variacionales, ya que es en este punto donde ingresa el concepto de minimización.

²⁷ Bourbaki, N. (2004). Integration I. Springer Verlag.

Así como toda función se puede plantear como una combinación lineal en sus funciones base, de la misma forma toda ecuación diferencial con condiciones de borde se puede plantar como una formulación integral.

Se plantea la formulación integral.

$$\int_0^1 w(x) R \, dx = 0 \quad (3.28)$$

Donde $w(x)$, es una función peso y R es la ecuación diferencial que gobierna el sistema.

Para detallar estos conceptos, se desarrollará en su forma integral a la ecuación (2.28) con sus condiciones de frontera,

$$\sigma_a \psi(z, \mu) + \mu \frac{\partial \psi(z, \mu)}{\partial z} = q(z) \quad z \in [0,1], \quad \mu \in [-1,1]$$

$$\psi(0, \mu) = 0 \quad \text{cuando} \quad \mu > 0 \quad \text{y} \quad \psi(1, \mu) = 0 \quad \text{cuando} \quad \mu < 0$$

La solución aproximada de $\psi(z, \mu)$, es

$$\psi(z, \mu) \approx \psi_N(z, \mu) = \sum_{j=1}^N a_j F_j(z)$$

Reemplazando la solución aproximada, en la ecuación (2.28) se obtiene:

$$\sigma_a \psi_N(z, \mu) + \mu \frac{\partial \psi_N(z, \mu)}{\partial z} - q(z) = 0$$

Ya que la parte izquierda de la igualdad es un valor aproximado, la nueva ecuación, ya no será igual a cero. Como todo método numérico, presenta un error, este valor o residuo de la aproximación será igual a una magnitud, la cual se representara como $R(z, a_j)$, que es en sí, una función de z y a_j .

$$R(z, a_j) = \sigma_a \psi_N(z, \mu) + \mu \frac{\partial \psi_N(z, \mu)}{\partial z} - q(z) \neq 0$$

Entonces para minimizar el residuo o el error del método de aproximación, se escribe a la ecuación (2. 28) en su formulación integral.

$$\int_0^d w(x) R(z, a_j) dz = 0$$

$$\int_0^d w(x) [\sigma_a \psi_N(z) + \mu \frac{\partial \psi_N(z)}{\partial z} - q(z)] dx = 0$$

Donde $w(x)$, es la función o funciones peso y como se dijo anteriormente $R(x, a_j)$ es el residuo. De los conceptos del cálculo de variaciones, se puede observar que $w(x)$, es la variación virtual y permitida de $\psi(z, \mu)$, que se produce al introducir la aproximación de la solución, entonces la formulación integral, hará que este error de aproximación tienda a cero, o en otras palabras, forzara que el error sea mínimo. Para ampliar los conceptos de cálculo variacional, se recomienda ver (Fomin, 2003)²⁸ y para ver su aplicación y significado en las formulaciones integrales, ver (Reddy, 2006)²⁹.

Del concepto de la formulación integral, se planteó el método de los residuos ponderados, que es una forma de determinar los valores de las incógnitas a_j , haciendo que el residuo tienda a cero, en una forma integral pesada, de la siguiente forma:

$$\int_0^1 w_i(z) R(z, a_j) dx = 0 \quad \text{con } (i = 1, 2, 3, \dots, N)$$

$$\int_0^d w_i(z) [\sigma_a \psi_N(z, \mu) + \mu \frac{\partial \psi_N(z, \mu)}{\partial z} - q(z)] dz = 0$$

Donde $w_i(z)$ es un conjunto de funciones lineales independientes, llamadas funciones de peso y ψ_N , es la solución aproximada del problema.

²⁸ Fomin, I. M. (2003). *Calculus of Variations*. Dover Publications Inc.

²⁹ Reddy, J. (2006). An introduction to the Finite Element Method. En J. Reddy, *An introduction to the Finite Element Method* (págs. 41-47). Texas: McGraw-Hill Higher Wducation.

El método de los residuos ponderados es una formulación general de otros métodos variacionales, existen varias formas de hacer que el residuo de la función sea cero, dependiendo de qué estrategias se siga, dependerá el nombre del método, como se detalla a continuación:

Método de Colocación: *Cuando $w_i(z) = \delta(z - z_i)$*

Es cuando se hace cero al residuo en los N puntos seleccionados del dominio Ω .

Método de los Mínimos cuadrados: *Cuando $w_i(z) = \delta(z - z_i)$*

Cuando se minimiza la integral del cuadrado del residuo.

Método de Petrov-Galerkin: *Cuando $w_i(z) = f_i \neq F_i$*

Cuando la función de peso es igual a f_i , pero diferente a la función de base.

Método de Galerkin: *Cuando $w_i(z) = F_i$*

Cuando se minimiza el residuo, haciendo que la función de peso sea igual a la función de base.

Todos estos métodos variacionales, se derivan del método general de los Residuos Ponderados, dependiendo de cómo se elija la función de peso, dependerá el nombre y la aplicación del método específico, todos estos métodos cumplen con el principio de minimización de la formulación integral.

Entonces, se describe al método de los Residuos Ponderados, como un método de aproximación, que transforma a las ecuaciones diferenciales en ecuaciones algebraicas, escogiendo funciones de forma F_i (funciones base) que permitan encontrar valores de las incógnitas a_j , tal que la solución aproximada, cumpla con las condiciones de las ecuaciones diferenciales que gobiernan el sistema, lo que permite encontrar una solución del problema, mediante formulaciones integradas o formulaciones débiles (no son lo mismo), minimizando el error de la aproximación.

3.3.3.1 Método de Galerkin

Una vez que se han detallado las características de los métodos de los Residuos Ponderados, se puede desarrollar el método de Galerkin bajo la característica de asignación de la función peso. Es importante mencionar que debido a que la ecuación (2. 28), es de primer orden, no es posible plantearla como una formulación débil, ya que esta formulación se obtiene solo en ecuaciones diferenciales de orden dos o mayor.

Para llegar a la formulación integral, se multiplica a la ecuación (2. 28), por una función de prueba $w(z)$, posteriormente se integra sobre el dominio Ω . En efecto este es el primer paso que se realiza para desarrollar el método, se toma la ecuación (2. 28) y se la plantea en su forma integrada, de la siguiente forma:

$$\int_0^d w(z) \left[\sigma_a \psi(z, \mu) + \mu \frac{\partial \psi(z, \mu)}{\partial z} - q(z) \right] dz = 0 \quad (3. 29)$$

Se aproxima la función $\psi(z, \mu)$, como una combinación lineal de sus funciones base.

$$\psi_N(z, \mu) = \sum_{j=1}^N a_j F_j(z) \quad (3. 30)$$

Se reemplaza la ecuación (3. 30) en (3. 29),

$$\int_0^d w(z) \left[\sigma_a \psi_N(z, \mu) + \mu \frac{\partial \psi_N(z, \mu)}{\partial z} - q(z) \right] dz = 0$$

$$\int_0^d w_i(z) \left[\sigma_a \left(\sum_{j=1}^N a_j F_j(z) \right) + \mu \frac{\partial \left(\sum_{j=1}^N a_j F_j(z) \right)}{\partial z} - q(z) \right] dz = 0$$

Para aplicar el método de Galerkin, es necesario que las funciones de peso, sean iguales a las funciones de forma, se reemplaza $w_i(z) = F_i$ y se acomodan los términos bilineales, es decir que dependen de $w_i(z)$ y de F_i y los que solo dependen de F_i ,

$$\sum_{j=1}^N a_j \left[\int_0^d \left(\mu \frac{\partial F_j(z)}{\partial z} F_i(z) + \sigma F(z)_j F_i(z) \right) dz \right] = \int_0^d [q(z) F_i(z)] dz \quad (3.31)$$

Dónde:

$$B(i, j) = \left(\int_0^d \left(\mu \frac{\partial F_j(x)}{\partial z} F_i(x) + \sigma F(x)_j F_i(x) \right) dz \right) = K_{ij}$$

$$Q_i = \int_0^d [q(z) F_i(x)] dz$$

Se observa que al reemplazar $B(i, j)$ y Q_i , en (3.31), se puede plantear a la ecuación como un sistema de ecuaciones.

$$\sum_{j=1}^N a_j K_{ij} = Q_i \quad (3.32)$$

El objetivo es encontrar los valores de a_j , tal que al sustituirlos en la solución aproximada (3.30), ésta satisfaga la ecuación (2.28).

El siguiente paso es determinar las funciones base o funciones de forma que cumplan con las condiciones de frontera. Se toma la primera condición de borde.

$$\psi(0, \mu) = 0 \quad \text{cuando} \quad \mu > 0.$$

La mínima función que satisface esta condición es x , ya que:

$$F(0) = 0, \quad \text{si } F(x) = x, \text{ entonces } F(0) = 0$$

Para generalizar la función de forma, se escribe $F_i(x) = x^i$, ya que,

$$F_1(x) = x^1, \quad F_2(x) = x^2, \quad F_3(x) = x^3, \quad \dots, F_N(x) = x^N$$

Se plantean las funciones de forma para todo i .

$$F_i(x) = x^i, \quad \frac{dF_i}{dx} = i x^{i-1} \quad (3.33)$$

Reemplazando (3. 33) en (3. 31) y la variable x , por la variable espacial z , se obtiene:

$$K_{ij} \int_0^d (\mu z^i j z^{j-1} + \sigma z^i z^j) dz]$$

$$Q_i = \int_0^d [q(z) z^i] dz$$

Integrando y reduciendo términos semejantes:

$$K_{ij} = \mu j \left(\frac{d^{i+j}}{i+j} \right) + \sigma \left(\frac{d^{i+j+1}}{i+j+1} \right)$$

(3. 34)

$$Q_i = q(z) \left(\frac{d^{i+1}}{i+1} \right)$$

Si se divide el dominio en dos segmentos, entonces se encontrarán dos valores de a_j , a_1 y a_2 , donde estos valores se determinan al resolver el sistema de ecuaciones matriciales, para ello, primeramente se utiliza la ecuación (3. 34) y se reemplazan los valores de i, j y d , para las distintas posiciones de la matriz K_{ij} y el vector Q_i , una vez determinados los valores de la matriz y del vector, se forma el sistema de ecuaciones de forma matricial, que tendrá el siguiente aspecto, para $N = 2$:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

Evaluando K_{ij} y Q_i , se tiene:

$$\begin{bmatrix} \mu \left(\frac{d^2}{2} \right) + \sigma \left(\frac{d^3}{3} \right) & 2\mu \left(\frac{d^3}{3} \right) + \sigma \left(\frac{d^4}{4} \right) \\ \mu \left(\frac{d^3}{3} \right) + \sigma \left(\frac{d^4}{4} \right) & \mu \left(\frac{d^4}{2} \right) + \sigma \left(\frac{d^5}{5} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(z) \left(\frac{d^2}{2} \right) \\ q(z) \left(\frac{d^3}{3} \right) \end{bmatrix}$$

Una vez encontrados los valores de a_1 y a_2 , se reemplazan en la solución aproximada, de la siguiente forma.

$$\psi_N(z, \mu) = a_1 z + a_2 z^2$$

$$\begin{aligned} \psi_N(z, \mu) = & \left(\frac{36 d^2 q (5u + 2d\sigma)}{3d^4 s g^2 + 12d^3 \sigma u + 20d^2 u^2} - \frac{20d^3 q (8u + 3d\sigma)}{3d^5 \sigma^2 + 12d^4 \sigma u + 20d^3 u^2} \right) z \\ & + \left(\frac{40 d^3 q (3u + 2d\sigma)}{3d^6 s g^2 + 12d^5 \sigma u + 20d^4 u^2} - \frac{30d^2 q (4u + 3d\sigma)}{3d^5 \sigma^2 + 12d^4 \sigma u + 20d^3 u^2} \right) z^2 \end{aligned} \quad (3.35)$$

Como se observa $\psi_N(z, \mu)$, está en función de z y μ , ya que σ , q , d , son parámetros conocidos del problema. Con el método de Galerkin, se discretizó la variable espacial z , ahora solo resta discretizar la variable angular μ ; nuevamente se aplica el método de las Ordenadas Discretas.

Para la primera condición de frontera y ya que se está determinando la concentración de neutrones con $\mu > 0$, se necesita cambiar los límites de integración de la cuadratura Gaussiana, correspondiente al método de las Ordenadas Discretas, los límites de integración pertenecen a los valores positivos de $\mu \in [0,1]$, así el flujo de neutrones escalar para la primera condición de frontera es:

$$\phi^+ = \int_a^b \psi_N^+ \sim \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^N w_i * \psi_N \left(\frac{b-a}{2} r_i + \frac{b-a}{2} \right) \quad (3.36)$$

$$\text{con } a = 0 \text{ y } b = 1$$

Dónde:

a	Límite de integración inferior.
b	Límite de integración superior.
wl_i	Pesos de los polinomios de Legendre, para cada i .
rl_i	Raíces de los polinomios de Legendre, para cada i .
ϕ^+	Solución aproximada, cuando $\mu > 0$, mediante los métodos numéricos de: Galerkin y Ordenadas Discretas.

Así al dar valores de z dentro del dominio Ω y especificar el grado de aproximación del método de las Ordenadas Discretas, se determinara el valor del flujo escalar de neutrones, para cada z , con $\mu \in [0,1]$ según el método de Galerkin, obteniendo la primera aproximación de la solución total.

Una vez determinada la solución aproximada $\psi_N(z, \mu)$, cuando $\mu > 0$, es necesario encontrar $\psi_N(z, \mu)$, cuando $\mu < 0$, al sumar las dos soluciones, se encontrará el flujo total de neutrones en todas las direcciones posibles dentro del dominio Ω .

Se plantea la segunda condición de frontera:

$$\psi(d, \mu) = 0 \quad \text{cuando} \quad \mu < 0$$

Se realiza el mismo procedimiento, se proyecta la formulación integral de (2. 28), se aproxima la solución como una combinación lineal y se reemplaza las funciones de peso por las funciones de forma. Las funciones de forma deberán satisfacer las nuevas condiciones de frontera, cuando $\mu < 0$, así la mínima función que cumple con esta condición es:

$$F(0) = 0, \quad \text{si } F(z) = d - z, \quad \text{entonces } F(0) = 0$$

Para generalizar la función de forma, se plantea $F_i(x) = d^i - x^i$, ya que,

$$F_1(z) = d^1 - z^1, \quad F_2(z) = d^2 - z^2, \quad F_3(x) = d^3 - z^3, \dots, F_N(z) = d^i - z^N$$

Se plantea las funciones de forma para todo i ,

$$F_i(z) = d^i - z^i, \quad \frac{dF_i}{dz} = -i z^{i-1} \quad (3.37)$$

Reemplazando (3.37) en la ecuación (3.32), se obtiene:

$$K_{ij} = \left[\int_0^d (\mu (d^i - z^i) (-j z^{j-1})) + \sigma (d^i - z^i)(d^j - z^j) dz \right]$$

$$Q_i = \int_0^d [q(z) (d^i - z^i)] dz$$

Integrando y reduciendo términos semejantes, se tiene:

$$K_{ij} = \mu j \left(i \frac{d^{i+j}}{j(i+j)} \right) + \sigma d^{i+j+1} \left(\frac{2+i+j}{i+j+1} - \frac{2+i+j}{i+j+1} \right)$$

(3.38)

$$Q_i = q(z) \left(i \frac{d^{i+1}}{i+1} \right)$$

Si se divide el dominio en dos segmentos $N = 2$, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

Evaluando K_{ij} y Q_i , se tiene:

$$\begin{bmatrix} \mu \left(\frac{d^2}{2} \right) + \sigma \left(\frac{d^3}{3} \right) & 2\mu \left(\frac{d^3}{6} \right) - \sigma \left(\frac{5d^4}{12} \right) \\ \mu \left(\frac{2d^3}{3} \right) - \sigma \left(\frac{5d^4}{12} \right) & 4\mu \left(\frac{d^4}{4} \right) - \sigma \left(\frac{8d^5}{15} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(z) \left(\frac{d^2}{2} \right) \\ q(z) \left(\frac{2d^3}{3} \right) \end{bmatrix}$$

Una vez encontrados los valores de a_1 y a_2 , se reemplazan en la solución aproximada, de la siguiente forma.

$$\psi_N(z, \mu) = a_1 * (d - z) + a_2 * (d^2 - z^2) \quad (3.39)$$

De igual forma como en la primera condición, se aplica el método de las Ordenadas Discretas para discretizar la variable angular μ , que en este caso tendrá los valores pertenecientes a $\mu \in [0,1]$. Reemplazando la ecuación (3.39), en la ecuación de la cuadratura Gaussiana (3.2), se obtiene.

$$\phi^- = \int_a^b \psi_N^-(z, \mu) \sim \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^N w_i \psi_N\left(\frac{b-a}{2} r_i + \frac{b-a}{2}\right) \quad (3.40)$$

$$\text{con } a = -1 \text{ y } b = 0$$

La ecuación (3.40) es la solución aproximada del problema cuando $\mu < 0$, al sumar las dos soluciones (ecuación (3.36) y ecuación (3.40)), se obtendrá un conjunto de datos que representaran la solución total del problema.

$$\phi = \phi^+ + \phi^- \quad (3.41)$$

Donde ϕ , es el flujo escalar de neutrones, obtenido con los métodos numéricos de: Galerkin y de Ordenadas Discretas.

3.3.4 EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

Como se ha mencionado anteriormente ciertas ecuaciones, no tienen soluciones exactas, o tales soluciones demandan gran cantidad de esfuerzo y tiempo. Un método que convierte estas ecuaciones, en sus contrapartes discretas y forma ecuaciones algebraicas, que permiten obtener la solución aproximada del problema, con una exactitud elevada, es el método de los Elementos Finitos o MEF.

Este método adquirió gran importancia, gracias al progreso de los ordenadores, ya que coincidentalmente, el método y los ordenadores se desarrollaron en las

décadas de los 60 y 70, permitiéndoles a los matemáticos e ingenieros realizar grandes cantidades de cálculos (Lopes, 2011)³⁰.

3.3.4.1 Importancia

El MEF, es un método numérico que convierte el dominio continuo del problema, en regiones de tamaño finito o también llamados *elementos*, estas regiones o subdominios, están delimitados en sus extremos por puntos llamados nodos, a los segmentos entre nodos se los denominan propiamente los elementos finitos.

Con este antecedente se describe la esencia fundamental del método de los Elementos Finitos, la cual es discretizar el dominio continuo del problema en subdominios o elementos. Evalúa de forma aproximada a la ecuación que gobierna el sistema para cada elemento, después de esta evaluación, se ensamblan los elementos con la información de las condiciones de frontera, que es en sí, el valor de los nodos en los extremos del dominio, al ensamblar cada elemento se describirá el movimiento de los nodos en todo el dominio, con estos datos, se da solución a las ecuaciones matemáticas que describen el comportamiento del sistema de forma integral, ya que se obtiene la sumatoria de las soluciones de cada elemento y con esto la solución sobre todo el dominio del sistema.

Al igual que los métodos tradicionales, el MEF, transforma a las ecuaciones diferenciales en conjuntos de ecuaciones algebraicas, que facilitan el cálculo de la solución. Además, evalúa a la función en cada espacio discreto y así aumenta la exactitud del cálculo de la solución del problema, esta exactitud aumentará, mientras aumente el número de elementos que conforman el mallado del dominio discreto. De igual forma dependiendo de las características del problema, es posible aumentar la exactitud de la aproximación, eligiendo funciones más complejas para evaluar las ecuaciones en los elementos.

³⁰Lopes, Z. A. (2011). El método de los elementos finitos: Una introducción. En Z. A. Lopes, *El método de los elementos finitos: Una introducción* (págs. 1-2). Maracaibo: Fondo Editorial Universidad Rafael Urdaneta.

Una ventaja importante que se presentan al aplicar el MEF, es que se aplica el método de los Residuos Ponderados, a cada elemento que conforma el mallado discreto, de esta forma y según el principio de minimización, se aproxima la función y se minimiza el error en cada elemento, a diferencia de los métodos variacionales, que minimizan el error en todo el dominio. Otra ventaja de este método es, que permite la manipulación de la forma de los elementos finitos, con esta cualidad, si el dominio del problema tiene cambios bruscos en cualquier punto de su perfil, se puede determinar la forma de los elementos que se adapten a este cambio y así poder calcular una aproximación de la función en esa región. Además, el método proporciona cierta habilidad en el cálculo de problemas, cuyo término de carga o termino fuente no presenta una homogeneidad.

El método de los Elementos Finitos es un método muy potente, que converge rápidamente a la solución; por su exactitud y por sus pocas restricciones, actualmente tiene mucha atención, en la ciencia y en la ingeniería.

En el presente capítulo se detallará su aplicación al problema de transporte de neutrones en una dimensión.

3.3.4.2 Aplicación

En primera instancia se obtendrá la solución aproximada dividiendo al dominio $z \in [0, d]$, en dos y cuatro elementos finitos, sobre cada elemento se aplicará una función de forma lineal, que permita obtener una solución aproximada sobre todo el dominio, al ensamblar los elementos. Posteriormente se obtendrá la solución dividiendo al dominio en cuatro elementos, pero en esta ocasión aplicando una función de forma cuadrática.

Es importante mencionar que, un elemento finito se denomina *elemento lineal*, cuando se aplica una función de forma lineal para obtener una solución aproximada sobre dicho elemento; y se denomina *elemento cuadrado*, cuando se aplica una función de forma cuadrática para obtener una solución aproximada sobre el elemento finito mencionado. La exactitud de la solución aumenta mientras

mayor sea el número de elementos y mientras la función de forma aplicada, sea más compleja.

Como en el MEF se aplican las aproximaciones variacionales a cada uno de los elementos finitos, es necesario plantear a las ecuaciones que gobiernan el comportamiento del sistema, como un problema variacional, para esto es necesario convertir a la ecuación (2. 28) en su formulación integral, a continuación se describe su procedimiento.

Se concibe el problema en su forma original, luego, se multiplica por una función de prueba y se integra a la ecuación sobre el dominio $z \in [0, d]$, convirtiendo al problema original en un problema variacional. Un paso muy importante es discretizar el dominio en un conjunto de elementos finitos, definiendo su paso y longitud. Todos estos pasos se describen a continuación.

3.4.4.2.1 Aproximación con 2 y 4 elementos lineales

$$\sigma_a \psi(z, \mu) + \mu \frac{\partial \psi(z, \mu)}{\partial z} = q(z) \quad z \in [0, 1], \quad \mu \in [-1, 1]$$

$$\psi(0, \mu) = 0 \quad \text{cuando} \quad \mu > 0 \quad \text{y} \quad \psi(1, \mu) = 0 \quad \text{cuando} \quad \mu < 0$$

Se procede a dividir el dominio continuo en segmentos discretos.

Sea $\psi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.

Un dominio de la partición: $0 = z_0 < z_1 < z_2 < \dots < z_M = 1$

Y sea $S_h = \{z_i\}$, de $i = 1$ hasta $i = M$, un mallado de dicha partición. Con:

$$I_i = [z_{i-1}, z_i]$$

$$h = z_i - z_{i-1}$$

$$h = \max\{h_i\}$$

Dónde:

I_i Es el intervalo de en cada segmento.

h Es la longitud de cada segmento.

Multiplico a (2. 28) por una función de prueba $v \in C'[0,1]$, arbitraria con:

$$v(0) = v(1) = 0.$$

$$\mu \frac{\partial \psi(z, \mu)}{\partial z} \cdot v + \sigma_a \psi(z, \mu) \cdot v = q(z) \cdot v$$

Tomo la integral en ambos lados de la igualdad.

$$\mu \int_0^1 \left(\frac{\partial \psi(z, \mu)}{\partial z} \cdot v \right) dz + \sigma_a \int_0^1 (\psi(z, \mu) \cdot v) dz = \int_0^1 (q(z) \cdot v) dz$$

Restrinjo la función de prueba.

$$V_h = \{v \in L_2(0,1); v' \in L_2(0,1), \quad v(0) = v(1) = 0\}$$

Es decir, v es continua en $[0,1]$, v' es continua a trozos y acotada en $[0,1]$ y V_h es el conjunto de todos los v que definen el espacio del dominio discreto. Así:

$$\begin{aligned} \mu \int_0^1 \left(\frac{d\psi(r, \mu)}{dz} \cdot v \right) dz + \sigma_a \int_0^1 (\psi(z, \mu) \cdot v) dz \\ = \int_0^1 (q(z) \cdot v) dz \quad \text{para todo } v \in V_h \end{aligned} \tag{3. 42}$$

La ecuación (3. 42) se denomina la *formulación integral* de la ecuación (2. 28).

Planteo ψ_h , como una solución aproximada de ψ , la cual se enuncia como una expansión de ψ , en sus N funciones base o dicho de otra forma como una combinación lineal de sus funciones de forma.

$$\psi_h(z, \mu) = \sum_{j=1}^N a_j F_j(z) \tag{3. 43}$$

La aproximación ψ_h , es la combinación lineal de las incógnitas del problema a_j y las funciones de forma $F_j(z)$, en esta aproximación las incógnitas a_j representan los valores de ψ en el nodo i del elemento e y N es el número de puntos donde se conoce el valor de ψ o dicho de otra forma, es el número de nodos del dominio, se plantea nuevamente la combinación lineal como:

$$\psi_h(z, \mu) = \sum_{j=1}^N \psi_j F_j(z) \quad (3.44)$$

Donde $\psi_h \in V_h$, es la llamada *solución del MEF*.

Para el cálculo del flujo escalar de neutrones, con el método de los Elementos Finitos, se discretizará al dominio en primera instancia en dos elementos, con sus respectivos tres nodos y se plantea la solución aproximada con $N = 3$.

$$\psi_h(z) = \psi_1 F_1(z) + \psi_2 F_2 + \psi_3 F_3 \quad (3.45)$$

$$\frac{d\psi_h(z)}{dz} = \frac{dF_1}{dz} \psi_1 + \frac{dF_2}{dz} \psi_2 + \frac{dF_3}{dz} \psi_3 \quad (3.46)$$

Empleando el método de Galerkin, donde las funciones de peso son iguales a las funciones de forma, se tiene:

$$v_i = F_i(z)$$

Reemplazando en (3.42).

$$\mu \int_0^1 \left(\frac{d\psi(r, \mu)}{dz} F_i(z) \right) dz + \sigma_a \int_0^1 (\psi(z, \mu) F_i(z)) dz = \int_0^1 (q(z) F_i(z)) dz$$

Reemplazando (3.45) y (3.46) en (3.42), resulta:

$$\begin{aligned}
& \mu \int_0^1 F_i(z) \left(\frac{dF_1}{dz} \psi_1 + \frac{dF_2}{dz} \psi_2 + \frac{dF_3}{dz} \psi_3 \right) dz \\
& + \sigma_a \int_0^1 F_i(z) (\psi_1 F_1(z) + \psi_2 F_2 + \psi_3 F_3) dz \quad (3.47) \\
& = \int_0^1 (F_i(z) q(z)) dz
\end{aligned}$$

El siguiente paso es, aislar a un elemento de todo el dominio y expresar a la solución sobre el elemento ψ_h^e , mediante una función de aproximación, utilizando polinomios algebraicos; el polinomio de menor grado que se puede aplicar, coincide con la ecuación de la recta.

$$\psi_h^e = c_1^e + c_1^e x$$

Como es una función de interpolación lineal, se debe conocer el valor de los extremos del elemento para que la función pueda interpolar entre estos dos puntos, así los valores en los extremos del elemento son.

$$\psi_h^e(x_a) = c_1^e + c_1^e x_a \equiv \psi_1^e$$

$$\psi_h^e(x_b) = c_1^e + c_1^e x_b \equiv \psi_2^e$$

Estas dos ecuaciones deben estar en función de los extremos (nodos locales) x_a , x_b y de cualquier punto interno x del elemento. La determinación de estas funciones se encuentra desarrollada en (Reddy, 2006)³¹. Las funciones lineales que permiten determinar la solución aproximada sobre el elemento e , son:

$$F_1^e(z) = \frac{x_2^e - x}{h} \quad y \quad F_2^e(z) = \frac{x - x_1^e}{h} \quad (3.48)$$

Que cumplen con:

³¹ Reddy, J. (2006). An introduction to the Finite Element Method. En J. Reddy, *An introduction to the Finite Element Method* (págs. 112-118). Texas: McGraw-Hill Higher Wducation.

$$\psi_h^e(z, \mu) = \sum_{j=1}^N \psi_j^e F_j^e(z) \quad (3.49)$$

Y tienen las siguientes propiedades:

$$F_j^e(z) \begin{cases} F_1^e(x_1^e) = 1; & F_2^e(x_2^e) = 1 \\ F_1^e(x_2^e) = 0; & F_2^e(x_1^e) = 0 \end{cases} = F_j^e(z) \begin{cases} 1 & \text{En el nodo } i \\ 0 & \text{En el resto} \end{cases}$$

Esta función esta descrita gráficamente en la Figura 3. 1:

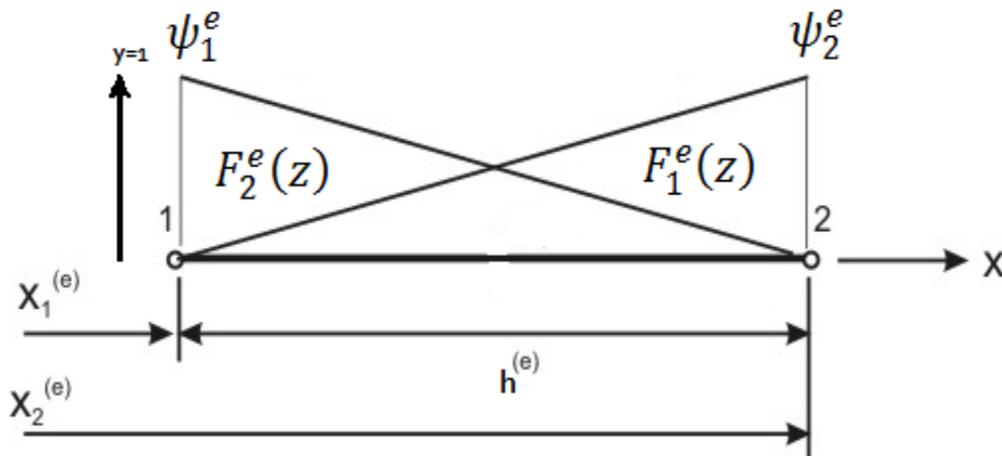


Figura 3. 1: Funciones de Forma lineales.

Fuente: Fredrik Berntsson, *The Finite Element Method*.

Se evalúa las funciones de forma para cada uno de los dos elementos, los resultados son:

$$F_1^1(z) = 1 - \frac{2z}{h}; \quad \frac{dF_1^1}{dz} = -\frac{2}{h}$$

$$F_2^1(z) = \frac{2z}{h}; \quad \frac{dF_2^1}{dz} = \frac{2}{h}$$

$$F_1^2(z) = 2 - \frac{2z}{h}; \quad \frac{dF_1^2}{dz} = -\frac{2}{h}$$

$$F_2^2(z) = \frac{2z}{h} - 1; \quad \frac{dF_2^2}{dz} = \frac{2}{h}$$

Donde los superíndices indican el elemento sobre el cual se encuentra la función y los subíndices indican el número de la función.

La representación gráfica de la discretización del dominio en sus dos elementos finitos, con sus respectivas funciones de forma se encuentra en la Figura 3. 2.

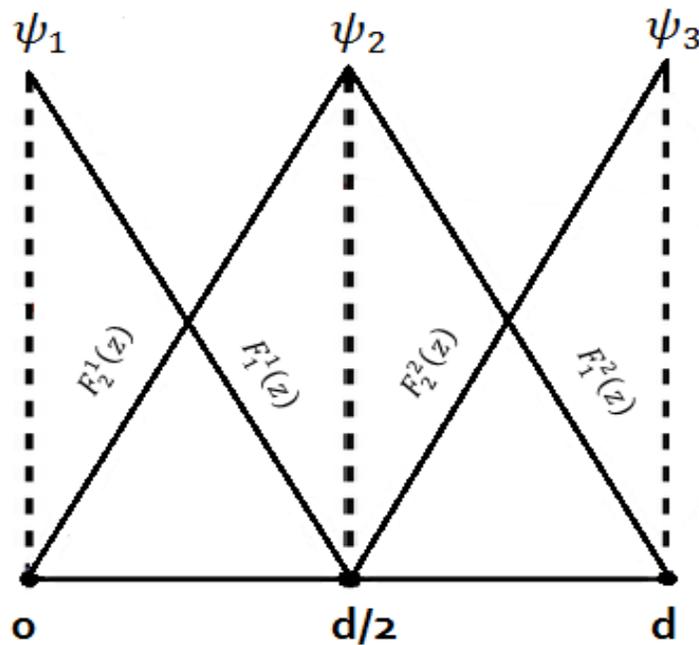


Figura 3. 2: Funciones de Forma y elementos lineales del espacio discreto.

Fuente: El Autor.

Para desarrollar el sistema de ecuaciones que permita encontrar los valores de ψ_j , es necesario evaluar a la ecuación (3. 47) para cada i , de la siguiente forma:

Cuando $i = 1$:

$$\mu \int_0^{\frac{L}{2}} F_1^1(z) \left(\frac{dF_1^1}{dz} \psi_1 + \frac{dF_2^1}{dz} \psi_2 \right) dz + \sigma_a \int_0^{\frac{L}{2}} F_1^1(z) (F_1^1 \psi_1 + F_2^1 \psi_2) dz = \int_0^{\frac{L}{2}} (F_1^1 q(z)) dz$$

Como se observa se toma en cuenta únicamente a las funciones que se encuentran definidas sobre el primer elemento, ya que $F_1^1(z)$, multiplica únicamente a ψ_1 (Observar Figura 3. 2) y sus funciones están definidas exclusivamente en el elemento $e = 1$.

Para el segundo caso, cuando $i = 2$, se puede observar que existen dos funciones de forma que están multiplicando a ψ_2 , que son F_2^1 y F_1^2 , estas funciones están definidas en dos elementos distintos del dominio, en este caso es necesario evaluar a las funciones que están definidas en el primer elemento y sumarlas a las funciones definidas en el segundo elemento, de esta forma se está ensamblando de forma directa a los elementos finitos del dominio. La ecuación resultante será:

Cuando $i = 2$:

$$\begin{aligned} & \mu \int_0^{\frac{L}{2}} F_2^1(z) \left(\frac{dF_1^1}{dz} \psi_1 + \frac{dF_2^1}{dz} \psi_2 \right) dz + \sigma_a \int_0^{\frac{L}{2}} F_2^1(z) (F_1^1 \psi_1 + F_2^1 \psi_2) dz \\ & + \mu \int_{\frac{L}{2}}^L F_1^2(z) \left(\frac{dF_1^2}{dz} \psi_2 + \frac{dF_2^2}{dz} \psi_3 \right) dz + \sigma_a \int_{\frac{L}{2}}^L F_1^2(z) (F_1^2 \psi_2 + F_2^2 \psi_3) dz \\ & = \int_0^{\frac{L}{2}} (F_2^1 q(z)) dz + \int_{\frac{L}{2}}^L (F_1^2 q(z)) dz \end{aligned}$$

Para el tercer caso cuando $i = 3$, se toma en cuenta únicamente a las funciones definidas en el elemento 2, ya que la función que multiplica a ψ_3 , es F_2^2 y está definida en el elemento 2. Para este caso, la ecuación se plantea de la siguiente forma:

Cuando $i = 3$:

$$\mu \int_{\frac{L}{2}}^L F_2^2(z) \left(\frac{dF_1^2}{dz} \psi_2 + \frac{dF_2^2}{dz} \psi_3 \right) dz + \sigma_a \int_{\frac{L}{2}}^L F_2^2(z) (F_1^2 \psi_2 + F_2^2 \psi_3) dz = \int_{\frac{L}{2}}^L (F_2^2 q(z)) dz$$

Una vez planteadas las ecuaciones para $i = 1,2,3$, se observa que forman un sistema de ecuaciones, que representado matricialmente es igual a:

$$\begin{bmatrix} K_{11}^1 & K_{12}^1 & 0 \\ K_{21}^1 & K_{22}^1 + K_{11}^2 & K_{12}^2 \\ 0 & K_{21}^2 & K_{22}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1^1 \\ Q_2^1 + Q_1^2 \\ Q_2^2 \end{bmatrix}$$

Dónde:

$$Q_1^1 = \int_0^{\frac{L}{2}} (F_1^1 q(z)) dz$$

$$Q_2^1 + Q_1^2 = \int_0^{\frac{L}{2}} (F_1^1 q(z)) dz + \int_{\frac{L}{2}}^L (F_1^2 q(z)) dz$$

$$Q_2^2 = \int_{\frac{L}{2}}^L (F_2^2 q(z)) dz$$

El siguiente paso es evaluar a cada una de las ecuaciones con sus respectivas funciones de forma e integrarlas sobre los límites de cada elemento, una vez evaluadas las ecuaciones, se reemplazan sus valores en sus posiciones correspondientes del sistema matricial. Además ya que la longitud del dominio es igual al diámetro de la barra radiactiva, se puede reemplazar a L por d . La matriz de rigidez y el vector de carga, para dos elementos con tres nodos son:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sigma d}{6} + \frac{\mu}{2} & \frac{\sigma d}{12} + \frac{\mu}{2} & 0 \\ \frac{\sigma d}{12} - \frac{\mu}{2} & \frac{\sigma d}{3} & \frac{\sigma d}{12} + \frac{\mu}{2} \\ 0 & \frac{\sigma d}{12} - \frac{\mu}{2} & \frac{\sigma d}{6} + \frac{\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \frac{d}{4} \\ q \frac{d}{2} \\ q \frac{d}{4} \end{bmatrix}$$

Para $N = 2$:

Ecuación 1:

$$\left(\frac{\sigma d}{6} + \frac{\mu}{2}\right)\psi_1 + \left(\frac{\sigma d}{12} + \frac{\mu}{2}\right)\psi_2 = q \frac{d}{4}$$

Ecuación 2:

$$\left(\frac{\sigma d}{6} - \frac{\mu}{2}\right)\psi_1 + \left(\frac{\sigma d}{3}\right)\psi_2 + \left(\frac{\sigma d}{12} + \frac{\mu}{2}\right)\psi_3 = q \frac{d}{2}$$

Ecuación 3:

$$\left(\frac{\sigma d}{12} - \frac{\mu}{2}\right)\psi_2 + \left(\frac{\sigma d}{6} + \frac{\mu}{2}\right)\psi_3 = q \frac{d}{4}$$

El sistema de ecuaciones en forma matricial, tiene la siguiente forma:

$$\psi(\mu) A(\mu) = q \quad (3.50)$$

Dónde:

$\psi(\mu)$ Vector solución o vector de variables.

$A(\mu)$ Matriz de rigidez.

q Vector de carga.

Siguiendo los mismos pasos de la discretización espacial mediante el MEF, pero esta vez, dividiendo al dominio en cuatro elementos y formulando las ecuaciones para los cinco nodos correspondientes, se obtiene un sistema de ecuaciones en forma matricial como sigue:

Para $N = 4$:

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\sigma d}{12} - \frac{\mu}{2}\right) & \left(\frac{\sigma d}{24} + \frac{\mu}{2}\right) & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\sigma d}{24} - \frac{\mu}{2}\right) & \left(\frac{\sigma d}{6}\right) & \left(\frac{\sigma d}{24} + \frac{\mu}{2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{\sigma d}{24} - \frac{\mu}{2}\right) & \left(\frac{\sigma d}{6}\right) & \left(\frac{\sigma d}{24} + \frac{\mu}{2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\sigma d}{24} - \frac{\mu}{2}\right) & \left(\frac{\sigma d}{6}\right) & \left(\frac{\sigma d}{24} + \frac{\mu}{2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\sigma d}{24} - \frac{\mu}{2}\right) & \left(\frac{\sigma d}{12} + \frac{\mu}{2}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \\ \psi_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \frac{d}{8} \\ q \frac{d}{4} \\ q \frac{d}{4} \\ q \frac{d}{4} \\ q \frac{d}{8} \end{bmatrix}$$

Como se observa, la matriz de rigidez y el vector de carga son similares en las discretizaciones con cuatro elementos y con dos elementos. Analizando ambas matrices se puede determinar un comportamiento para la discretización del dominio en elementos de número par, así la diagonal principal presenta el término $\left(\frac{\sigma d}{3\frac{N}{2}}\right)$, la diagonal superior $\left(\frac{\sigma d}{6N} + \frac{\mu}{2}\right)$, la diagonal inferior $\left(\frac{\sigma d}{6N} - \frac{\mu}{2}\right)$ y sus extremos presentan, para el primer término de la matriz de rigidez, se tiene $\left(\frac{\sigma d}{3N} + \frac{\mu}{2}\right)$ y para el último $\left(\frac{\sigma d}{3N} - \frac{\mu}{2}\right)$. De la misma forma el vector de carga presenta en sus extremos el valor $q \frac{d}{2N}$ y para los elementos comprendidos entre los extremos el valor $q \frac{d}{N}$; donde N es el número de elementos finitos en los que se está dividiendo el dominio.

Se ha analizado solo para un número par de elementos, debido a que siempre coincide un nodo en el centro del dominio, esto es muy importante, ya que se necesita determinar el valor del flujo de neutrones en el centro de la barra radiactiva, así como también en sus extremos. Al resolver el sistema de ecuaciones para cualquier número par de elementos finitos, se obtendrá siempre

el valor del flujo neutrónico en centro del dominio, siendo más exacto, mientras mayor sea el número de elementos de la discretización.

Desafortunadamente la matriz de rigidez inversa no presenta un comportamiento que se pueda describir para un número determinado de elementos, sean estos pares o impares, lo que impide obtener un vector solución con un comportamiento determinado y así poder desarrollar un algoritmo que dé solución a la ecuación (2. 28), para cualquier número de elementos. El vector solución que se obtiene al resolver el sistema, tendrá en cada posición una función que será dependiente de la variable angular μ , pero mientras mayor es el número de elementos de la discretización, más complejas son las funciones del vector y con mayor número de términos. Además resulta muy complicado aplicar el método de las ordenadas discretas a cada función del vector, lo que resulta en un número de operaciones muy elevado y por consiguiente aumentaría la propagación del error. Es por estas razones que el programa calculará la solución con elementos lineales, solamente discretizando el dominio en 2 y 4 elementos finitos, así, se evitara una propagación elevada del error, además no se utilizaran excesivos recursos de memoria ni del procesador, con lo que el programa responderá a la solución de forma rápida.

A continuación se describe detalladamente la aplicación de las condiciones de frontera y del método de las Ordenadas Discretas al sistema de ecuaciones.

- *Aproximación cuando $\mu > 0$*

Como se puede observar, la ecuación (3. 50) se encuentra definida como una ecuación matricial, con el vector incógnita que multiplica a la matriz de rigidez, este producto es igual al vector fuente o vector de carga.

Para este primer caso, tomando las condiciones de frontera del modelo, se observa que en el extremo $z = 0$, el flujo de neutrones es igual a 0; se aplica el mismo procedimiento que en el método de Euler del presente capítulo, estos es, si el primer valor del vector de incógnitas es igual a cero, se puede hacer, toda la primera fila y toda la primera columna de la matriz de rigidez igual a cero, o que es

lo mismo, simplemente eliminar la primera fila y la primera columna, de igual forma, el primer valor del vector de carga también tiene que ser eliminado; con esto al multiplicar la matriz por el vector de incógnitas, se tiene: $\psi(0) = \psi_1 = 0$.

La matriz de rigidez, para este primer caso resulta:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sigma d}{3} & \frac{\sigma d}{12} + \frac{\mu}{2} \\ \frac{\sigma d}{12} - \frac{\mu}{2} & \frac{\sigma d}{6} + \frac{\mu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \frac{d}{2} \\ q \frac{d}{4} \end{bmatrix}$$

En forma matricial se obtiene:

$$\psi^+(\mu) A^+(\mu) = q^+$$

Dónde:

$\psi^+(\mu)$ Vector incógnita del flujo neutrónico angular. Cuando $\mu > 0$.

$A^+(\mu)$ Matriz de rigidez. Cuando $\mu > 0$.

q^+ Vector fuente o vector de carga. Cuando $\mu > 0$.

Despejando el vector de incógnitas se obtiene:

$$\psi^+(\mu) = (A^+(\mu))^{-1} q^+$$

Para $N = 2$

$$\begin{bmatrix} \psi_2^+ \\ \psi_3^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \frac{q(\sigma * d^2 + 2 \mu d)}{7d^2\sigma^2 + 24 d \sigma \mu + 36 \mu^2} \\ 6 \frac{q(\sigma d + 6 \mu)}{7d^2\sigma^2 + 24 d \sigma \mu + 36 \mu^2} \end{bmatrix} \quad (3. 51)$$

Como se mencionó con anterioridad, la matriz de rigidez inversa no presenta un comportamiento que se lo pueda describir fácilmente, lo que impide formular una matriz inversa para cualquier número de elementos y obtener una solución

general, como se lo realizó en el método de Euler Mejorado. En este caso, la mejor forma de obtener el valor del flujo angular de neutrones en cada nodo, es resolver el sistema de ecuaciones; para esto se puede aplicar los métodos numéricos de solución de sistemas de ecuaciones presentes en (Benalcázar Gómez, 2012)³², o utilizar un software de que permita realizar el cálculo de forma simbólica, como puede ser Matlab o Mathematica. Una vez resuelto el sistema de ecuaciones, cada valor del vector incógnitas estará en función de la variable angular μ , debiendo aplicar el método de las ordenadas discretas, para su discretización y de esta forma obtener el flujo escalar de neutrones con dirección $\mu > 0$. Como los valores de la integral son $[0, 1]$, se debe aplicar la ecuación (3. 2) a cada elemento del vector, de la siguiente forma:

$$\phi^+ = \int_a^b \psi^+(\mu) \sim \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w l_i \psi^+ \left(\frac{b-a}{2} r l_i + \frac{b-a}{2} \right) \quad (3. 52)$$

con $a = 0$ y $b = 1$

Donde ϕ^+ es el vector que contiene los datos del flujo escalar de neutrones con dirección $\mu > 0$, en cada nodo del dominio discreto.

- ***Aproximación cuando $\mu < 0$***

Una vez obtenida la concentración de neutrones con dirección $\mu > 0$, se necesita calcular el flujo de neutrones con dirección opuesta y así, al sumar los dos vectores, obtener el total de neutrones presentes en el material radiactivo. Se aplica el mismo procedimiento hasta llegar a la matriz de rigidez, pero en este caso, en el extremo final de la barra, el flujo neutrónico será cero, $\psi(L) = \psi_3 = 0$, se eliminaran la última fila y columna de la matriz de rigidez y el ultimo valor del vector de carga.

³² Benalcázar Gómez, H. (2012). Álgebra Lineal y sus Aplicaciones. En H. Benalcázar Gómez, *Álgebra Lineal y sus Aplicaciones* (págs. 289-297). Quito: Serie de Matemática Universitaria.

$$\begin{bmatrix} \frac{\sigma d}{6} + \frac{\mu}{2} & \frac{\sigma d}{12} + \frac{\mu}{2} \\ \frac{\sigma d}{12} - \frac{\mu}{2} & \frac{\sigma d}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \frac{d}{4} \\ q \frac{d}{2} \end{bmatrix}$$

En forma matricial, se representa:

$$\psi^-(\mu) A^-(\mu) = q^-$$

Dónde:

$\psi^-(\mu)$ Flujo neutrónico angular. Cuando $\mu < 0$.

$A^-(\mu)$ Matriz de rigidez. Cuando $\mu < 0$.

q^- Vector fuente o vector de carga. Cuando $\mu < 0$.

Despejando el vector de incógnitas resulta:

$$\psi^-(\mu) = (A^-(\mu))^{-1} q^-$$

Para $N = 2$

$$\begin{bmatrix} \psi_1^- \\ \psi_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \frac{q(\sigma d + 6 \mu)}{7d^2 \sigma^2 + 24 d \sigma \mu + 36 \mu^2} \\ 9 \frac{q(\sigma * d^2 + 2 \mu d)}{7d^2 \sigma^2 + 24 d \sigma \mu + 36 \mu^2} \end{bmatrix} \quad (3. 53)$$

Como se puede observar $(A^+)^T = A^-$, lo cual afirma que existe simetría entre ambas matrices, siendo A^+ y A^- ambas no singulares, con lo cual la solución general converge de forma simétrica y no se necesitara realizar otros procedimientos para que la solución tenga una buena exactitud.

Desafortunadamente como se explicó en el primer caso, no se podrá aplicar el mismo procedimiento, para el cálculo de una matriz de solución general, como el aplicado en el método de Euler, ya que la inversa de ambas matrices no tiene un

comportamiento definido, con lo cual no se podrá plantear un algoritmo que forme una matriz de solución general, que multiplique al vector fuente.

Tomando el mismo procedimiento que en el primer caso, se resuelve el sistema de ecuaciones y se obtiene un vector con un conjunto de ecuaciones en función de la variable angular μ , de igual forma se aplica el método de las Ordenadas Discretas, pero con los límites de integración iguales a $[-1,0]$, de esta forma el flujo escalar de neutrones es:

$$\phi^- = \int_a^b \psi^-(\mu) \sim \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^N w l_i \psi^- \left(\frac{b-a}{2} r l_i + \frac{b-a}{2} \right) \quad (3.54)$$

$$\text{con } a = -1 \text{ y } b = 0$$

Donde ϕ^- es la solución del flujo escalar de neutrones con dirección $\mu < 0$, en cada nodo del dominio discreto.

Una vez que se han obtenido los vectores de concentración con ambas direcciones, solo queda sumarlos para encontrar la solución en los nodos.

Con $N = 2$ y $M = 3$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \phi_2^+ \\ \phi_3^+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_1^- \\ \phi_2^- \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^- \\ \phi_2^+ + \phi_2^- \\ \phi_3^+ \end{bmatrix}$$

- **Solución General**

Para obtener la solución del problema no solamente en los nodos globales del dominio espacial, sino que para todo z , nuevamente se toman los valores de los nodos con dirección positiva $\mu > 0$ y se los reemplaza en la solución aproximada (3. 45), pero ya que estos valores se obtuvieron evaluando a las ecuaciones sobre

cada elemento finito, la solución general deberá ser formulada de igual forma sobre cada elemento, de la siguiente forma.

Para $\mu > 0$:

$$\phi^+(z) = \begin{cases} \phi_1^+ F_1^1 + \phi_2^+ F_2^1, & 0 \leq z \leq \frac{d}{2} \\ \phi_2^+ F_1^2 + \phi_3^+ F_2^2, & \frac{d}{2} < z \leq d \end{cases}$$

El mismo procedimiento se realiza para $\mu < 0$:

$$\phi^-(z) = \begin{cases} \phi_1^- F_1^1 + \phi_2^- F_2^1, & 0 \leq z \leq \frac{d}{2} \\ \phi_2^- F_1^2 + \phi_3^- F_2^2, & \frac{d}{2} < z \leq d \end{cases}$$

La solución general del problema se obtiene al sumar las soluciones $\phi^+(z)$ y $\phi^-(z)$, ambas deben ser evaluadas en el mismo número de puntos y en los mismos rangos.

$$\phi = \phi^+ + \phi^- \quad (3.55)$$

Con $N = 4$ y $M = 5$:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ \phi_2^+ \\ \phi_3^+ \\ \phi_4^+ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \phi_1^- \\ \phi_2^- \\ \phi_3^- \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_1^- \\ \phi_2^+ + \phi_2^- \\ \phi_3^+ + \phi_3^- \\ \phi_4^+ \end{bmatrix}$$

De igual forma se obtiene la solución general mediante el MEF, para 4 elementos lineales y 5 nodos globales.

Para $\mu > 0$:

$$\phi^+(z) = \begin{cases} \phi_1^+ F_1^1 + \phi_2^+ F_2^1, & 0 \geq z \leq \frac{d}{4} \\ \phi_2^+ F_1^2 + \phi_3^+ F_2^2, & \frac{d}{4} > z \leq \frac{d}{2} \\ \phi_3^+ F_1^3 + \phi_4^+ F_2^3, & \frac{d}{2} > z \leq \frac{3d}{4} \\ \phi_4^+ F_1^4 + \phi_5^+ F_2^4, & \frac{3d}{4} > z \leq d \end{cases}$$

El mismo procedimiento se realiza para $\mu < 0$:

$$\phi^-(z) = \begin{cases} \phi_1^- F_1^1 + \phi_2^- F_2^1, & 0 \geq z \leq \frac{d}{4} \\ \phi_2^- F_1^2 + \phi_3^- F_2^2, & \frac{d}{4} > z \leq \frac{d}{2} \\ \phi_3^- F_1^3 + \phi_4^- F_2^3, & \frac{d}{2} > z \leq \frac{3d}{4} \\ \phi_4^- F_1^4 + \phi_5^- F_2^4, & \frac{3d}{4} > z \leq d \end{cases}$$

La solución general del problema para $N = 4$ y $M = 5$, es la suma de ambas soluciones $\phi^+(z)$ y $\phi^-(z)$, de igual forma que para el caso anterior ambas deben ser evaluadas en el mismo número de puntos y en los mismos rangos.

$$\phi = \phi^+ + \phi^- \quad (3.56)$$

Donde (3.55) es la solución general del problema de transporte unidimensional, mediante el método de los Elementos Finitos, obtenido con 2 elementos ($N = 2$) y sus respectivos 3 nodos ($M = 3$). De igual forma la ecuación (3.56) es la solución del problema de transporte unidimensional, pero obtenido con 4 elementos ($N = 4$) y sus respectivos 5 nodos ($M = 5$).

Para elevar la exactitud del método, esta vez no se aumentarán el número de nodos, en cambio se aplicará el MEF con 4 elementos cuadrados. En la siguiente sección se describe su procedimiento.

3.3.4.2.2 Aproximación con 4 elementos cuadrados

El Método de los Elementos Finitos evaluado con 4 elementos cuadrados, sigue el mismo procedimiento que en la sección anterior. Se plantean las ecuaciones que gobiernan el sistema como un problema variacional, se aproxima ψ como una combinación lineal de sus funciones de forma y se aplica el método de Galerkin, donde las funciones de peso son iguales a las funciones de forma.

Pero en este caso la aproximación sobre el elemento finito no será lineal, en cambio se incrementará el grado del polinomio y se considerará una ecuación de aproximación cuadrática.

$$\psi_h^e = c_1^e + c_2^e x + c_3^e x^2$$

Ya que existen tres términos en la función de aproximación, el número de nodos y de ecuaciones que se deben identificar en el elemento también es tres. Para desarrollar las funciones de forma que proporcionaran la solución aproximada sobre el elemento finito, esta vez se utilizará otro procedimiento, el cual se describe a continuación.

Al aislar el elemento de todo el dominio, se puede observar que las funciones de forma únicamente están definidas en el elemento finito, si se expresan en función de su variable local \bar{x} , además fijando el origen del primer nodo en $x_a = 0$ y ubicando el segundo nodo en la mitad de la longitud del elemento, las funciones de forma cuadráticas son:

$$\begin{aligned} F_1^e &= \left(1 - \frac{\bar{x}}{h}\right) \left(1 - \frac{2\bar{x}}{h}\right) \\ F_2^e &= \left(\frac{4\bar{x}}{h}\right) \left(1 - \frac{\bar{x}}{h}\right) \\ F_3^e &= \left(-\frac{\bar{x}}{h}\right) \left(1 - \frac{2\bar{x}}{h}\right) \end{aligned} \tag{3. 57}$$

Estas funciones conjuntamente con el elemento cuadrático, se representan gráficamente en la siguiente figura.

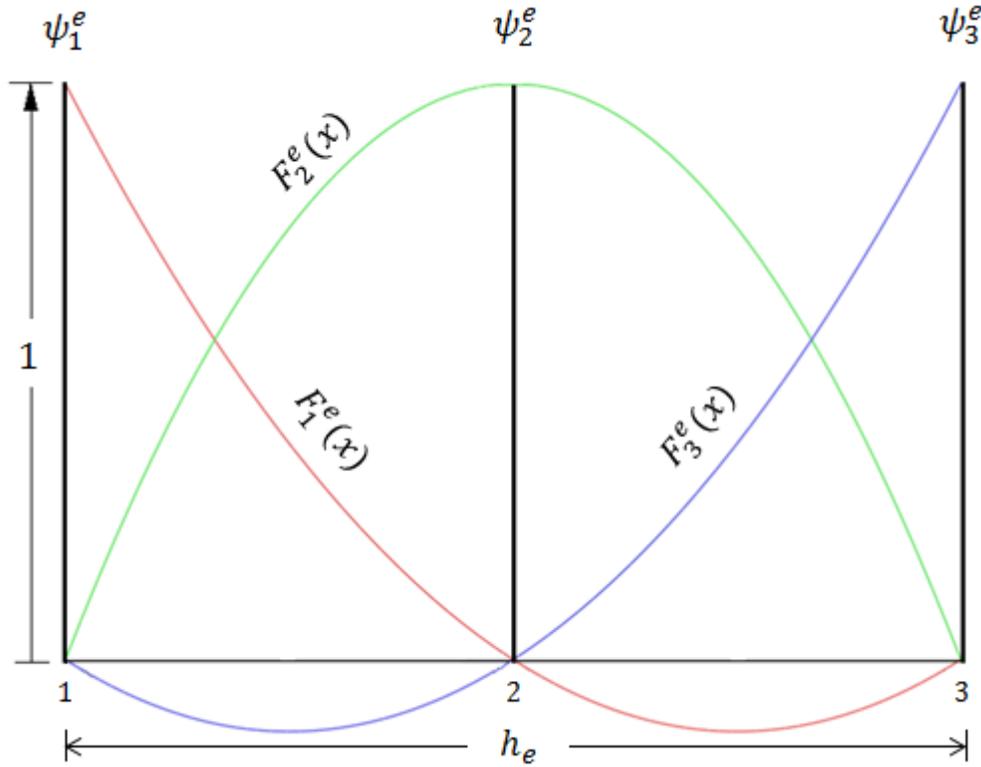


Figura 3. 3: Elemento cuadrático unidimensional, con las tres funciones de interpolación.

Fuente 1: http://en.wikiversity.org/wiki/Nonlinear_finite_elements/Homework_4/Solutions.

Fuente 2: El Autor.

Intercambiando x por la variable axial z , la solución aproximada sobre el elemento finito es:

$$\psi_h^e(z) = F_1^e(z) \psi_1^e + F_2^e(z) \psi_2^e + F_3^e(z) \psi_3^e = \sum_{j=1}^3 \psi_j^e F_j^e(z)$$

Evaluando al dominio en cuatro elementos cuadrados, el número de nodos globales será igual a $M = 9$, con lo cual la solución general aproximada resulta.

$$\begin{aligned} \psi_h(z) = & \psi_1 F_1(z) + \psi_2 F_2(z) + \psi_3 F_3(z) + \psi_4 F_2(z) + \psi_5 F_3(z) \\ & + \psi_6 F_2(z) + \psi_7 F_3(z) + \psi_8 F_2(z) + \psi_9 F_3(z) \end{aligned} \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_h(z)}{dz} &= \frac{dF_1}{dz}\psi_1 + \frac{dF_2}{dz}\psi_2 + \frac{dF_3}{dz}\psi_3 + \frac{dF_2}{dz}\psi_4 + \frac{dF_3}{dz}\psi_5 \\ &+ \frac{dF_2}{dz}\psi_6 + \frac{dF_3}{dz}\psi_7 + \frac{dF_2}{dz}\psi_8 + \frac{dF_3}{dz}\psi_9 \end{aligned} \quad (3.59)$$

La representación gráfica de la discretización del dominio en sus 4 elementos cuadráticos, con sus respectivas funciones de forma, se muestra en la Figura 3. 4.

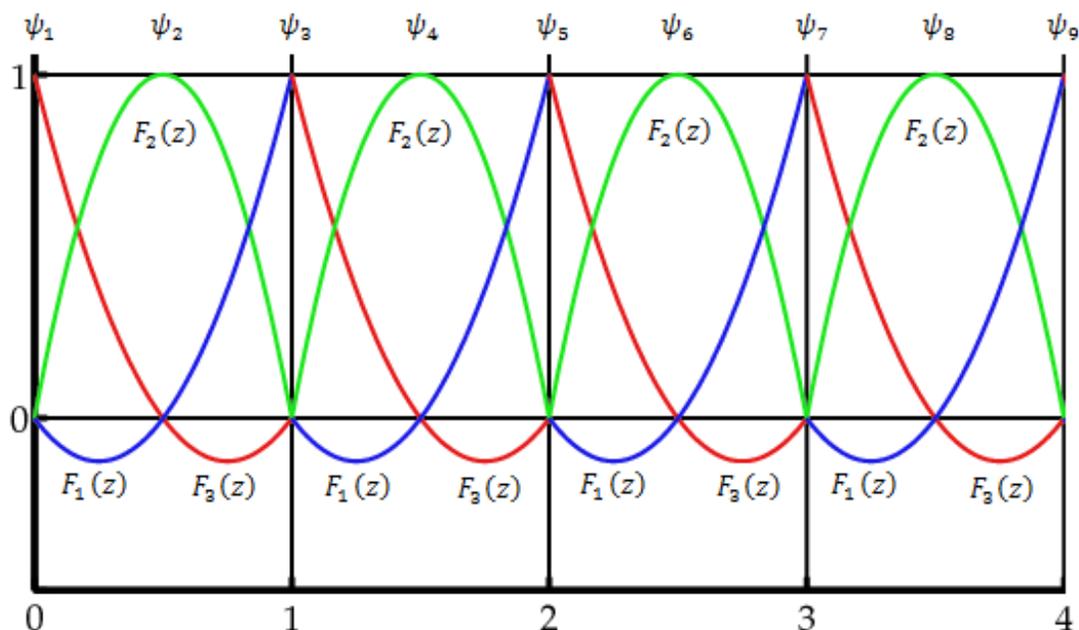


Figura 3. 4: Discretización del dominio en 4 elementos cuadráticos, con sus respectivas funciones de forma.

Fuente 1: http://en.wikiversity.org/wiki/Nonlinear_finite_elements/Homework_4/Solutions.

Fuente 2: El Autor.

De igual forma que en el procedimiento de los elementos lineales, se evalúa a la ecuación (3. 47) para cada valor de i , utilizando la técnica de ensamblaje directo de los elementos finitos.

Cuando $i = 1$:

$$\begin{aligned} \mu \int_0^{h_e} F_1(z) \left(\frac{dF_1}{dz}\psi_1 + \frac{dF_2}{dz}\psi_2 + \frac{dF_3}{dz}\psi_3 \right) dz + \sigma_a \int_0^{h_e} F_1(z) (F_1\psi_1 + F_2\psi_2 + \psi_3 F_3) dz \\ = \int_0^{h_e} (F_1 q(z)) dz \end{aligned}$$

Como se observa se toma en cuenta únicamente a las funciones que se encuentran definidas sobre el primer elemento, ya que $F_1(z)$, multiplica únicamente a ψ_1 (Ver Figura 3. 4) y sus funciones están definidas exclusivamente en el elemento $e = 1$, también se puede observar que en este caso no se especifica el elemento sobre el cual están definidas las funciones de forma, además cada término se integra sobre el mismo intervalo $[0, h_e]$, este procedimiento solo se puede dar cuando los elementos tienen la misma longitud, ya que las funciones de aproximación fueron obtenidas aislando un solo elemento finito, con una longitud definida y con los nodos ψ_1^e y ψ_2^e , fijos en el origen $x = 0$ y en la mitad del elemento $x = \frac{h}{2}$, respectivamente.

Cuando se tiene un dominio irregular y es necesario cambiar la longitud (una dimensión) de los elementos para que se adapten a una forma específica de la frontera, en este caso no se debe aplicar esta técnica, ya que la forma de los elementos cambiará y su longitud no será igual a otros elementos fuera de esta irregularidad, además el valor de las funciones de forma en cada elemento será diferente.

Cuando $i = 2$:

$$\begin{aligned} \mu \int_0^{h_e} F_2(z) \left(\frac{dF_1}{dz} \psi_1 + \frac{dF_2}{dz} \psi_2 + \frac{dF_3}{dz} \psi_3 \right) dz + \sigma_a \int_0^{h_e} F_2(z) (F_1 \psi_1 + F_2 \psi_2 + \psi_3 F_3) dz \\ = \int_0^{h_e} (F_2 q(z)) dz \end{aligned}$$

Para el tercer caso, cuando $i = 3$, se puede observar que existen dos funciones de forma que están multiplicando a ψ_3 , que son F_3 y F_4 , estas funciones están definidas en dos elementos distintos del dominio, en este caso es necesario evaluar a las funciones que están definidas en el primer elemento y sumarlas a las funciones definidas en el segundo elemento, de esta forma se están ensamblando de forma directa a los elementos finitos del dominio. La ecuación resultante será:

Cuando $i = 3$:

$$\begin{aligned}
 & \mu \int_0^{h_e} F_3(z) \left(\frac{dF_1}{dz} \psi_1 + \frac{dF_2}{dz} \psi_2 + \frac{dF_3}{dz} \psi_3 \right) dz + \sigma_a \int_0^{h_e} F_3(z) (F_1 \psi_1 + F_2 \psi_2 + \psi_3 F_3) dz \\
 & + \mu \int_0^{h_e} F_4(z) \left(\frac{dF_1}{dz} \psi_1 + \frac{dF_2}{dz} \psi_2 + \frac{dF_3}{dz} \psi_3 \right) dz \\
 & + \sigma_a \int_0^{h_e} F_4(z) (F_1 \psi_1 + F_2 \psi_2 + \psi_3 F_3) dz \\
 & = \int_0^{h_e} (F_3 q(z)) dz + \int_0^{h_e} (F_4 q(z)) dz
 \end{aligned}$$

Este procedimiento se ejecuta hasta $i = 9 = M$, que es el número total de nodos del espacio discreto.

Integrando y realizando las operaciones necesarias de cada una de las nueve ecuaciones, se representan los valores correspondientes a la matriz de rigidez y del vector fuente, en el sistema de ecuaciones de forma matricial, como se muestra a continuación.

Para 4 elementos cuadrados y sus respectivos 9 nodos, se tiene:

$$\begin{bmatrix}
 \left(\frac{d\sigma}{30}\right) - \frac{\mu}{2} & \left(\frac{d\sigma}{60}\right) + \left(\frac{2\mu}{3}\right) & -\frac{u}{6} - \left(\frac{d\sigma}{120}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \left(\frac{d\sigma}{60}\right) - \left(\frac{2\mu}{3}\right) & \left(\frac{2d\sigma}{15}\right) & \left(\frac{d\sigma}{60}\right) + \left(\frac{2\mu}{3}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{u}{6} - \left(\frac{d\sigma}{120}\right) & \left(\frac{d\sigma}{60}\right) - \left(\frac{2\mu}{3}\right) & \left(\frac{d\sigma}{15}\right) & -\frac{u}{6} - \left(\frac{d\sigma}{120}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \left(\frac{d\sigma}{60}\right) - \left(\frac{2\mu}{3}\right) & \left(\frac{2d\sigma}{15}\right) & \left(\frac{d\sigma}{60}\right) + \left(\frac{2\mu}{3}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{u}{6} - \left(\frac{d\sigma}{120}\right) & \left(\frac{d\sigma}{15}\right) & \left(\frac{d\sigma}{60}\right) + \left(\frac{2\mu}{3}\right) & -\frac{u}{6} - \left(\frac{d\sigma}{120}\right) & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \left(\frac{d\sigma}{60}\right) - \left(\frac{2\mu}{3}\right) & \left(\frac{2d\sigma}{15}\right) & \left(\frac{d\sigma}{60}\right) + \left(\frac{2\mu}{3}\right) & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \frac{u}{6} - \left(\frac{d\sigma}{120}\right) & \left(\frac{d\sigma}{15}\right) & \left(\frac{d\sigma}{60}\right) + \left(\frac{2\mu}{3}\right) & \left(\frac{d\sigma}{15}\right) & -\frac{u}{6} - \left(\frac{d\sigma}{120}\right) & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{d\sigma}{60}\right) - \left(\frac{2\mu}{3}\right) & \left(\frac{2d\sigma}{15}\right) & \left(\frac{d\sigma}{60}\right) + \left(\frac{2\mu}{3}\right) & -\frac{u}{6} - \left(\frac{d\sigma}{120}\right) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{d\sigma}{60}\right) - \left(\frac{2\mu}{3}\right) & \left(\frac{d\sigma}{60}\right) + \left(\frac{2\mu}{3}\right) \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{u}{6} - \left(\frac{d\sigma}{120}\right) & \left(\frac{d\sigma}{30}\right) + \frac{\mu}{2}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \psi_1 \\
 \psi_2 \\
 \psi_3 \\
 \psi_4 \\
 \psi_5 \\
 \psi_6 \\
 \psi_7 \\
 \psi_8 \\
 \psi_9
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 d\frac{q}{24} \\
 d\frac{q}{6} \\
 d\frac{q}{12} \\
 d\frac{q}{6} \\
 d\frac{q}{12} \\
 d\frac{q}{6} \\
 d\frac{q}{12} \\
 d\frac{q}{6} \\
 d\frac{q}{24}
 \end{bmatrix}$$

El sistema de ecuaciones, también se puede representar de la siguiente forma:

$$\psi(\mu) A(\mu) = q \quad (3. 60)$$

Cada término de la matriz de rigidez, se encuentra en función de la variable angular μ , de igual forma como en los procedimientos anteriores, se aplica el método de las Ordenadas Discretas, para obtener el flujo escalar de neutrones.

- **Aproximación cuando $\mu > 0$**

Aplicando las condiciones de frontera, el flujo de neutrones con dirección positiva en $z = 0$, es igual a cero, para representar este valor en el sistema de ecuaciones, se eliminan la primera fila y la primera columna de la matriz de rigidez y el primer valor del vector de fuente.

$$\psi^+(\mu) A^+(\mu) = q^+$$

Donde la matriz $A^+(\mu)$, no presenta la primera fila ni la primera columna, de igual forma en los vectores ψ^+ y q^+ , se eliminó su primer valor, para cumplir con las condiciones de frontera del problema.

Posteriormente se procede a despejar el vector de incógnitas, con lo cual la ecuación resultante se expresa como:

$$\psi^+(\mu) = (A^+(\mu))^{-1} q^+ \quad (3. 61)$$

Al realizar la multiplicación de la ecuación (3. 61), se obtiene el vector del flujo de neutrones en cada nodo global del espacio discreto $z \in [0, d]$. Para obtener el flujo escalar de neutrones con dirección $\mu > 0$, se aplica el método de las Ordenadas Discretas, pero como se debe evaluar a la variable μ en el rango de integración $[0,1]$, que se aplica la ecuación (3. 2).

$$\phi^+ = \int_a^b \psi^+(\mu) \sim \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^n w l_i \psi^+ \left(\frac{b-a}{2} r l_i + \frac{b-a}{2} \right) \quad (3. 62)$$

con $a = 0$ y $b = 1$

Donde ψ^+ es el flujo angular de neutrones, con las condiciones de frontera correspondientes a $\mu > 0$ y ϕ^+ es el vector que contiene los datos del flujo escalar de neutrones con dirección $\mu > 0$, en cada nodo del dominio discreto.

- **Aproximación cuando $\mu < 0$**

Con la segunda condición de frontera, la ecuación (3. 60) al ser evaluada en $z = d$, su flujo angular de neutrones debe ser igual a cero, para representar este valor en el sistema de ecuaciones, se eliminan la última fila y la última columna de la matriz de rigidez y el último valor del vector de fuente (Debido a que el sistema de ecuaciones es muy grande como para representarlo cada vez que se apliquen las condiciones de frontera, simplemente se expresara en forma de ecuación).

$$\psi^-(\mu) A^-(\mu) = q^-$$

Se procede a despejar el vector de incógnitas, con lo cual la ecuación resultante se expresa como:

$$\psi^-(\mu) = (A^-(\mu))^{-1} q^- \quad (3. 63)$$

Se obtiene el vector del flujo angular de neutrones con la condición $\mu < 0$, en cada nodo del dominio. De igual forma se aplica el método de las Ordenadas Discretas, pero con los límites de integración iguales a $[-1,0]$, de esta forma el flujo escalar de neutrones es:

$$\phi^- = \int_a^b \psi^-(\mu) \sim \frac{b-a}{2} \sum_{i=1}^N w l_i \psi^- \left(\frac{b-a}{2} r l_i + \frac{b-a}{2} \right) \quad (3. 64)$$

$$\text{con } a = -1 \text{ y } b = 0$$

Donde ϕ^- es la solución del flujo escalar de neutrones con dirección $\mu < 0$, en cada nodo del dominio discreto.

- **Solución general**

Para obtener la solución general del problema mediante el MEF con 4 elementos cuadrados, se reemplazan los valores de los nodos en la ecuación (3. 58), pero ya

que las funciones de forma fueron obtenidas en un elemento finito aislado con sus nodos locales fijos y cada elemento tiene la misma longitud; las funciones de forma serán las mismas para cada elemento y esta vez serán evaluadas bajo la misma longitud $h_e = (z_{e-1} - z_e)$.

Para $\mu > 0$:

$$\phi^+(z) = \begin{cases} \phi_1^+ F_1 + \phi_2^+ F_2 + \phi_3^+ F_3, & 0 \geq z \leq \frac{d}{4} \\ \phi_3^+ F_1 + \phi_4^+ F_2 + \phi_5^+ F_3, & \frac{d}{4} > z \leq \frac{d}{2} \\ \phi_5^+ F_1 + \phi_6^+ F_2 + \phi_7^+ F_3, & \frac{d}{2} > z \leq \frac{3d}{4} \\ \phi_7^+ F_1 + \phi_8^+ F_2 + \phi_9^+ F_3, & \frac{3d}{4} > z \leq d \end{cases} \quad (3.65)$$

El mismo procedimiento se realiza para $\mu < 0$:

$$\phi^-(z) = \begin{cases} \phi_1^- F_1 + \phi_2^- F_2 + \phi_3^- F_3, & 0 \geq z \leq \frac{d}{4} \\ \phi_3^- F_1 + \phi_4^- F_2 + \phi_5^- F_3, & \frac{d}{4} > z \leq \frac{d}{2} \\ \phi_5^- F_1 + \phi_6^- F_2 + \phi_7^- F_3, & \frac{d}{2} > z \leq \frac{3d}{4} \\ \phi_7^- F_1 + \phi_8^- F_2 + \phi_9^- F_3, & \frac{3d}{4} > z \leq d \end{cases} \quad (3.66)$$

La solución general del problema es la suma de ambas soluciones $\phi^+(z)$ y $\phi^-(z)$, de igual forma ambas deben ser evaluadas en el mismo número de puntos y en los mismos rangos.

$$\phi = \phi^+ + \phi^- \quad (3.67)$$

La ecuación (3.67), es la solución general del problema mediante el Método de los Elementos Finitos con 4 elementos cuadrados, su eficiencia y los resultados obtenidos de ambos esquemas del MEF ((3.65) y (3.56)), serán detallados en el capítulo 4, conjuntamente con los resultados de cada método numérico aplicado en el presente capítulo.

CAPÍTULO 4

EVALUACIÓN NUMÉRICA DEL MODELO NEUTRÓNICO

En el presente capítulo, se describirá el desarrollo del software de simulación, detallando el procedimiento de diseño, con cada una de sus interfaces y las acciones que el usuario puede realizar en el programa.

Posteriormente se tomarán datos reales de un reactor nuclear tipo PWR, de la empresa Westinghouse, modelo AP1000 y se evaluarán las soluciones obtenidas en el capítulo 3, correspondientes a los métodos numéricos aplicados.

Además se plantearán los algoritmos, se analizarán los resultados y se determinarán los errores porcentuales de cada método numérico. Con esta información, se determinará el comportamiento de los neutrones en la barra de combustible y a la vez se analizará cual método es el más eficaz en dar solución a la ecuación lineal de Boltzmann en una dimensión.

4.1 DESARROLLO DE SOFTWARE

En esta sección se detallarán las especificaciones necesarias para el desarrollo del software de simulación, así como los requisitos de hardware y software para que el programa se ejecute de forma fluida. También se detallará la inclusión de las leyes matemáticas planteadas en los distintos capítulos, de igual forma se observará como estas leyes interactúan entre sí y permiten obtener los resultados deseados por el cliente, cada especificación se realizará con imágenes tomadas de la interfaz del software, para que se visualice de mejor forma la interacción del cliente con el programa.

4.4.1 ESPECIFICACIONES PREVIAS

No se tomará una metodología específica, con el fin de tener mayor flexibilidad en el avance del desarrollo del programa, en cambio se utilizarán aspectos del Modelo en Cascada y del Modelo Orientado a Objetos.

El Modelo en Cascada permite desarrollar de forma sistemática, organizada y controlada las distintas etapas que conforman el desarrollo del programa, al final de cada etapa, se lleva a cabo una revisión final, que se encarga de determinar si el proyecto está listo para avanzar a la siguiente fase. Por ser muy riguroso y plantear etapas específicas en el desarrollo del programa, se eligió este modelo como referencia a seguir en el desarrollo del software de simulación.

El Modelo Orientado a Objetos está diseñado a satisfacer las necesidades de los usuarios, como las de los desarrolladores de software, a través de técnicas de modelación enfocadas a recrear el mundo real. Las ventajas de utilizar este modelo son: obtener un modelo real en la programación del software cercano a la perspectiva del usuario, facilita la programación ya que utiliza los conceptos de "Clase", definiendo propiedades y funciones enfocadas a la realidad, además es posible la reutilización del código, permitiendo modificar propiedades de los componentes, sin tener que cambiar desde cero el código, facilitando el trabajo del programador.

Se puede observar que las características de los dos modelos especificados anteriormente se complementan entre sí, debido a esto se han seleccionado como las mejores opciones para el desarrollo del software de simulación.

Un lenguaje muy desarrollado en los últimos tiempos, que brinda compiladores gratuitos y muy avanzados, además de ser uno de los lenguajes más fuertes en la programación orientada a objetos es Java. Las ventajas de utilizar Java como el lenguaje de programación para el software son:

- Permite el desarrollo de todas las características de la programación orientada a objetos.

- Es multiplataforma, esto quiere decir que el programa se puede ejecutar en distintos sistemas operativos.
- Incluye por defecto soporte para trabajo en red.
- Es muy fácil de usar, además sus entornos de desarrollo son gratuitos y han evolucionado de gran forma en los últimos tiempos.

Debido a sus características el lenguaje de programación a utilizar será Java y el entorno de desarrollo será NetBeans 7.3.1.

4.4.2 DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN

4.4.2.1 Requerimientos

Siguiendo los pasos del modelo en cascada, la primera etapa son los requerimientos. En esta fase se analizan las necesidades de los usuarios para determinar qué objetivos debe cumplir el software de simulación.

Los procesos de su obtención no serán detallados en esta sección ya que forman parte del plan de tesis del presente trabajo.

Los requerimientos del cliente son:

- 1 Flujo de neutrones en la barra de combustible nuclear.
- 2 Datos de energía producidos por la fisión nuclear.
- 3 Distribución de temperaturas en la varilla de combustible de un reactor nuclear.

4.4.2.2 Diseño

En esta etapa se analizan y se eligen las soluciones al problema, detallando de forma organizada su solución, además define los algoritmos empleados y la organización del código para su implementación. También se tomará en cuenta las clases principales que se utilizaron para desarrollar el software.

El problema a solucionar es la ecuación lineal de Boltzmann en una dimensión, el caso específico del problema de fuente. Este problema fue dado solución en el Capítulo 3 a través de los distintos métodos numéricos aplicados; estas soluciones serán detalladas como algoritmos que se implementan en el software de

simulación. Al no plantear un solo método de solución en el software de simulación, esto le permite al usuario ver la exactitud de los métodos numéricos implementados, de acuerdo a los parámetros de cálculo que ingrese el usuario.

4.4.2.2.1 Interfaz Principal

Con estos antecedentes, la interfaz principal que presenta el software es del flujo de neutrones, ya que es la solución a la ecuación lineal de Boltzmann; esta interface debe tener, además de los parámetros de cálculo, los parámetros del material radiactivo, que de igual forma el usuario será capaz de variar sus características y observar cómo se comporta el flujo de neutrones dentro de la barra de combustible. De la ecuación de transporte unidimensional, se puede determinar que la fuente es el valor de entrada del problema, el usuario será capaz de variar los valores de fuente. De esta forma la interfaz principal del programa se ha desarrollado, como se muestra a continuación.

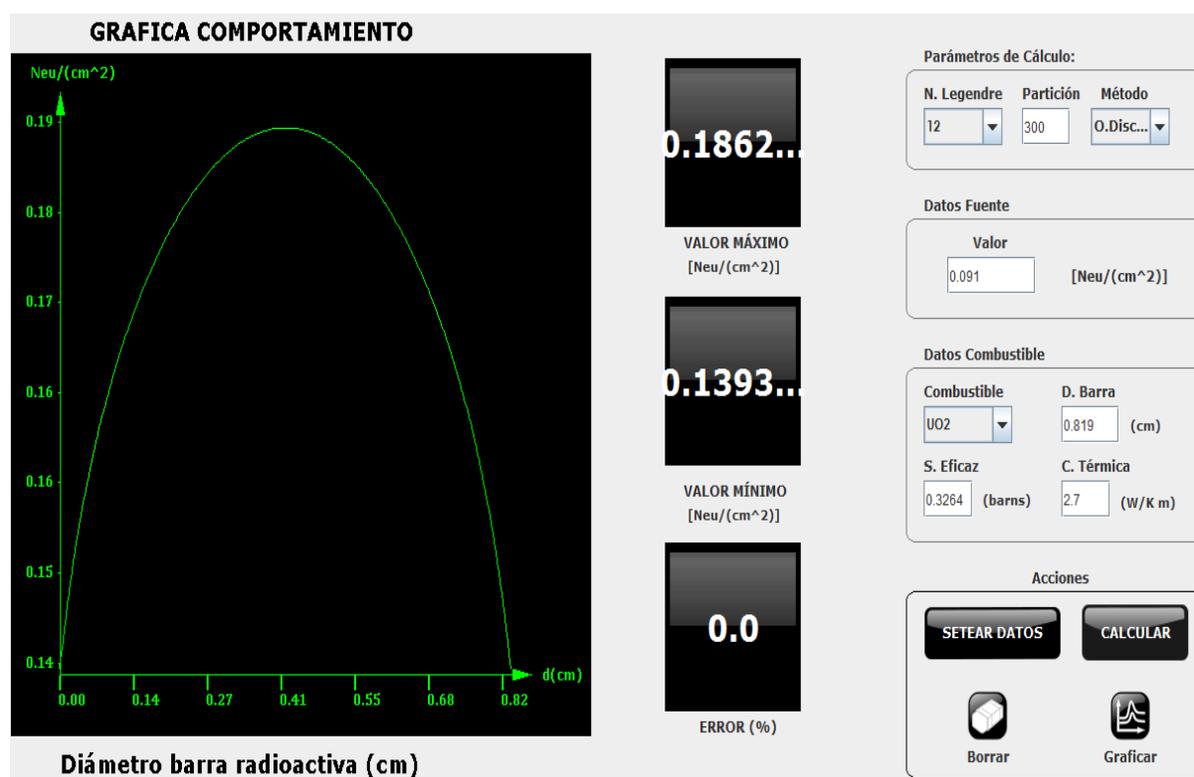


Figura 4. 1: Interfaz principal del software.

Fuente: El Autor.

Como se puede observar en la pantalla de la interfaz principal, en la parte derecha se encuentran las cajas de texto y listas que el usuario puede modificar en los tres ámbitos, Parámetros de Cálculo, Datos Fuente y Datos Combustible, en la parte inferior derecha se encuentran las acciones que el usuario puede realizar. El botón de SETEAR DATOS, permite al usuario llenar las cajas de texto automáticamente con datos que el software le proporciona (datos reales de un reactor AP100) o con datos que el usuario prefiera. El botón graficar realiza el cálculo con los datos introducidos y grafica el comportamiento del flujo de neutrones a lo largo de la barra de combustible, este gráfico se presentará en la parte izquierda de la pantalla donde se especifica la etiqueta GRÁFICO COMPORTAMIENTO, además el valor máximo que alcance el flujo de neutrones, se representará numéricamente en el espacio de VALOR MÁXIMO, de igual forma el valor mínimo se podrá observar en el espacio de VALOR MÍNIMO y el error que presenta del método numérico que se ha elegido, se visualiza en su correspondiente espacio ERROR, con la opción de graficar o no la solución exacta, con la activación del RadioButton.

A continuación se detalla cada sección de la interfaz principal.

Parámetros de cálculo

En este contenedor se especifican los datos con los cuales el programa realizará la solución de la ecuación lineal de Boltzman en una dimensión, los parámetros que el usuario puede variar son: el método con el cual se aproximará la solución, el número de particiones del dominio espacial y el grado del polinomio de Legendre para la discretización angular del problema, estas opciones se despliegan a continuación:

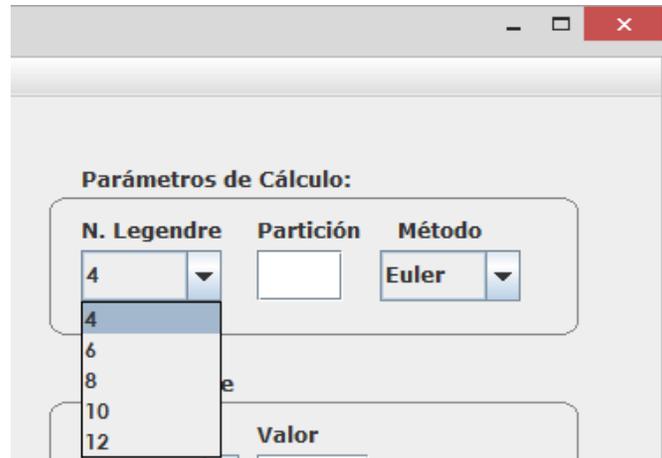


Figura 4. 2: Parámetros de cálculo, menú de raíces y polinomios de Legendre.

Fuente: El Autor.

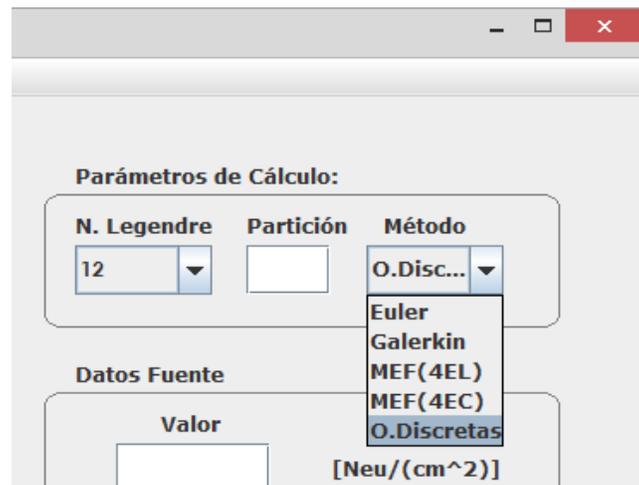


Figura 4. 3: Parámetros de cálculo, menú de métodos numéricos.

Fuente: El Autor.

Como se observa el usuario puede elegir el grado del polinomio de Legendre de una lista de números pares de 4 a 12, la razón del número par fue descrita en el Capítulo 3, en la sección 3.3.1.2 y el número máximo de 12 se refiere a que con un polinomio de grado 12 se obtiene una solución muy buena del método de las Ordenadas Discretas, y números mayores a éste harán que el programa utilice más recursos, obtenga la solución en mayor tiempo y el valor de su exactitud no será mucho mayor que el obtenido con el polinomio de grado 12.

Los métodos que el usuario puede elegir para dar solución al problema de transporte son los que se plantearon en el Capítulo 3, se despliegan de igual forma de una lista y se puede variar el número de particiones con el cual el programa discretizará el problema, a través del método elegido, por medio de una caja de texto que sólo admite valores enteros. Todos los algoritmos que utiliza el software, fueron desarrollados

Datos fuente

En la región de Datos Fuente, se encuentra una caja de texto donde el usuario puede ingresar el valor del número de neutrones que genera la fuente, en la parte izquierda de la caja de texto se encuentra las unidades de este valor, de igual forma que en todos los datos que el usuario pueda ingresar, el valor de fuente estará validado según los datos que se presentan en la realidad.

The image shows a software interface for entering source data. It features a light gray rounded rectangular container with the title "Datos Fuente" in bold blue text at the top. Inside the container, the word "Valor" is centered above a white text input field containing the number "0.091". To the right of the input field, the unit "[Neu/(cm^2)]" is displayed in bold black text.

Figura 4. 4: Contenedor y caja de texto del valor de fuente.

Fuente: El Autor.

Datos Combustible

Los datos del combustible se especifican en su respectivo contenedor con la etiqueta "Datos Combustible", dentro de este contenedor se puede elegir el combustible con el cual se realizará la simulación, a través de una lista que se identifica con la etiqueta "Combustible", además, es posible determinar su respectivo radio, sección eficaz de absorción y conductividad térmica; todas estas características se muestran en la siguiente captura de pantalla correspondiente al software de simulación.

Datos Combustible

Combustible UO2 ▼	D. Barra 3.707444 (cm)
S. Eficaz 0.3264 (barns)	C. Térmica 2.7 (W/K m)

Figura 4. 5: Contenedor de los datos de combustible.

Fuente: El Autor.

Es importante mencionar que el usuario tendrá la capacidad de eliminar, editar o agregar la cantidad de combustibles que desee para la simulación, a través de interfaces secundarias que le permitirán crear su propia información de combustibles.

Acciones

Las acciones que el usuario podrá realizar en la interfaz principal son:

- 1) Setear Datos: Al accionar este el botón, automáticamente se escribirán sobre las cajas de texto valores reales correspondientes a las características del combustible, valor de fuente y parámetros de cálculo, con los cuales se obtendrá la simulación más cercana a la realidad posible de la concentración de neutrones en la varilla combustible de un reactor nuclear AP100. Estos datos podrán ser modificados en el ítem menú “Cambio datos de seteo” del menú “Editar”.
- 2) Calcular: Este botón ejecuta el algoritmo correspondiente al método numérico especificado en la caja de texto, con la información del combustible y la fuente, y representa su solución de forma gráfica en el espacio de “Gráfica Comportamiento” y de forma numérica, detallando los valores máximos, mínimos y el error, en sus respectivos espacios.
- 3) Borrar: Borra los la información que se encuentre en las cajas de texto.

- 4) Graficar: Despliega la segunda interfaz de usuario, donde se encuentran los datos de potencia lineal de la barra combustible y la distribución de temperaturas en los distintos puntos de la varilla de combustible.



Figura 4. 6: Contenedor y botones de las acciones del software.

Fuente: El Autor.

4.4.2.2.2 Interfaz de Valores de Energía

Al presionar el botón Graficar, el programa toma los datos de la concentración de neutrones en sus valores máximo y mínimo, que corresponden a los valores en el borde y en el centro de la barra de combustible y procede a calcular la potencia que se genera por medio de la fisión nuclear en dichos puntos, una vez obtenidos estos datos, se procede a calcular la distribución de temperaturas en cada uno de los componentes de la varilla de combustible, todos estos datos se presentan de dos formas distintas. En la parte izquierda de la pantalla se genera un gráfico de temperaturas, cada color que presente la barra de combustible, corresponderá a un dato de temperatura, una escala de colores con sus respectivos equivalentes de temperatura se encuentra en el extremo izquierda de la pantalla. En la sección derecha de la pantalla con un recuadro se describen los componentes de la varilla de combustible con sus datos de temperatura, pero esta vez descritos de forma numérica, además en la parte superior de este recuadro, se encuentra un RadioButton con la etiqueta “Ver”, este botón permitirá desplegar un número en el gráfico de la sección izquierda, este número corresponderá a un componente del cuadro de la derecha, con lo cual se podrá identificar a los componentes descritos en el recuadro con el gráfico.

A continuación se presentan dos gráficas de la interfaz de “Valores de Temperatura”, la primera representa el escenario cuando el usuario no ha accionado el RadioButton “Ver” y la segunda cuando lo ha accionado.

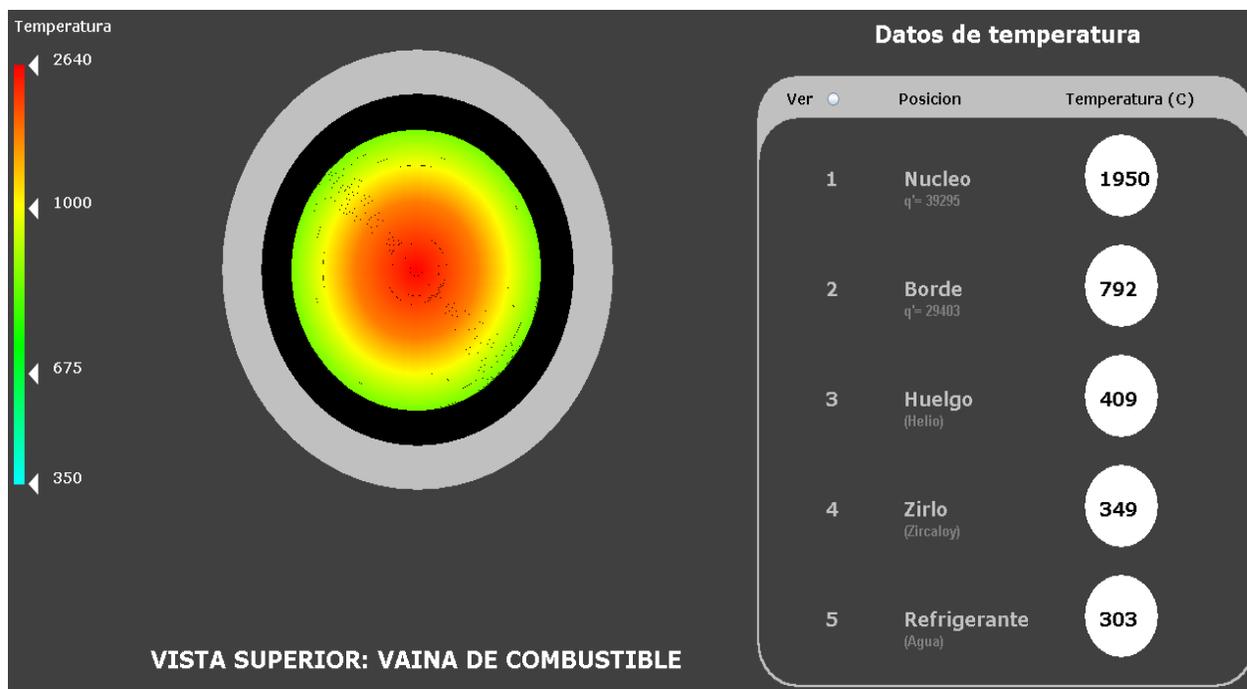


Figura 4. 7: Interfaz de Temperaturas sin accionar el RadioButon “Ver”.

Fuente: El Autor.

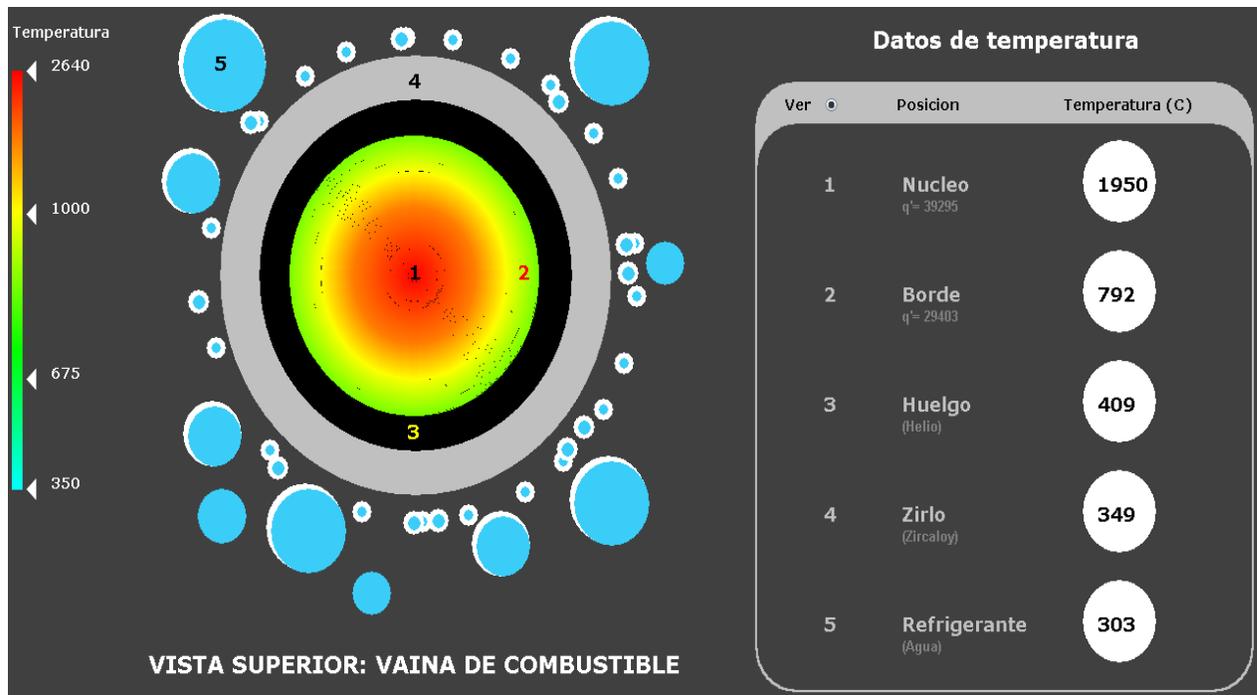


Figura 4. 8: Interfaz de Temperaturas con el RadioButon "Ver" accionado.

Fuente: El Autor.

4.5.2 REQUERIMIENTOS DE HARDWARE

El software de simulación Simva, se ejecuta de forma eficiente en ordenadores con procesador Pentium 5 o mayores.

4.5.3 REQUERIMIENTOS DE SOFTWARE

El programa se ejecuta con cualquier sistema operativo, desarrollado desde el año 1998 en adelante.

El software SimVa, fue desarrollado en la IDE NetBeans 7.3.1 y su código fue elaborado por el autor de la presente tesis.

4.6 PARÁMETROS Y DATOS DE ENTRADA.

Una vez que se ha dado solución a la ecuación lineal de Boltzmann en una dimensión, se analizan los requerimientos de las soluciones correspondientes a

los métodos numéricos aplicados. Se observa que cada una de las soluciones, presentan los mismos parámetros y datos de entrada.

Para evaluar las ecuaciones obtenidas en el Capítulo 3, es necesario tener los datos reales del reactor AP1000, a continuación se detallan las geometrías de la varilla de combustible.

Tabla 4. 1: Dimensiones de la varilla de combustible.

Descripción	Unidades (m)
Radio de la barra de combustible.	0.004095
Radio interior del recubrimiento.	0.00419
Radio exterior del recubrimiento.	0.00475

Fuente: http://upcommons.upc.edu/pfc/bitstream/2099.1/9332/2/ANEXOS_PFC.pdf.

Una vez obtenidas las dimensiones de la varilla de combustible, se plantean los parámetros de cálculo y del material (UO_2), con los cuales serán evaluados cada uno de los algoritmos:

$M = 300$	Número de particiones del espacio discreto.
$N = 10$	Número de raíces y pesos del polinomio de Legendre.
$\sigma = 0.3264(\text{barns})$	Sección Eficaz Microscópica de absorción (UO_2).
$d = 0.819 (cm)$	Diámetro de la barra de combustible (UO_2).
$q = 0.091 \left(\frac{\text{Neutrones}}{cm^2} \right)$	Fuente de neutrones.

4.7 ERROR PORCENTUAL DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS

El error se define como la diferencia del valor exacto y el valor medido, que en el caso de los métodos numéricos, es el valor aproximado. Los resultados de los cálculos de los algoritmos de los métodos numéricos, tendrán de por sí un error de truncamiento y un error de redondeo, ya que el error de truncamiento ocurre al

determinar una solución a través de métodos aproximados y el error de redondeo es el error que se da al tomar un número con longitud finita.

El error que se determinará en cada método numérico, es el error de truncamiento y se lo puede expresar en tres diferentes tipos de error, los cuales son: el error absoluto, el error relativo y el error porcentual.

El error absoluto es la diferencia del valor tomado como exacto y el valor aproximado.

$$\text{error Absoluto} = \text{valor Exacto} - \text{valor Aproximado}.$$

El error relativo es el cociente del valor absoluto y el valor exacto.

$$\text{error Relativo} = \frac{\text{error Absoluto}}{\text{valor exacto}}$$

El error porcentual es simplemente el error relativo multiplicado por 100.

$$\text{error Porcentual} = \text{error Relativo} * 100$$

Todos los algoritmos dan solución a la ecuación de transporte de neutrones por medio de dos aproximaciones numéricas, excepto el algoritmo del método de las Ordenadas Discretas, ya que éste obtiene la solución únicamente discretizando la variable angular μ , debido a que en el desarrollo del método (Capítulo 3), se trató la variable espacial z de forma analítica; es por este motivo que el método entrega los datos más exactos de la solución. El error de los demás métodos, será obtenido con respecto a los datos obtenidos del algoritmo de las O. Discretas.

4.8 EVALUACIÓN DE LOS MÉTODOS NUMÉRICOS.

Los algoritmos descritos en la presente sección, fueron desarrollados a partir de las soluciones de cada método numérico (capítulo 3), evaluándolos en primera instancia bajo el lenguaje del programa MATLAB, posteriormente se validaron los datos obtenidos, con el apoyo del Msc. Roque Santos, miembro del Departamento

de Ciencias Nucleares de la Escuela Politécnica Nacional (E. P. N) y finalmente se programaron en el software de simulación, bajo el lenguaje de Java.

Cada algoritmo está escrito en un pseudocódigo, para que el lector lo pueda interpretar de forma fácil, independientemente del lenguaje de programación que conozca.

Debido a que el método de Euler Mejorado obtiene una solución unificada del problema, es decir, obtiene la solución sobre todo el dominio, sin tener que aplicar las condiciones de frontera por separado, el algoritmo se presenta tal como se desarrolló en la ecuación (3. 26). Para los demás algoritmos, se obtuvo el vector solución con la primera condición de frontera y posteriormente con su segunda condición, analizando ambos vectores, se determinó, que el vector solución equivalente a la primera condición de frontera, es exactamente igual al vector de la segunda condición pero, con orden opuesto, un ejemplo de lo descrito se muestra a continuación.

$$sol\ 1 = [a\ b\ c]$$

$$sol\ 2 = [c\ b\ a]$$

Con esta observación los algoritmos restantes se desarrollaron simplemente a través del primer vector, ya que con esta información se puede crear el segundo vector, sin la necesidad de realizar la solución del problema con la segunda condición de frontera, una vez obtenidos ambos vectores se suman y se obtiene la solución total. De esta forma se utilizan menos recursos de software y hardware, además la solución se obtiene en menor tiempo y los datos son exactamente los mismos que al realizar ambas soluciones por separado.

4.8.1 EVALUACIÓN DEL MÉTODO DE LAS ORDENADAS DISCRETAS.

Ya que este método obtiene la solución más exacta posible de la ecuación de transporte de neutrones, se tomará como referencia para la interpretación y el análisis de los resultados del comportamiento de los neutrones en la barra de combustible. Además, se tomará como el valor exacto, para el cálculo de los

errores porcentuales de los demás métodos. El siguiente algoritmo resuelve la ecuación (3. 6), mediante el método de las Ordenadas Discretas a través de la ecuación (3. 2).

ALGORITMO DEL MÉTODO DE LAS ORDENADAS DISCRETAS:

INICIO

Paso 1:

Ingreso de los parámetros y de la señal de la fuente.

- M Número de particiones.
- σ Sección Eficaz Microscópica de absorción.
- N Número de raíces del polinomio de Legendre.
- d Diámetro de la barra de combustible.
- q Valor de fuente.

Paso 2:

Se calcula el vector de raíces LS[N] y de pesos LP[N], de los polinomios de Legendre.

Paso 3:

Se calcula la primera solución de la **Ecuación (3. 6)**, cuando los neutrones tienen dirección $\mu > 0$, mediante la **Ecuación (3. 2)**.

For i =0; i = M; i ++

For j =0; j=N; j++

$$\left. \begin{aligned} S[j] &= \frac{LS[j](b-a) + b + a}{2} \\ A[j] &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i * \left(q \frac{1}{\sigma_a} - q \frac{1}{\sigma_a} e^{\frac{\sigma_a i}{S[j]}} \right) \end{aligned} \right\} \text{Ecuación (3. 2)}$$

Fin j

Fin i

Paso 4:

Se suman ambas soluciones de las condiciones de frontera.

k=0

For i = 0; i < m; i ++

solTotal[k]= A[i] + A[m - i - 1]

k = k +1

Fin i

Paso 5:

Se imprimen los datos del flujo escalar de neutrones $\phi(k) = solTotal[k]$.

FIN

4.8.1.1 Resultados del método de las Ordenadas Discretas

Utilizando los datos de la sección 4.6, los resultados de la simulación, con el algoritmo de Ordenadas Discretas, son los siguientes:

$$\phi = 0.1862 \left(\frac{\text{Neutrones}}{\text{cm}^2} \right), \text{ en el centro de la barra de combustible}$$

$$\phi = 0.1393 \left(\frac{\text{Neutrones}}{\text{cm}^2} \right), \text{ en el extremo de la barra de combustible}$$

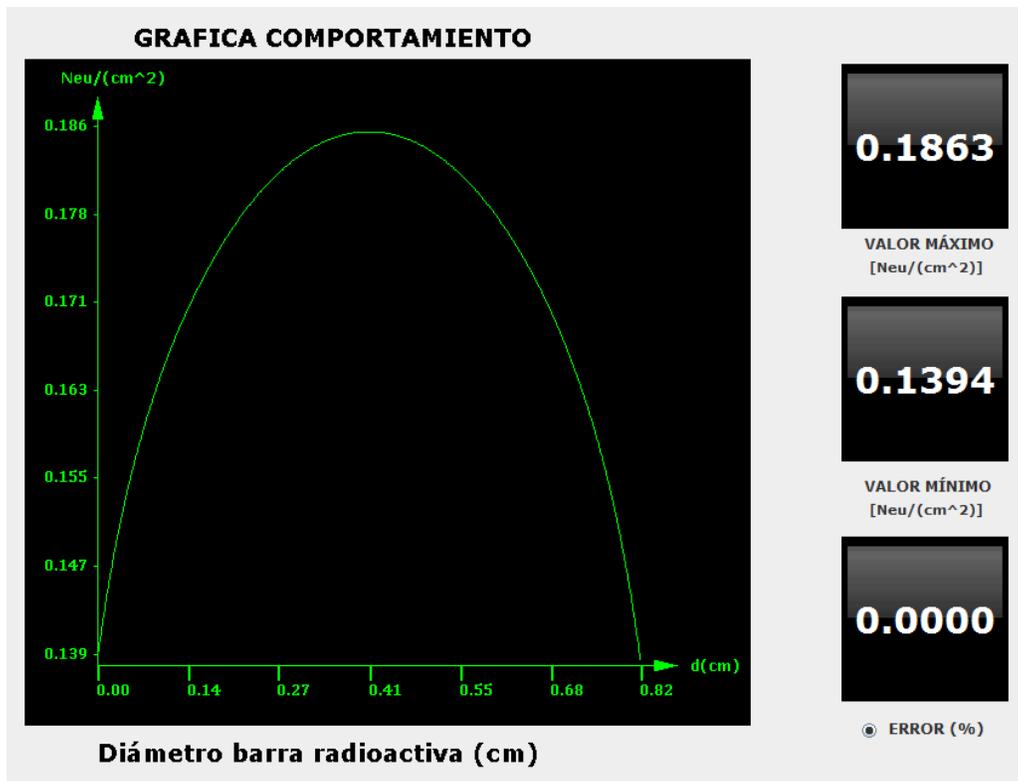


Figura 4. 9: Comportamiento del flujo neutrónico, con el combustible UO_2 , obtenido con el método de O. Discretas.

Fuente: El Autor.

Para determinar otro tipo de comportamiento del flujo neutrónico, se evalúa al mismo algoritmo, con un valor de fuente diferente y con otro combustible (MOX). Los datos se describen a continuación:

$$q = 0.05 \left(\frac{\text{Neutrones}}{\text{cm}^2} \right)$$

$$S. \text{Eficaz} = 0.3185 \text{ (barns)}$$

$$C. \text{Termica} = 2.4 \left(\frac{W}{K m} \right)$$

Se obtienen los siguientes resultados.

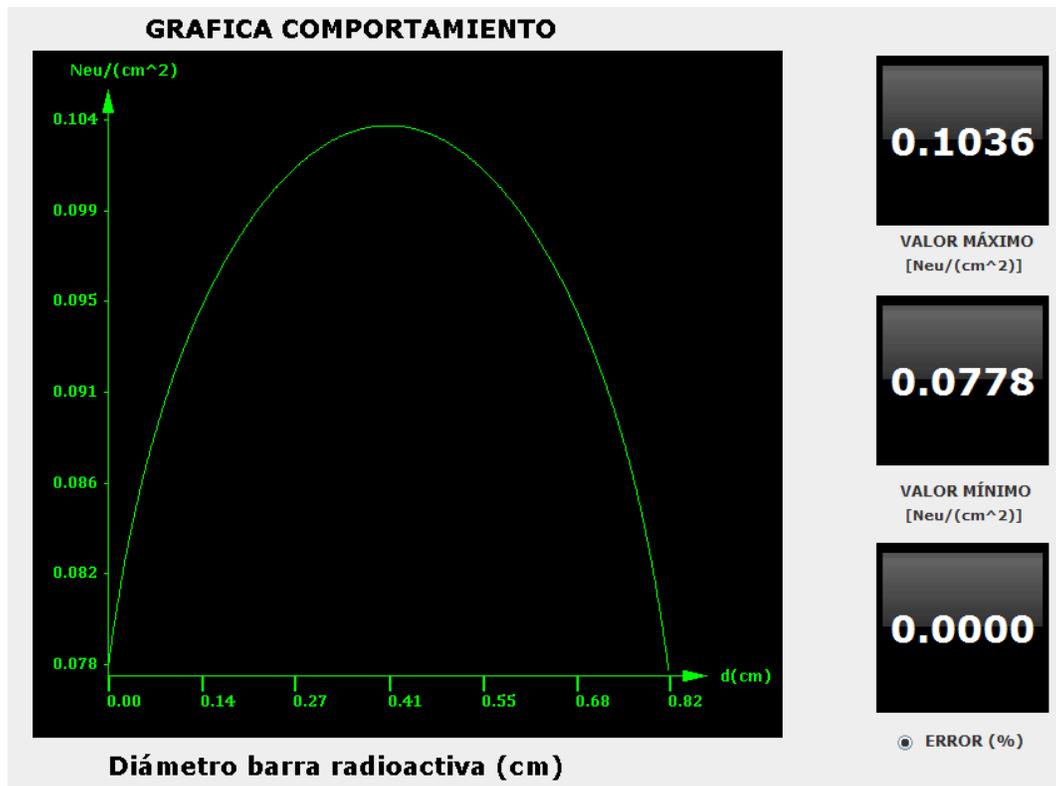


Figura 4. 10: Comportamiento del flujo neutrónico, con el combustible **MOX**, obtenido con el método de O. Discretas.

Fuente: El Autor.

Al evaluar al método en dos escenarios distintos, se puede observar, que el comportamiento de los neutrones en el interior de la barra de combustible es en forma de parábola, alcanzando su máximo valor de concentración en el centro y su menor valor en los extremos de la barra radiactiva.

4.8.2 EVALUACIÓN DEL MÉTODO DE EULER MEJORADO.

Para el método de Euler Mejorado el siguiente algoritmo, toma los datos de entrada y con esta información arma la matriz de parámetros según el comportamiento descrito en la sección 3.3.2.2, aplica el método de las Ordenadas Discretas a cada término de la matriz mediante la ecuación (3. 2) y por último la multiplica por el vector de fuente, el resultado es un vector que contiene los datos del flujo escalar de neutrones, según la ecuación (3. 26).

ALGORITMO DE EULER MEJORADO

Paso 1:

Ingreso de los parámetros y de la señal de la fuente.

- M Número de particiones.
- σ Sección eficaz microscópica de absorción.
- N Número de raíces del polinomio de Legendre.
- d Diámetro de la barra de combustible.
- q Valor de fuente.

Paso 2:

Dependiendo de los valores ingresados, se calcula $h = \frac{d}{M}$, el vector de las raíces y de pesos de Legendre, LS[N] y LP[N], respectivamente.

Paso 3:

Se calcula matriz de parámetros de la siguiente forma:

For i =0; i = M; i ++ Barrido filas

For j =0; j=M; j++ Barrido de columnas

If i=j **Then**

$$A[i, j] = 0$$

If i<j **Then**

$$K = j - i$$

For cont =0; cont<N; cont++

$$A[i, j] = \sum_{j=1}^N w_j \left[\frac{h}{S[cont]} \left(1 - \frac{h}{S[cont]} \sigma \right)^k \right] \left. \vphantom{\sum_{j=1}^N} \right\} \text{Ecuación (3.2)}$$

Fin cont

If i>j **Then**

$$L = i - j$$

$$\begin{array}{l}
 \text{For cont =0; cont<N; cont++} \\
 S[\text{cont}] = \frac{LS[\text{cont}](b - a) + b + a}{2} \\
 A[i, j] = \sum_{j=1}^N w_j \left[\frac{h}{S[\text{cont}]} \left(1 - \frac{h}{S[\text{cont}]} \sigma \right)^L \right] \\
 \text{Fin cont} \\
 \text{Fin j} \\
 \text{Fin i}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{For cont =0; cont<N; cont++} \\ S[\text{cont}] = \frac{LS[\text{cont}](b - a) + b + a}{2} \\ A[i, j] = \sum_{j=1}^N w_j \left[\frac{h}{S[\text{cont}]} \left(1 - \frac{h}{S[\text{cont}]} \sigma \right)^L \right] \\ \text{Fin cont} \\ \text{Fin j} \\ \text{Fin i} \right\} \text{Ecuación (3.2)}$$

Paso 4:

Se multiplica la matriz $A[i, j]$ por el vector fuente $q(j)$.

Paso 5:

Se imprimen los datos del flujo escalar de neutrones $\phi(j)$.

FIN

4.8.2.1 Error del método de Euler Mejorado.

Evaluando al algoritmo de Euler Mejorado con los datos de entrada de la sección 4.6, se obtuvieron los siguientes resultados.

$$\phi = 0.1867 \left(\frac{\text{Neutrones}}{\text{cm}^2} \right), \text{ en el centro de la barra.}$$

$$\phi = 0.1396 \left(\frac{\text{Neutrones}}{\text{cm}^2} \right), \text{ en el extremo de la barra.}$$

A continuación se describirán los pasos, para obtener el error del método, con una partición de $M = 170$.

Los datos obtenidos con el método de las Ordenadas Discretas son:

$$\phi = 0.1863 \left(\frac{\text{Neutrones}}{\text{cm}^2} \right), \text{ en el centro de la barra de combustible}$$

$$\phi = 0.1394 \left(\frac{\text{Neutrones}}{\text{cm}^2} \right), \text{ en el extremo de la barra de combustible}$$

Aplicando el error relativo se tiene.

$$\text{error } R = \frac{0.1863 - 0.1867}{0.1863} = -0.002147, \text{ en el centro de la barra}$$

$$\text{error } R = \frac{0.1394 - 0.1396}{0.1394} = -0.001434, \text{ en el extremo de la barra}$$

Sumando los dos errores y dividiendo para dos, además de obtener el valor absoluto de la división y multiplicarlo por 100, se obtiene el error total del método.

$$\text{error Total} = \text{abs} \left| \frac{-0.002147 - 0.001434}{2} \right| * 100 = 0.1651\%$$

De esta forma se obtiene el error total en porcentaje del método numérico, este procedimiento será utilizado para los demás métodos. A continuación se observa el resultado de la simulación, con el error del método de Euler Mejorado.

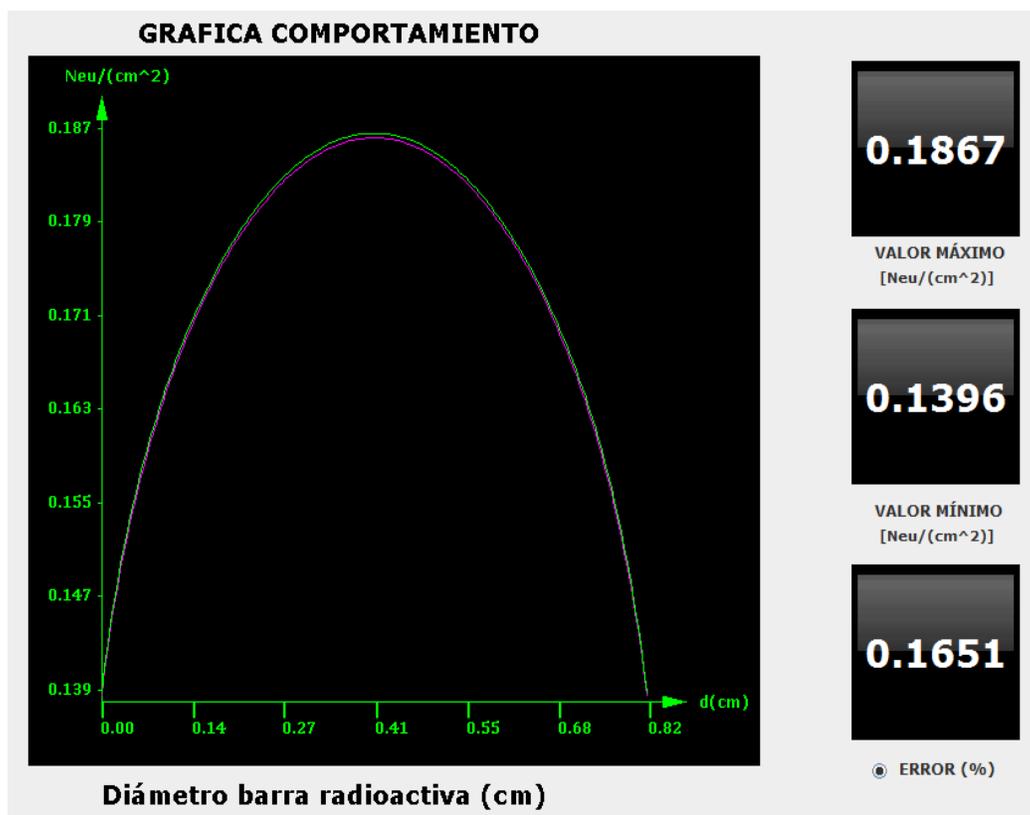


Figura 4. 11: Simulación del método de Euler Mejorado con una partición de $M = 170$.

Fuente: El Autor.

En la figura, se observa gráficamente el error del método, la curva de color verde representa la solución del método de Euler Mejorado y la curva en magenta, corresponde a la solución del método de las O. Discretas.

Al elevar el número de particiones, se determinó, que el método alcanza los valores del flujo de neutrones, correspondientes al método de O. Discretas, con una partición de $M = 980$, su resultado fue el siguiente.

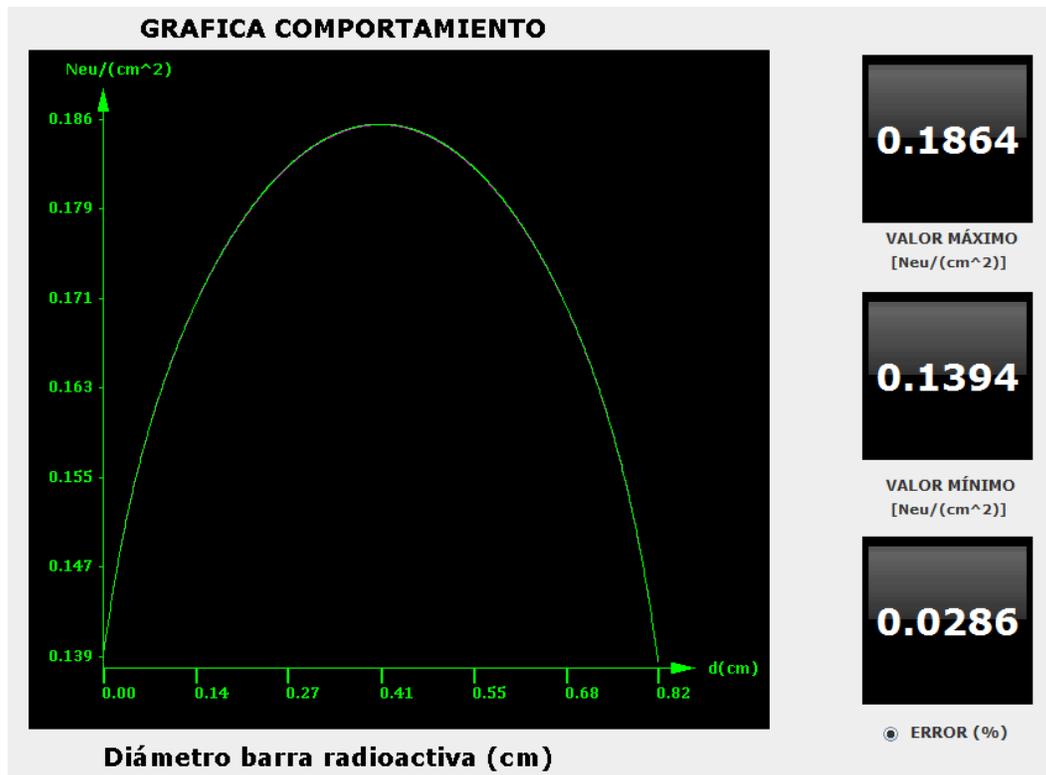


Figura 4. 12: Simulación del método de Euler Mejorado con una partición de $M = 980$.

Fuente: El Autor.

Se determina que el método de Euler Mejorado, converge a la solución, con un error muy bajo, al ser evaluado con 980 particiones. Lo cual afirma la característica del método, ya que mientras más iteraciones realice, mayor es su exactitud.

4.8.3 EVALUACIÓN DEL MÉTODO DE LOS RESIDUOS PONDERADOS (GALERKIN).

Partiendo de la solución numérica de la ecuación (3. 36), se desarrolló el algoritmo correspondiente al método de Galerkin, el cual se presenta a continuación.

ALGORITMO MÉTODO DE LOS RESIDUOS PONDERADOS (GALERKIN):

INICIO

Paso 1:

Ingreso de los parámetros y de la señal de la fuente.

- M Número de particiones.
- σ Sección eficaz microscópica de absorción.
- N Número de raíces del polinomio de Legendre.
- d Diámetro de la barra de combustible.
- q Valor de fuente.

Paso 2:

Se calcula $h = \frac{1}{M}$, el vector de raíces y de pesos de Legendre, LS[N] y LP[N], respectivamente.

Paso 3:

Se calcula la solución de la **Ecuación (3. 35)**, cuando los neutrones tienen dirección $\mu > 0$, mediante la **Ecuación (3. 2)**.

int j=0;

tempSol[j]=0;

 j=1;

For i=1; i = 2; i ++

$$S[j] = \frac{LS[j](b - a) + b + a}{2}$$

$$A[j] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i * \left(\frac{36 d^2 q (5u + 2d\sigma)}{3d^4 s g^2 + 12d^3 \sigma u + 20d^2 u^2} - \frac{20d^3 q (8u + 3d\sigma)}{3d^5 \sigma^2 + 12d^4 \sigma u + 20d^3 u^2} \right)$$

Fin i

J =2;

For i=1; i = 2; i ++

$$S[j] = \frac{LS[j](b - a) + b + a}{2}$$

$$A[j] = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n w_i * \left(\frac{40 d^3 q (3u + 2d\sigma)}{3d^6 s g^2 + 12d^5 \sigma u + 20d^4 u^2} - \frac{30d^2 q (4u + 3d\sigma)}{3d^5 \sigma^2 + 12d^4 \sigma u + 20d^3 u^2} \right)$$

Fin i

Paso 5:

Se evalúa a la **Ecuación (3. 35)**, para cada valor de z.

J=0;

For z =0; i = d; i += h

$$\text{Solucion 1}[J] = A[1] z + A[2] z^2 \quad \text{Ecuación (3. 35)}$$

J=J+1;

Fin z

Paso 6:

Se suman ambas soluciones de las condiciones de frontera.

k=0

For i = 0; i < M; i ++

$$\text{solucionTotal}[k] = \text{Solucion 1}[i] + \text{Solucion 1}[m - i - 1]$$

k = k +1

Fin i

Paso 7:

Se imprimen los datos del flujo escalar de neutrones $\phi(k) = \text{solucionTotal}[k]$.

FIN

4.8.3.1 Error del método de los Residuos Ponderados (Galerkin)

Utilizando los mismos pasos que en el error del método de Euler Mejorado y de igual forma con los mismos datos de entrada, el método de Galerkin presenta el siguiente error.

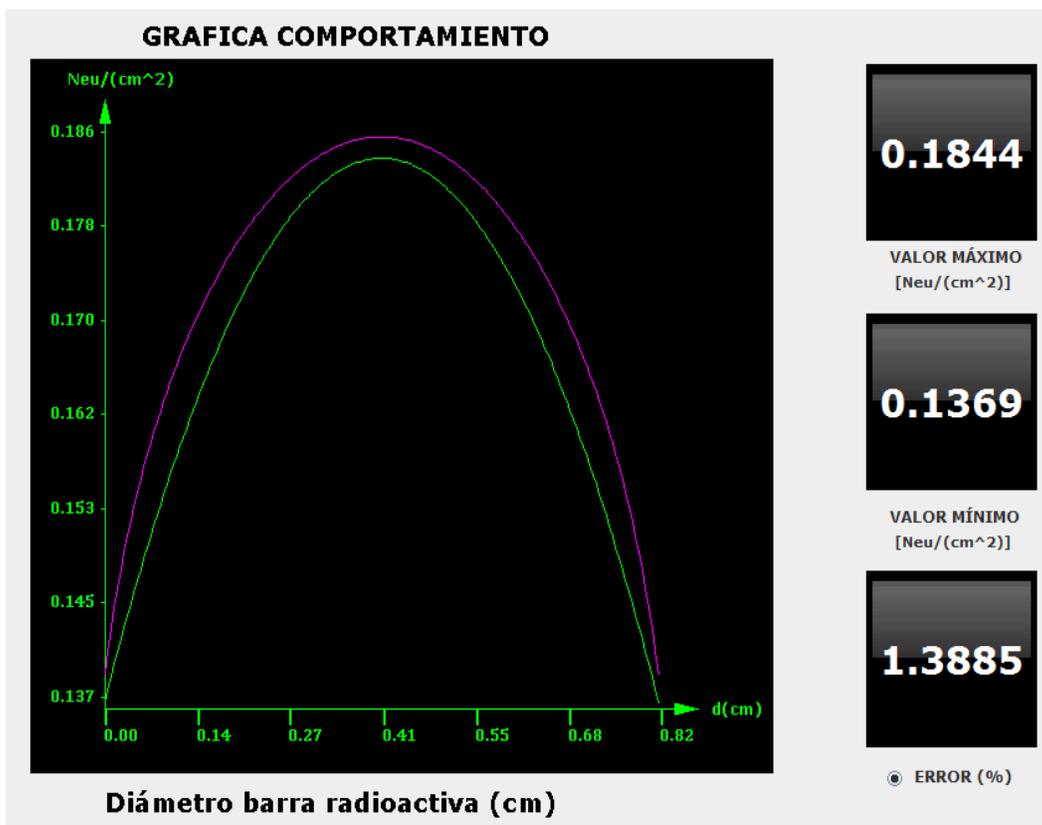


Figura 4. 13: Simulación del método de Galerkin, con una petición de 170.

Fuente: El Autor.

En la Figura 4.5, se puede ver de forma gráfica y numérica el error del método, que es más evidente, ya que es igual a 1.3885%. El método de Galerkin alcanza su mejor resultado al ser evaluado con $M = 250$, obteniendo un error igual a 1.3884%. Se determina que aun así aumentando el número de particiones, el método no presenta ninguna mejoría notable, la exactitud del método se elevará, si se discretiza al dominio en más particiones.

4.8.4 EVALUACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS CON 2 y 4 ELEMENTOS LINEALES.

El siguiente algoritmo obtiene la solución general del MEF con 2 y 4 elementos lineales.

En primera instancia el programa obtiene la solución en los nodos, aplicando el método de las Ordenadas Discretas (3. 2), posteriormente obtiene las soluciones correspondientes a las condiciones de frontera y por ultimo calcula la solución general sumando ambas respuestas con las ecuaciones (3. 55) y (3. 56). A continuación se describe el algoritmo.

ALGORITMO DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (2 y 4 EL):

INICIO

Paso 1:

Ingreso de los parámetros y de la señal de la fuente.

M Número de particiones.

σ Sección eficaz microscópica de absorción.

N Número de raíces del polinomio de Legendre.

d Diámetro de la barra de combustible.

q Valor de fuente.

Paso 2:

Se calcula el vector de raíces y de pesos de Legendre, LS[N] y LP[N], respectivamente.

Paso 3:

Se calcula la primera solución cuando los neutrones tienen dirección $\mu > 0$, dependiendo de la elección del usuario del número de elementos (2 o 4). Las funciones integradas corresponden a las soluciones del sistema de ecuaciones de la matriz de rigidez y del vector de carga.

If (M=2)

For i=1; i = 2; i ++

$$S[i] = \frac{LS[i](b - a) + b + a}{2}$$

$$x_1 = \sum_{j=1}^N w_j \left[9 \frac{q(z)(\sigma * d^2 + 2 S[i] d)}{7d^2\sigma^2 + 24 d \sigma S[i] + 36 S[i]^2} \right]$$

Fin i

For i=1; i = 2; i ++

$$S[i] = \frac{LS[i](b - a) + b + a}{2}$$

$$x_2 = \sum_{j=1}^N w_j \left[6 \frac{q(z) d (6 S[i] + d \sigma)}{7d^2\sigma^2 + 24 d \sigma S[i] + 36 S[i]^2} \right]$$

Fin i

If (M=4)

For i=1; i = 2; i ++

$$S[cont] = \frac{LS[cont](b - a) + b + a}{2}$$

$$x_1 = \sum_{j=1}^N w_j [\psi_1^+]$$

Fin i

For i=1; i = 2; i ++

$$S[cont] = \frac{LS[cont](b - a) + b + a}{2}$$

$$x_2 = \sum_{j=1}^N w_j [\psi_2^+]$$

Fin i

For i=1; i = 2; i ++

$$S[cont] = \frac{LS[cont](b - a) + b + a}{2}$$

$$x_3 = \sum_{j=1}^N w_j [\psi_3^+]$$

Fin i

For i=1; i = 2; i ++

$$S[cont] = \frac{LS[cont](b - a) + b + a}{2}$$

$$x_4 = \sum_{j=1}^N w_j [\psi_4^+]$$

Fin i

Paso 4:

Se suman ambas soluciones de las condiciones de frontera.

k=0

For i = 0; i < M; i ++

$$solTotal[k] = x[i] + x[m - i - 1]$$

k = k + 1

Fin i

Paso 5:

Se imprimen los datos del flujo escalar de neutrones $\phi(k) = solTotal[k]$.

FIN

4.8.4.1 Error del método de los Elementos Finitos con 2 y 4 elementos lineales.

Debido a que el software solo puede evaluar al MEF con 2 y 4 elementos, se utilizará el valor de $M = 4$, ya que presenta el menor error y su comportamiento se visualiza de mejor forma en la simulación; los demás datos de entrada serán los mismos especificados en la sección 4.6. De igual manera, para calcular su error, los pasos son los descritos en el método de Euler Mejorado. El MEF presenta el siguiente comportamiento y error.

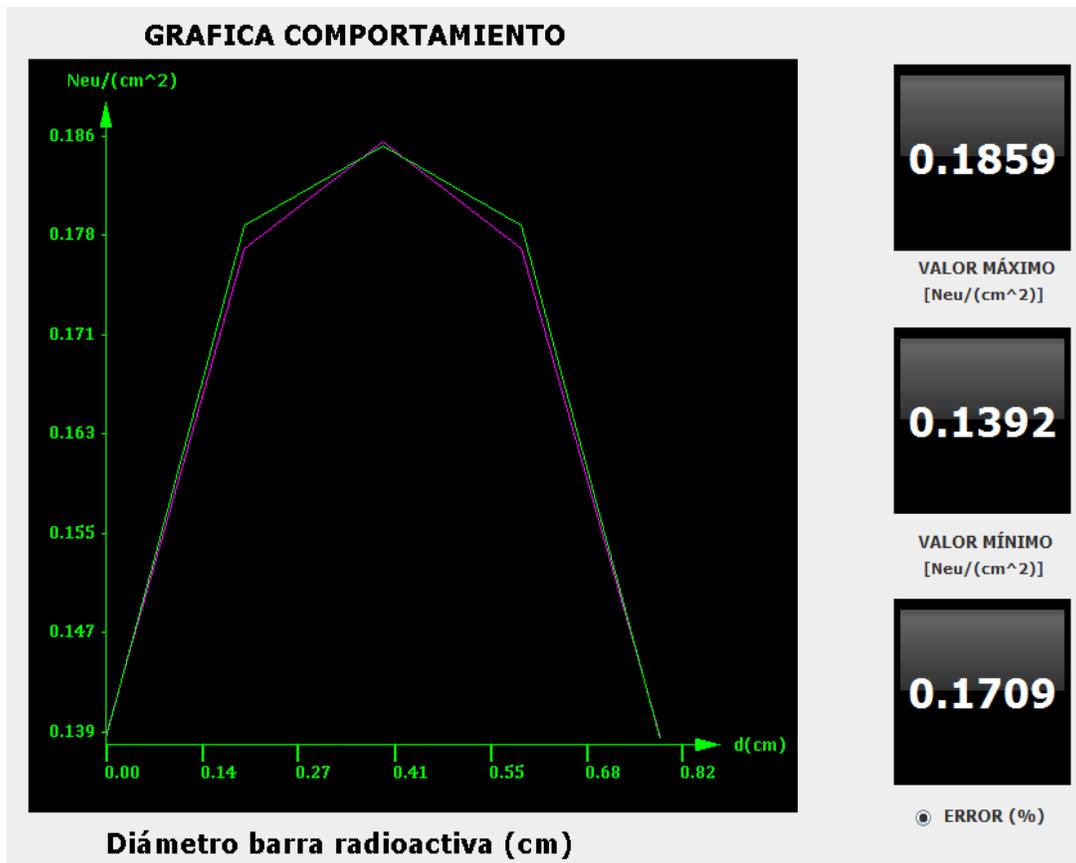


Figura 4. 14: Simulación del MEF, evaluado con 4 elementos lineales.

Fuente: El Autor.

El error del MEF, es mucho menor que el error del Método de los Residuos Ponderados (Galerkin), pero es mayor que el error de Euler Mejorado, a pesar de esta aclaración, su comportamiento es muy bueno.

4.8.5 EVALUACIÓN DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS CON 4 ELEMENTOS CUADRÁTICOS.

El algoritmo que se describe a continuación, obtiene la solución del MEF con 4 elementos cuadráticos en todo el diámetro de la barra radiactiva.

El programa primero captura los datos de entrada y calcula la solución en los nodos mediante el método de las Ordenadas Discretas (ecuación (3.2)), para la primera condición de frontera. Posteriormente obtiene la solución en cada elemento finito con las funciones de interpolación, mediante la ecuación (3.65) y

concatena todos los resultados en un solo vector. Finalmente obtiene la solución total sumando los mismos elementos del vector, pero con orden opuesto, lo cual es la suma de las dos solución de las condiciones de frontera (ecuación (3. 67)).

ALGORITMO DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS (4EC):

INICIO

Paso 1:

Ingreso de los parámetros y de la señal de la fuente.

- M Número de particiones.
- σ Sección eficaz microscópica de absorción.
- N Número de raíces del polinomio de Legendre.
- d Diámetro de la barra de combustible.
- q Valor de fuente.

Paso 2:

Se calcula el vector de raíces LS[N] y de pesos LP[N] de los polinomios de Legendre.

Paso 3:

J=1;

Se calcula la solución de la **Ecuación (3. 61)**, mediante la **Ecuación (3. 2)**.

For i =1; i = 2; i ++

$$S[cont] = \frac{LS[cont](b - a) + b + a}{2}$$

$$\phi(J) = \sum_{j=1}^N w_j [\psi_1^+]$$

Fin i

J=2;

For i =1; i = 2; i ++

$$S[cont] = \frac{LS[cont](b - a) + b + a}{2}$$

$$\phi(J) = \sum_{j=1}^N w_j [\psi_2^+]$$

Fin i

$J=3;$

For $i=1; i = 2; i ++$

$$S[cont] = \frac{LS[cont](b - a) + b + a}{2}$$

$$\phi(J) = \sum_{j=1}^N w_j [\psi_3^+]$$

Fin i

$J=4;$

For $i=1; i = 2; i ++$

$$S[cont] = \frac{LS[cont](b - a) + b + a}{2}$$

$$\phi(J) = \sum_{j=1}^N w_j [\psi_4^+]$$

Fin i

$J=5;$

For $i=1; i = 2; i ++$

$$S[cont] = \frac{LS[cont](b - a) + b + a}{2}$$

$$\phi(J) = \sum_{j=1}^N w_j [\psi_4^+]$$

Fin i

$J=6;$

For $i=1; i = 2; i ++$

$$S[cont] = \frac{LS[cont](b - a) + b + a}{2}$$

$$\phi(J) = \sum_{j=1}^N w_j [\psi_4^+]$$

Fin i

$J=7;$

For $i=1; i=2; i++$

$$S[cont] = \frac{LS[cont](b-a) + b + a}{2}$$

$$\phi(J) = \sum_{j=1}^N w_j [\psi_4^+]$$

Fin i

$J=8;$

For $i=1; i=2; i++$

$$S[cont] = \frac{LS[cont](b-a) + b + a}{2}$$

$$\phi(J) = \sum_{j=1}^N w_j [\psi_4^+]$$

Fin i

$J=9;$

For $i=1; i=2; i++$

$$S[cont] = \frac{LS[cont](b-a) + b + a}{2}$$

$$\phi(J) = \sum_{j=1}^N w_j [\psi_4^+]$$

Fin i

Paso 4:

Calcula la solución en cada elemento, mediante las funciones de interpolación de la **Ecuación (3.65)**.

$$\phi^+(z) = \begin{cases} \phi_1^+ F_1 + \phi_2^+ F_2 + \phi_3^+ F_3, & 0 \geq z \leq \frac{d}{4} \\ \phi_3^+ F_1 + \phi_4^+ F_2 + \phi_5^+ F_3, & \frac{d}{4} > z \leq \frac{d}{2} \\ \phi_5^+ F_1 + \phi_6^+ F_2 + \phi_7^+ F_3, & \frac{d}{2} > z \leq \frac{3d}{4} \\ \phi_7^+ F_1 + \phi_8^+ F_2 + \phi_9^+ F_3, & \frac{3d}{4} > z \leq d \end{cases}$$

Paso 5:

Se obtiene la solución total sumando los mismos elementos del vector, pero con orden opuesto.

k=0

For i = 0; i < M; i ++

$$\text{Solucion}[k] = \phi[i] + \phi[m - i - 1]$$

k = k + 1

Fin i

Paso 5:

Se imprimen los datos del flujo escalar de neutrones $\phi(k)$.

FIN

4.8.4.1 Error del método de los Elementos Finitos con 4 elementos cuadráticos.

El esquema del MEF con 4 elementos cuadráticos, calcula el flujo escalar de neutrones, interpolando de forma cuadrada los valores que se encuentran entre los nodos de cada elemento, ya que se está utilizando cuatro elementos cuadráticos para su discretización, el número de nodos globales será igual a 9. Para visualizar de mejor forma los resultados, se evaluará al método en $M = 65$ puntos, lo que permitirá observar una curvatura suave en todo el dominio.

Su comportamiento y error se presentan a continuación.

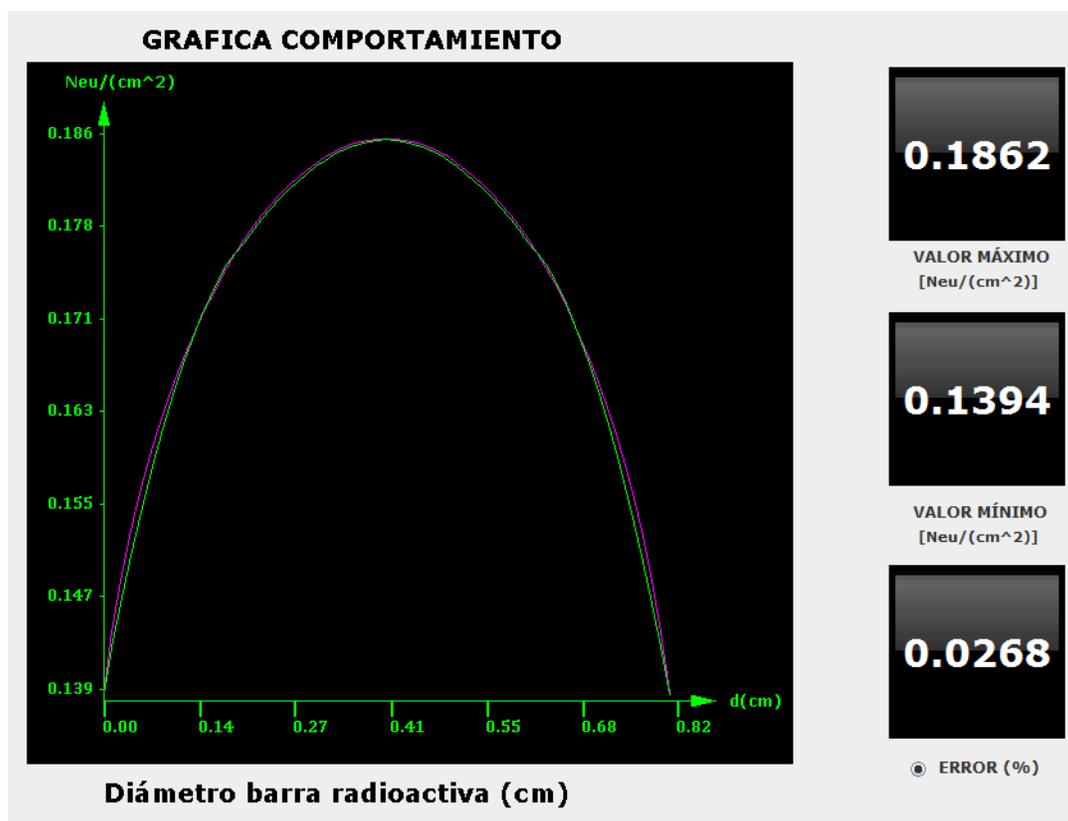


Figura 4. 15: Simulación del MEF, evaluado con 4 elementos cuadráticos.

Fuente: El Autor.

Como se puede observar el MEF con 4 elementos cuadráticos, presenta un error igual a 0.0268 %, lo cual lo hace el más exacto de todos los métodos numéricos aplicados en el presente proyecto.

4.9 RESULTADOS.

Como se describió en la sección 4.3.2, el comportamiento de los neutrones es el mismo, sin importar el material utilizado o la fuente de neutrones, el flujo escalar siempre se comporta como una función Seno de $[0, \pi]$. Alcanzando su máximo valor en el centro de la barra de combustible y su menor valor en los extremos.

La interpretación física del fenómeno de la fisión nuclear, en un material homogéneo, de geometría cilíndrica, es que; la concentración de neutrones es mayor en el centro de la barra radiactiva y menor en sus extremos, una vez que se ha iniciado la reacción en cadena.

Después de evaluar a cada uno de los métodos numéricos con los mismos parámetros y datos de entrada, se determinó que existen dos métodos que convergen de forma óptima a la solución, estos son: el método de los Elementos Finitos con 4 elementos cuadráticos, presentando un error de 0.0268%, y el método de Euler Mejorado, presentando un error de 0.0284 %, con un número de particiones igual a 980. El error presentado por ambos métodos es muy bajo, considerando el número de elementos y de particiones tomadas, que es muy bajo, en comparación a las cantidades que se manejan en otros productos de simulación.

El éxito del método numérico de Euler Mejorado radica en la optimización de las operaciones que se realizaron en el capítulo 3, permitiéndole al algoritmo realizar pocos cálculos y con esto, haciendo que el error se propague en menor nivel. Además la preservación de la simetría y la posibilidad de evaluar al método con un número de particiones mayor que los demás métodos, sin variar mucho el tiempo de cálculo, hace que el método de Euler Mejorado, sea una buena opción en la discretización de la variable espacial, en la ecuación de transporte de neutrones unidimensional.

El método numérico más eficiente en la discretización de la variable espacial de la ecuación lineal de Boltzmann unidimensional, es el Método de los Elementos Finitos, su error es el más bajo 0.0268 % y su tiempo de cálculo es imperceptible, además sin importar el número de nodos en el cual se lo evalúe, su error y su tiempo de cálculo no variarán.

La eficacia del MEF no solo se puede observar en problemas de transporte, el método es mundialmente utilizado en diversos campos de la ingeniería y la de la ciencia, por lo su exactitud, versatilidad y por presentar pocas restricciones.

Uno de los objetivos secundarios del presente proyecto es proporcionar al lector destrezas matemáticas en la aplicación de los métodos numéricos, con la finalidad de despertar el interés necesario para dar continuidad a futuras investigaciones, relacionadas en el campo de la energía nuclear y del análisis numérico.

CAPÍTULO 5

ANÁLISIS ENERGÉTICO EN LA VARILLA DE COMBUSTIBLE

Con la información fundamental del flujo escalar de neutrones, en el presente capítulo se determinará la tasa de generación volumétrica de energía que se produce en el material radiactivo, posteriormente se realizará un análisis de la transferencia de calor en estado estable, sobre todos los componentes de la varilla de combustible, para así obtener las temperaturas en cada uno de los elementos que lo conforman. Se asumirán distintos escenarios que describan procesos o características que faciliten el cálculo, pero que permitan obtener datos precisos de las temperaturas, también se estudiarán las propiedades físicas de los materiales que conforman cada componente de la estructura de la varilla de combustible, para así determinar sus rangos de operación.

Para realizar el perfil de temperaturas en la varilla de combustible, se tomarán en cuenta los siguientes aspectos: el diseño, funcionamiento y las características de un reactor nuclear tipo PWR (AP1000). La información obtenida del estudio del reactor, permitirá realizar el diseño del software de simulación con datos reales, además se evaluará el modelo energético y se obtendrán los resultados del software de forma gráfica, finalmente se interpretarán los datos obtenidos y se plantearán conclusiones con respecto al modelo energético.

5.1 IMPORTANCIA

Cada componente que conforma un reactor nuclear, está expuesto a una continua radiación, en mayor grado la varilla de combustible, al formar parte del primer recubrimiento de las pastillas de material radiactivo, recibe mayor cantidad de radiación, consecuentemente una descripción de la distribución de temperaturas

en los componentes del elemento, es esencial para determinar el tiempo de vida útil de estos elementos.

Para determinar posibles deformaciones plásticas en los elementos de la varilla de combustible, es importante obtener las temperaturas que presentan, ya que los niveles de esfuerzos provocados por la energía térmica, dependen del gradiente de temperaturas que se produce en los materiales.

La temperatura en el material radiactivo, depende principalmente de tres factores: la tasa de generación de energía del material, sus propiedades físicas y la temperatura de los elementos adyacentes a él. Para determinar la tasa de generación de energía producida por el material radiactivo, es importante conocer sus propiedades físicas. A continuación se presentan las propiedades del uranio y su compuesto, el dióxido de uranio, este último se utiliza como combustible principal en la mayoría de los reactores nucleares tipo PWR.

5.2 PROPIEDADES FÍSICAS DEL COMBUSTIBLE (UO₂)

La tolerancia a la irradiación, un alto punto de fusión y sus características químicas, han hecho que el dióxido de uranio sea el material más eficiente, utilizado como combustible en los reactores nucleares refrigerados por agua liviana o Light Water Reactor por sus siglas en inglés (LWR).

Existe otro combustible que también es utilizado en los reactores LWR, que es el Mixed Oxide Fuel (MOX), que como su nombre lo indica son mezclas de óxidos y materiales radiactivos como el uranio y el plutonio. Las mezclas más utilizadas son PuO₂ o una solución de (U, Pu) O₂.

Por las características planteadas anteriormente del dióxido de uranio, y debido a que el uranio tiene una mayor tasa de fisión que el plutonio (aproximadamente el 84% de neutrones térmicos absorbidos por el U 235, producen fisión, mientras que el 72% de estos neutrones absorbidos por el Pu 239 son efectivos respecto a este

proceso (Glasstone & Sesonske, SECCIONES EFICACES DE FISION, 1984)³³, los datos que se utilizarán para el cálculo de la distribución de temperaturas y la tasa de generación de energía, serán los del combustible del Dióxido de Uranio. Además se podrá comparar los datos obtenidos en el software de simulación, con datos de reactores PWR, que funcionan con este combustible.

Una propiedad muy importante al momento de dimensionar los rangos de operación del reactor nuclear y por ende del elemento combustible, es el punto de fusión, que para el dióxido de uranio es aproximadamente 2840 °C, pero, como valor máximo para el control del reactor nuclear, se lo considera como 2640 °C, esta propiedad y otras esenciales que se utilizarán en posteriores cálculos, están detalladas en la siguiente tabla:

³³ Glasstone, S., & Sesonske, A. (1984). SECCIONES EFICACES DE FISION. En S. Glasstone, & A. Sesonske, *Ingeniería de reactores nucleares* (pág. 96). Reverte.

Tabla 5. 1: Propiedades físicas del Dióxido de Uranio.

Propiedades	Valor	Unidades
Punto de Fusión:	2840	K
Punto de fusión, valor para diseño.	2640	K
Conductividad Térmica:	2.7	$\left[\frac{W}{m K}\right]$
Emisividad:	0.85	
Sección eficaz microscópica de absorción.	0.3264	Barns
Sección eficaz microscópica de fisión:	0.0816	Barns
Número Atómico:	92	
Calor específico:	410	$\left[\frac{J}{kg ^\circ C}\right]$
Masa en el elemento combustible	1.7477	Kg

Fuente: Nuclear Systems, pag (433- 435) y Los Alamos B test.

5.3 GENERACIÓN DE ENERGÍA TÉRMICA EN EL COMBUSTIBLE

El Dióxido de Uranio es el material más eficiente en la producción de energía en reactores nucleares en la actualidad, es por sus características físicas y químicas, detalladas anteriormente que en los diseños de reactores nucleares modernos, se utiliza como material de combustible. Por todos estos antecedentes el material utilizado en los cálculos del software de simulación, será el dióxido de uranio, que conjuntamente con los datos de sus propiedades físicas y químicas, además de la información esencial obtenida en el capítulo 3 del flujo escalar de neutrones,

permitirá conseguir la energía que se produce en el material radiactivo, producto de la fisión nuclear.

Las pastillas de dióxido de uranio son homogéneas en su estructura, cada una de sus partículas interacciona por igual con sus vecinas adyacentes, por consiguiente la energía interna del núcleo es proporcional al número másico y de la misma forma a su volumen nuclear.

Como se detalló anteriormente en la sección 2.1.2, el proceso de fisión ocurrirá cuando un núcleo sea excitado por absorción neutrónica y la energía superficial, exceda su energía de volumen o energía interna, en este punto el núcleo alcanzará el punto de energía crítica de fisión y se dividirá en dos átomos más pequeños e independientes, que poseen la misma rapidez, pero direcciones opuestas, liberando grandes cantidades de energía y productos de fisión.

Debido a las características del material radiactivo y al proceso de fisión, la energía producida por el combustible, será dependiente del volumen radiactivo, de la sección eficaz de fisión y del flujo escalar de neutrones. Para establecer la velocidad de la reacción, se plantea:

$$\Sigma_f = N \sigma_f$$

$$\text{Velocidad de fisión} = \Sigma_f \phi$$

Donde N es el número de núcleos físisles por cm^3 y por *segundo*, ϕ es el flujo escalar de neutrones y σ_f es la sección eficaz microscópica de fisión.

Ahora bien, en un reactor de volumen V , se producirán $V \Sigma_f \phi$ fisiones por segundo; ya que se necesita una velocidad de fisión de $3.1 * 10^{10} [\frac{fis}{s}]$, para producir 1 W de potencia, se puede describir a esta magnitud, en un reactor nuclear como:

$$P = c R_f$$

Donde c , es una constante de proporcionalidad y R_f es la tasa de fisiones del material:

$$c = \frac{1 W}{3.1 * 10^{10} \left[\frac{fis}{s} \right]}$$

$$R_f = \sum_f \phi V_R$$

La magnitud de \sum_f es la sección eficaz macroscópica de fisión, ϕ es el flujo escalar de neutrones y V_R es el volumen del material. Reemplazando estos valores en la potencia generada y reemplazando a la sección eficaz de fisión por su sección eficaz microscópica, resulta:

$$P = \frac{\sigma_f \phi N V_R}{3.1 * 10^{10}} [W] \quad (5.1)$$

Un concepto importante para reducir la ecuación de generación de energía y escribirla en parámetros que se utilizarán como datos de entrada del software de simulación, es el número total de núcleos físisles, que se representa como:

$$NF = N V_R \quad (5.2)$$

Otro concepto importante es la masa de material físil, representada por:

$$g = \frac{\text{masa atómica } N V_R}{\text{Número de abogadro}}$$

Que para el Uranio 235 resulta:

$$g = \frac{235 N V_R}{0.602 * 10^{24}} \quad (5.3)$$

Reemplazando estos dos valores en la ecuación de potencia generada y reduciendo términos semejantes, se obtiene (Glasstone & Sesonske, VELOCIDAD DE FISIÓN Y POTENCIA DE UN REACTOR, 1984)³⁴.

³⁴ Glasstone, S., & Sesonske, A. (1984). VELOCIDAD DE FISION Y POTENCIA DE UN REACTOR. En S. Glasstone, & A. Sesonske, *Ingeniería de reactores nucleares* (págs. 95-97). Barcelona: Reverte.

$$q = 8.3 * 10^{10} \left(\frac{235 m}{A} \right) \sigma_f \phi \quad (5.4)$$

Dónde:

- q Potencia generada. [W]
- m Masa del dióxido de uranio en la varilla de combustible. [g]
- A Número atómico del Uranio.
- σ_f Sección eficaz microscópica de fisión. [barn]
- ϕ Flujo escalar de neutrones. $\left[\frac{\text{neutrones}}{\text{cm}^2 \text{ s}} \right]$

5.4 MODELO DE LA SIMETRÍA PARA LA DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS

Para poder plantear una simetría en todo el elemento combustible del reactor, es necesario describir tres casos en los cuales la distribución de temperaturas no es simétrica:

- Generación de calor no uniforme, debido a la absorción de flujo incidente de rayos gama.
- Geometrías asimétricas de las regiones que rodean el combustible (posible en reactores de investigación).
- Temperaturas distintas del refrigerante alrededor de la vaina de recubrimiento.

Estos tres casos son particulares y aislados a las operaciones normales que se originan en el elemento combustible de reactores LWR, por este motivo no se las consideran como posibles y se las puede despreciar.

Por su fabricación bajo estándares y normas internacionales las pastillas de combustible son homogéneas y de formas simétricas; al ser ensambladas en la varilla de combustible, los componentes que la rodean, de igual forma son

equidistantes en todo el elemento. En la fisión nuclear la energía medida en un extremo de la barra, es igual que la energía en su extremo opuesto y si la temperatura del agua es la misma para todo el recubrimiento de la vaina, entonces se puede tomar como el centro de la barra de combustible al eje de simetría y desarrollar un modelo para la mitad del elemento, los datos obtenidos en la mitad aplicada, se deben reflejar para su contraparte simétrica. De esta forma se desarrollará la distribución de temperaturas de los componentes de la varilla de combustible y su diagrama está representado en la Figura 5. 1.

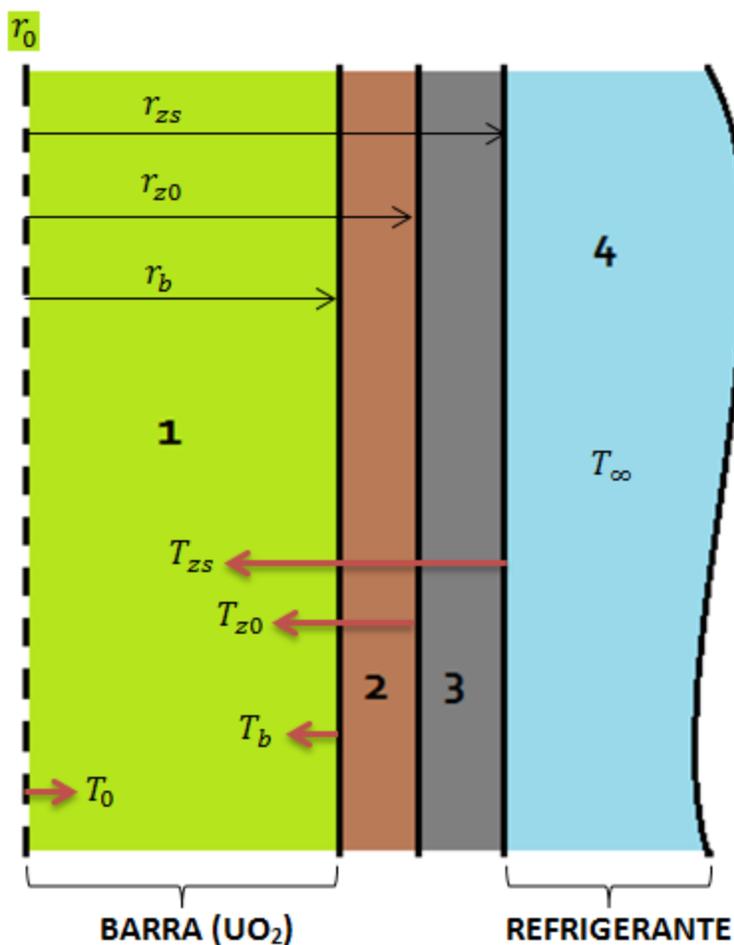


Figura 5. 1: Zonas y elementos de la parte simétrica de la varilla de combustible.

Fuente: El Autor.

Donde:

$1 = r_b - r_0 =$ Zona 1: Distancia comprendida entre el centro de la barra de combustible UO_2 y su extremo.

$2 = r_{z0} - r_b =$ Zona 2: Distancia comprendida entre el recubrimiento de Zirlo y la barra de combustible.

$3 = r_{zs} - r_{z0} =$ Zona 3: Distancia comprendida entre el radio externo del recubrimiento y su radio interno.

4= Zona 4: Espacio que ocupa el refrigerante.

Con el diagrama descrito, se dará solución a cada una de las ecuaciones que describen el intercambio de energía térmica en cada zona y así obtener las temperaturas en cada punto de la varilla de combustible. Con esta información se determinarán los rangos de operación, conjuntamente con las propiedades de los materiales utilizados, además se desarrollarán los algoritmos computacionales, para su representación en el software de simulación.

5.4.1 DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS EN LA ZONA 1

5.4.1.1 Conductividad Térmica

En un material que es homogéneo en su estructura e isotrópico con respecto a la conducción de calor, se puede aproximar su conductividad térmica como un valor escalar, dependiente de la presión y de la temperatura, ya que el efecto de la presión es despreciable en los sólidos, esta magnitud dependerá solamente de la temperatura. En el caso de los materiales de combustible nuclear, la conductividad térmica también depende de la irradiación, que es producto de los cambios que experimenta el material en su composición química y física.

La dificultad de presentar una solución analítica a la ecuación general de conducción de calor, debido a su no linealidad, permitió el desarrollo de numerosas ecuaciones empíricas, obtenidas a través de datos experimentales,

que se ajustan de buena forma a los valores de la conductividad térmica del dióxido de uranio, en distintos rangos de temperatura.

Una de las propiedades físicas que cambian cuando se origina el proceso de fisión es la porosidad, presentándose pequeños espacios intermoleculares y afectando de igual forma a la conductividad térmica del material.

Pero existe otro factor que interviene en la conductividad térmica de los materiales radiactivos, que es el quemado (se denomina "quemado del combustible" al porcentaje de átomos iniciales que han fisionado). A pesar de que la tasa de quemado no supera el 5% en reactores LWR, la irradiación del material genera cambios en su porosidad y composición, de igual forma se desarrolló una ecuación empírica que toma en cuenta los factores de porosidad y quemado para calcular la conductividad en función de la temperatura del dióxido de uranio, la ecuación (Bernard, Jacoud, & Vesco, 2002)³⁵ se describe a continuación:

$$K_b = \frac{1}{0.1148 + (0.0035 * 0.187) + (2.475 * 10^{-4} * ((1 - 0.0033 * 0.187)T) * e^{0.001883T}} + 0.0132$$

Dónde:

K_b Conductividad térmica de la barra de combustible (UO_2) [$\frac{W}{mK}$]

T Temperatura [$^{\circ}C$]

Una característica muy importante es el punto de fusión del Dióxido de Uranio, el proceso en el que los óxidos se funden, comienza a temperaturas de estado sólido, pero se complementa a temperaturas elevadas llamadas *Punto líquido*. El punto de fusión del UO_2 es aproximadamente $2840^{\circ}C$, pero para reactores LWR, se utiliza como parámetro de diseño un valor más conservador de $2640^{\circ}C$ (Tabla 5. 1), este valor será el utilizado en los cálculos del perfil de temperaturas.

³⁵ Bernard, L. C., Jacoud, J. L., & Vesco, P. J. (2002). *Nuclear Materials*.

5.4.1.2 Ecuación general de conducción con generación de energía térmica en geometrías radiales

En el sistema térmico de la Figura 5. 1, se genera energía interna por el fenómeno de la fisión nuclear (únicamente en la barra de combustible UO_2), en esta sección se describirá matemáticamente la distribución de temperaturas, mediante la conducción térmica, tomando en cuenta la generación de energía interna en la barra de combustible.

Si el flujo de neutrones es uniforme en el confinamiento de la barra de UO_2 , entonces como lo determina la ecuación (5. 4), la tasa de generación de energía será uniforme también.

En cualquier barra de combustible, cuya relación largo-ancho es mayor a 10, se puede despreciar la tasa de generación de calor axial, ya que la diferencia de potencias y a la vez de temperaturas en la dirección radial ocurre en un espacio menor que en la dirección axial.

Desde el punto medio axial se puede analizar a la ecuación general de la conducción de calor, en una dimensión, tomando en cuenta una geometría radial, así la ecuación general de la conducción es:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(kr \frac{dT}{dr} \right) + q''' = 0$$

Dónde:

r El radio del sistema que se está analizando. [m]

T Temperatura. [K]

q''' Tasa de generación volumétrica. $\left[\frac{W}{m^3} \right]$

Si se integra una vez, se obtiene:

$$\left(kr \frac{dT}{dr} \right) + q''' \frac{r^2}{2} + C_1 = 0 \quad (5. 5)$$

Donde C_1 es la primera constante de integración. Al integrar de nuevo, resulta:

$$T(r) = -\frac{q'''}{4k}r^2 + C_1 \ln r + C_2 \quad (5.6)$$

Donde C_2 es la segunda constante de integración, la ecuación (5.6) (Incropera & P, 1999)³⁶, que es la ecuación general de la conducción y cuyas constantes de integración serán determinadas según las condiciones de borde de los distintos casos.

5.4.1.3 Aplicación

La energía térmica se genera en el centro de la barra radiactiva y se distribuye hacia sus bordes, es por esto que en la zona uno, el intercambio de calor se produce por conducción entre el centro de la barra y su extremo. Para determinar los valores de las constantes de integración de la ecuación de conducción de calor (5.6), se debe aplicar las condiciones de borde con estas características, al tomar el eje de simetría axial para r , se determina que $r_0 = 0$, se reemplaza esta condición en la ecuación (5.5), y se determina el valor de $C_1 = 0$. Tomando la ecuación (5.6), reemplazando $C_1 = 0$ y evaluando a la temperatura en su borde con $r = r_b$, se obtiene:

$$C_2 = T_b + \frac{q'''}{4k}r_b^2$$

Reemplazando las constantes de integración C_1 y C_2 , en la ecuación (5.6), se determina la distribución general de temperatura para cada r .

$$T(r) = \frac{q'''}{4k}r_b^2\left(1 - \frac{r^2}{r_b^2}\right) + T_b \quad (5.7)$$

Para obtener el valor de la temperatura del extremo de la barra de combustible, en función de la temperatura en su centro, se reemplaza $r = r_0$ en la ecuación (5.7) y se obtiene la ecuación de conducción para el primer escenario, que es la distribución de temperaturas en la zona uno del elemento.

³⁶ Incropera, F. P., & P, D. D. (1999). Sistemas Radiales. En F. P. Incropera, & D. D. P, *Fundamentos de Transferencia de Calor* (págs. 106-109). México: Prentice-Hall.

$$T_b = T_0 - \frac{q'''}{4k_b} r_b^2 \quad (5.8)$$

Dónde:

T_b Temperatura en el extremo de la barra radiactiva. [K]

T_0 Temperatura en el centro de la barra radiactiva. [K]

q''' Generación de energía volumétrica. [$\frac{W}{m^3}$]

k_b Conductividad térmica del dióxido de uranio. [$\frac{W}{mK}$]

r_b Radio de la barra de combustible. [m]

Con la generación de energía térmica, determinada en la sección 5.1.3, se puede reemplazar en la ecuación (5.8) y se obtendrá la diferencia de temperaturas en esta zona, pero no solo se necesita el valor de esta diferencia, es necesario determinar la temperatura del centro de la barra y la de su extremo, para así con esta información, continuar con las demás zonas y obtener las temperaturas de cada punto.

De la misma forma existen datos experimentales que han ayudado a determinar una expresión que permite determinar la temperatura del centro de la barra en función de la energía térmica que produce, esta es:

$$T_0 = 454.15 + q'k_t \quad (5.9)$$

Dónde:

T_0 Temperatura del centro de la barra de combustible. [K]

T_{amb} Temperatura del extremo de la barra de combustible. [K]

q' Generación de energía por unidad de longitud. [$\frac{W}{m}$]

k_t Constante de proporcionalidad. Para AP100 = 0.045028. [$\frac{K m}{W}$]

Reemplazando el valor de T_0 en la ecuación (5. 8), se obtendrá la temperatura en el borde de la barra de combustible, dato fundamental que permitirá obtener la temperatura de la zona 2.

5.4.2 DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS EN LA ZONA 2

Con la referencia en la Figura 5. 1, la distribución de temperaturas en este punto es entre el extremo o borde de la barra radiactiva y el huelgo de gas, que en un principio es Helio, pero que después del proceso de fisión, se generan otros gases como son, el Xenón y el Kriptón. Otro factor que interviene en la distribución de temperaturas en esta sección es la radiación, ya que el gas recibe directamente emisiones de la barra de combustible y del material del recubrimiento, el Zirlo.

5.4.2.1 Conductividad térmica del gas (Helio)

La conductividad térmica de una mezcla de gases está dada por la siguiente ecuación:

$$k_{gas} = k_1^{x_1} k_2^{x_2}$$

Donde x_1 y x_2 son las fracciones molares de los gases uno y dos respectivamente.

Una formula empírica, desarrollada por Von Ubisch (Tong & Weisman, 1996)³⁷, que describe la conductividad térmica de la mezcla de gases de Xenón (84.7%) y Kriptón (13.3%), bajo los rangos de temperatura de operación de un reactor LWR, se describe de la siguiente forma:

$$k = 0.453 * 10^{-5} T^{0.86}$$

Tomando como referencia esta ecuación, se desarrolló la conductividad térmica del Helio que está dada por:

$$k = 15.8 * 10^{-6} T^{0.79}$$

³⁷ Tong, L. S., & Weisman, J. (1996). *Thermal Analysis of Pressurized Water Reactors*. Taulor Francis.

Al evaluar la ecuación de conducción del Helio en los rangos de operación del reactor nuclear, se puede observar que la conductividad térmica del gas no varía de gran forma con la presión y así mismo en todo el rango de operación presenta un valor que se encuentra alrededor de $k_{gas} = 0.3 \frac{W}{m K}$, este valor será utilizado en el cálculo del perfil de temperaturas de la varilla de combustible.

Ya que la presión en el huelgo no cambia significativamente en los distintos escenarios de fisión y de operación del reactor, el gas se encuentra distribuido en el huelgo del recubrimiento a una presión constante, además no está en movimiento, por lo que es posible aproximar la distribución de temperaturas mediante conducción, pero para obtener datos más precisos de la temperatura en esta sección, se aplicará la ecuación de la conductancia en el huelgo de la varilla.

$$q'' = h_g(T_b - T_{z0}) \quad (5.10)$$

Donde h_g es el coeficiente de conducción, que depende de las propiedades del fluido, en este caso, como el gas recibe emisiones de radiación de la barra de combustible y del recubrimiento de Zirco, se ha desarrollado a este coeficiente, tomando en cuenta no sólo las características del fluido, sino también a la radiación que recibe (Todreas & Kazimi, Gas Conductance Models, 2011)³⁸. Así su valor se obtiene de la siguiente forma:

$$h_g = \frac{k_{gas}}{\delta_{ef}} + \frac{\sigma_{SB} T_b^3}{\frac{1}{\epsilon_b} + \frac{1}{\epsilon_z} - 1} \quad (5.11)$$

Dónde:

h_g Coeficiente de conducción del gas. $[\frac{W}{m^2 K}]$

k_{gas} Conductividad térmica del gas. $[\frac{W}{m K}]$

δ_{ef} Ancho efectivo del huelgo. $[m]$

³⁸ Todreas, N. E., & Kazimi, M. S. (2011). Gas Conductance Models. En N. E. Todreas, & M. S. Kazimi, *Nuclear Systems Volume I: Thermal Hydraulic Fundamentals* (págs. 418-419). Taylor & Francis.

T_b Temperatura en el extremo de la barra. [K]

ε_b Emisividad del dióxido de uranio. [SD]

ε_z Emisividad del Zirlo. [SD]

σ_{SB} Constante de Stefan-Boltzmann. [$\frac{W}{m^2 K^4}$]

El término δ_{ef} , representa la distancia efectiva del huelgo, que es mayor a la distancia normal del huelgo $\delta = r_{z0} - r_b$, debido a las discontinuidades de temperatura en la región comprendida entre el gas y el sólido de la barra. Además los valores de ε_b y ε_z , representan los valores de emisividad de radiación de la barra de combustible y del recubrimiento de Zirlo respectivamente. Una vez determinado la constante de la conductancia, se debe calcular la potencia generada en el extremo de la barra.

De la ecuación (5. 4), el flujo de calor se obtiene de forma muy precisa, evaluando la cantidad de energía que se genera pero en este caso en el extremo de la barra; así para r_b , se obtiene:

$$q_b = 8.3 * 10^{10} \left(\frac{235 m}{A} \right) \sigma_f \phi_b$$

Donde ϕ_b es el flujo de neutrones en el extremo de la barra y q_b la energía en ese punto. Con la cantidad de energía generada en r_b , se determina el flujo de calor de la siguiente forma:

$$q''_b = \frac{q_b}{2\pi r_b L} \quad (5. 12)$$

Remplazando a la ecuación (5. 12) y (5. 11) en (5. 10), se obtiene la ecuación de distribución de temperaturas en la segunda sección que es la temperatura en el gas, que a su vez será la temperatura de capa interna del Zirlo T_{z0} .

$$T_{z0} = T_b - \frac{q''_b}{h_g} \quad (5. 13)$$

Donde q''_b es el flujo de calor generado en r_b y h_g es la conductancia del gas.

5.4.3 DISTRIBUCIÓN DE TEMPERATURAS EN LA ZONA 3

5.4.3.1 Características del Zirlo

En esta zona la transferencia de calor se produce exclusivamente por conducción en el material del recubrimiento.

Desde 1990 aproximadamente el Zirlo ha remplazado al Zircaloy-4 como el material de recubrimiento de las pastillas de combustible, debido a las mejoras que presentan en las siguientes características: su conductividad térmica es mayor que la del Zircaloy-4, al igual que resistencia a la corrosión, además tiene una sección eficaz de absorción de neutrones térmicos muy baja, presenta una dureza elevada y es más dúctil.

El Zirlo es el nombre comercial de la aleación del Circonio, que proviene de las siglas en inglés “Zirconium Low Oxidation”, la mayoría de los reactores estadounidenses fabricados por la compañía Westinghouse, utilizan al Zirlo como su material de recubrimiento en elementos de combustible, debido a su alta resistencia a la corrosión.

Más del 95% en peso lo conforma el Circonio y con porcentajes de 1% en Nb y del 0.75% al 1% en Sn.

Debido a su gran aplicación en el área nuclear a inicios de los años 90's, el Zirlo ha recibido mucha atención en el estudio de sus propiedades físicas, obteniendo valores de su conductividad térmica a través de datos experimentales y desarrollo de ecuaciones empíricas que han tenido un buen resultado. De los datos obtenidos por Westinghouse (LLC, 2013)³⁹, se tomará a la conductividad térmica del Zirlo $k_z = 16 \left[\frac{W}{mK} \right]$, como el valor a utilizar en los cálculos de temperatura.

³⁹ LLC, W. E. (2013). IAEA. Recuperado el 3 de Febrero de 2014, de IAEA: http://www.iaea.org/OurWork/ST/NE/NEFW/Technical_Areas/NFC/documents/fuel-engineering/

5.4.3.2 Conducción térmica en el recubrimiento (Zirlo)

Ya que se genera energía térmica continuamente en la barra radiactiva, el modelo de conducción en el recubrimiento será desarrollado con generación de energía interna, cuyo valor se obtiene de la ecuación (5. 4). El calor virtual generado en el radio interior del Zirlo, se perderá en primera instancia por conducción a través del material del recubrimiento y por convección forzada en el radio externo por el refrigerante. Para obtener la disminución de temperatura por conducción, se aplica nuevamente la ecuación (5. 6), y se obtienen las constantes de integración, según las condiciones de frontera, en esta zona.

$$T(r) = -\frac{q'''}{4k}r^2 + C_1 \ln r + C_2$$

De la ecuación (5. 5) se obtiene el valor de C_1 , no existe tasa de cambio de temperatura, al estar evaluando a la ecuación en un punto fijo, así para r_{zs} , se tiene:

$$\left(r \frac{dT}{dr}\right) = -q_b''' \frac{r^2}{2k_z} + C_1$$

$$0 = -q_b''' \frac{r_{zs}^2}{2k_z} + C_1$$

$$q_b''' \frac{r_{zs}^2}{2k} = C_1$$

Reemplazo C_1 en (5. 6),

$$T(r) = -\frac{q_b'''}{4k_z}r^2 + \left(q_b''' \frac{r_{zs}^2}{2k_z}\right) \ln r + C_2 \quad (5. 14)$$

Ahora, para obtener C_2 , se analiza a la ecuación en el extremo r_{z0}

$$T(r_{z0}) = -\frac{q_b'''}{4k_z}r_{z0}^2 + \left(q_b''' \frac{r_{zs}^2}{2k_z}\right) \ln r + C_2$$

$$T(r_{z0}) + \frac{q_b'''}{4k_z}r_{z0}^2 - \left(q_b''' \frac{r_{zs}^2}{2k_z}\right) \ln r = C_2$$

Reemplazando C_2 en (5. 14),

$$T(r) = -\frac{q_b'''}{4k}r^2 + \left(q_b''' \frac{r_{zs}^2}{2k_z}\right) \ln r + T(r_{z0}) + \frac{q_b'''}{4k}r_{z0}^2 - \left(q_b''' \frac{r_{zs}^2}{2k_z}\right) \ln r$$

Se evalúa para $r = r_{z0}$ y factorando, se obtiene:

$$T_{zs} = T_{z0} + \frac{q_b'''}{4k_z}(r_{z0}^2 - r_{zs}^2) - \left(q_b''' \frac{r_{zs}^2}{2k_z}\right) \ln \left(\frac{r_{zs}}{r_{z0}}\right) \quad (5. 15)$$

Dónde:

T_{zs} Temperatura del radio externo del recubrimiento (Zirlo). [K]

T_{z0} Temperatura del radio interno del recubrimiento (Zirlo). [K]

q_b''' Generación de energía volumétrica en r_b . $\left[\frac{W}{m^3}\right]$

k_z Conducción térmica del Zirlo. $\left[\frac{W}{m K}\right]$

r_{z0} Radio interno del recubrimiento de Zirlo. [m]

r_{zs} Radio externo del recubrimiento de Zirlo. [m]

5.4.4 DISTRIBUCIÓN DE TEMPERTURAS EN LA ZONA 4

La última etapa del perfil de temperaturas en la varilla de combustible, está conformado por el recubrimiento de Zirlo y el refrigerante, que en este caso para reactores PWR es agua liviana. Como el agua está en constante movimiento en el reactor (Sección 1.3 capítulo 1), la transferencia de calor se producirá por convección forzada y para determinar la constante de proporcionalidad de este fenómeno es muy importante determinar ciertas propiedades del fluido.

Todas las propiedades básicas del agua se han estudiado durante muchos años y sus valores se presentan en distintos libros, páginas web, publicaciones, catálogos, entre otros, de organismos internacionales o empresas que utilizan este

fluido para sus trabajos, la información obtenida en sitios oficiales es muy precisa. Una de las instituciones que presenta datos muy confiables y variados es la (International Association for the Properties of Water and Steam, IAPWS) que en muchas aplicaciones nucleares, es referenciada como la fuente de datos de las propiedades del agua.

Existen distintos escenarios que se originan entre la superficie del recubrimiento y el refrigerante, debido a la ebullición del agua que se da al superar la temperatura de saturación. La ebullición se puede dar de dos formas principales, la primera es la ebullición nucleada, llamada así por que las burbujas se forman sobre determinados núcleos, como pueden ser partículas sólidas, gases absorbidos por la superficie o gases disueltos en el líquido; y, la segunda es la ebullición subenfriada, se origina cuando la temperatura de la superficie se encuentra por encima de la de saturación y a su vez la temperatura del refrigerante está por debajo de la de saturación, en este caso no se origina vapor, ya que las burbujas de la superficie se condensan con el líquido a menor temperatura (Glasstone & Sesonske, EXTRACCIÓN DE ENERGÍA, 1984)⁴⁰. En ambos casos la transferencia de calor entre el recubrimiento y el refrigerante no es óptimo, para el primer caso la película formada por las burbujas, hace que se pierda energía hasta llegar netamente al agua; y en el segundo caso la temperatura en la superficie del recubrimiento no es aprovechada por el agua, estos casos se dan en mayor nivel en reactores clásicos, que utilizaban al Zircaloy-4, como material del recubrimiento de la vaina de combustible, pero en los nuevos reactores que utilizan Zirlo, estos fenómenos se reducen significativamente, es por esto que en la distribución de calor en la zona 4, se aplicará exclusivamente a la convección forzada como el mecanismo de transferencia de calor entre ambas superficies.

Otro factor importante que se pudo reducir con la inclusión del Zirlo como material de recubrimiento es la corrosión. En el radio externo del recubrimiento, debido a las altas temperaturas y a la evaporación del refrigerante (agua), en ciertos casos,

⁴⁰ Glasstone, S., & Sesonske, A. (1984). EXTRACCIÓN DE ENERGÍA. En S. Glasstone, & A. Sesonske, *Ingeniería de reactores nucleares* (pág. 423). Barcelona: Reverte.

se genera una película de óxido entre el recubrimiento y el refrigerante, ésta condición perjudica el intercambio de calor y consecuentemente la energía aprovechada para la generación de energía eléctrica.

En los reactores modernos PWR, con la inclusión de la aleación del Zirlo, se logró eliminar en gran porcentaje la película de óxido y de esta forma aprovechar el calor generado en el combustible, es por esta razón, no se tomará en cuenta el intercambio de calor generado entre el recubrimiento y la película de óxido, ya que es tan bajo que se lo puedo despreciar.

5.4.4.1 Convección forzada

Como se detalló anteriormente el intercambio de energía entre las superficies que conforman la zona 4, será a través de la convección forzada (Incropera & Dewitt, 1999)⁴¹.

$$q'' = h(T_s - T_\infty)$$

Donde T_s es la temperatura de la superficie, T_∞ es la temperatura del fluido y h es la constante de proporcionalidad, llamada coeficiente de convección, este coeficiente depende de las propiedades del fluido.

De datos experimentales proporcionados por (LLC, 2013)⁴², se logró determinar que el valor del coeficiente de convección válido para el reactor PWR, es $h = 30815.05 \left[\frac{W}{m^2 K} \right]$.

La transferencia de calor en la zona 4, será exclusivamente por convección forzada entre el recubrimiento y el refrigerante, como se observa en la Figura 5. 1. Es necesario realizar un balance de energía sobre el recubrimiento, ya que la energía generada, se perderá a través de conducción en la zona 3 y por convección forzada en la zona 4. Así para formular el balance energético, es necesario representar la conducción de calor obtenida en la sección 5.4.4.1, en

⁴¹ Incropera, F. P., & Dewitt, D. P. (1999). CONVECCION FORZADA. En F. P. Incropera, & D. P. Dewitt, *Fundamentos de Transferencia de Calor* (págs. 311-316). México: Prentice-Hall.

⁴² LLC, W. E. (2013). IAEA. Recuperado el 3 de Febrero de 2014, de IAEA:

http://www.iaea.org/OurWork/ST/NE/NEFW/Technical_Areas/NFC/documents/fuel-engineering

términos de la generación de energía por unidad de longitud, según la ley de Fourier (Incropera & P, 1999, p. 109)⁴³ para la conducción,

$$q'_r = -2k\pi r \frac{dT}{dr}$$

Integrando y evaluando el resultado para r_{zs} , se tiene,

$$q'_{zs} = -q''_b \pi (r_{zs}^2 - r_{z0}^2) \quad (5.16)$$

Como la rapidez de calor que se genera en el tubo de Zirlo, debe ser igual a la rapidez de eliminación en r_{zs} , si se toma en cuenta un volumen de control, que en este caso es el recubrimiento, la conservación de energía, será:

$$E_{generada} - E_{perdida} = 0$$

Que sobre el recubrimiento es:

$$E_{conducción} = E_{convección}$$

$$q'_{conducción} = q'_{convección} \quad (5.17)$$

La energía por unidad de longitud que se pierde a través de convección es:

$$q'_{zs} = 2\pi r_{zs} h (T_{zs} - T_{\infty}) \quad (5.18)$$

Reemplazando (5.16) y (5.18), en (5.17), resulta:

$$q''_b \pi (r_{zs}^2 - r_{z0}^2) = 2\pi r_{zs} h (T_{zs} - T_{\infty})$$

Reduciendo términos semejantes y para T_{∞} , se obtiene:

$$T_{\infty} = T_{zs} - \frac{q''_b (r_{zs}^2 - r_{z0}^2)}{2 h r_{zs}} \quad (5.19)$$

⁴³ Incropera, F. P., & P, D. D. (1999). Sistemas Radiales. En F. P. Incropera, & D. D. P, *Fundamentos de Transferencia de Calor*

Dónde:

T_{∞} Temperatura del refrigerante (Agua). [K]

T_{zs} Temperatura del radio externo del recubrimiento (Zirlo). [K]

q_b''' Generación de energía volumétrica en r_b . [$\frac{W}{m^3}$]

h Coeficiente de convección del refrigerante (Agua). [$\frac{W}{m^2 K}$]

r_{z0} Radio interno del recubrimiento de Zirlo. [m]

r_{zs} Radio externo del recubrimiento de Zirlo. [m]

5.5 EVALUACIÓN DEL MODELO ENERGÉTICO.

Una vez obtenidos los datos de concentración de neutrones (Capítulo 4) y desarrollada toda la teoría de producción de energía (Capítulo 5, sección 5.4), en el presente sección se evaluarán las ecuaciones del modelo energético, con datos reales de un reactor nuclear AP1000, de la empresa Westinghouse. Se analizarán los datos obtenidos, interpretando el comportamiento energético de la fisión nuclear dentro de la barra de radiactiva, además se determinarán las temperaturas en cada elemento de la varilla de combustible.

Es importante mencionar que todos los datos obtenidos, de la presente tesis, tanto los de concentración de neutrones (Capítulo 4), como los de generación de energía (Capítulo 6), fueron validados con el apoyo de los investigadores del Departamento de Ciencias Nuclear de la E.P.N.

5.5.1 CÁLCULO DE LA PRODUCCIÓN DE ENERGÍA EN LA BARRA DE COMBUSTIBLE.

Una vez desarrollados los algoritmos y evaluado el modelo neutrónico, es momento de utilizar los datos obtenidos de la concentración de neutrones y calcular la energía que se produce por fisión, para esto se emplean las ecuaciones descritas en la sección 5.3.

Aplicando la ecuación (5. 4) y reemplazando los datos de la Tabla 5. 1, se obtiene la potencia generada, calculada con una masa de material físil con el 3% de enriquecimiento.

$$q = 8.3 * 10^{10} \left(\frac{235 \text{ m}}{A} \right) \sigma_f \phi = 8.3 * 10^{10} \left(\frac{235 * 0.000052431}{92} \right) (0.0816 * 0.1862)$$

$$q_0 = 39295.33 \text{ W, en el centro de la barra de combustible.}$$

$$q = 8.3 * 10^{10} \left(\frac{235 \text{ m}}{A} \right) \sigma_f \phi = 8.3 * 10^{10} \left(\frac{235 * 0.000052431}{92} \right) (0.0816 * 0.1393)$$

$$q_b = 29403.93 \text{ W, en el extremo de la barra de combustible.}$$

5.5.2 CÁLCULO DEL PERFIL DE TEMPERATURAS EN LA VARILLA DE COMBUSTIBLE.

Al adquirir la potencia generada en el centro de la barra de combustible, se puede calcular su temperatura mediante la ecuación (5. 9).

Reemplazando la potencia lineal producida en el centro de la barra de combustible q_0 y la constante de proporcionalidad $k_t = 0.045028$, correspondiente al reactor AP1000, la temperatura en el núcleo de la barra es igual:

$$T_0 = 454.15 + q'k_t = 454.15 + (46924.03 * 0.045028)$$

$$T_0 = 2222.59 \text{ K} = 1950.45^\circ\text{C}$$

Para determinar la temperatura en el borde de la barra, simplemente se aplica la ecuación (5. 8), con el valor obtenido de T_0 y con el valor de la potencia lineal q' , se calcula la potencia por unidad de volumen, finalmente se reemplazan los datos de k_b y r_b , de las tablas, Tabla 4. 1 y Tabla 5.1, respectivamente.

$$T_b = T_0 - \frac{q'''}{4k_b} r_b^2 = 2222.59 - \left(\frac{890712647.2}{4 * 2.7} * 0.004095^2 \right)$$

$$T_b = 1064.59 \text{ K} = 792^\circ\text{C}$$

El siguiente paso es calcular las temperaturas en el radio interno y externo del recubrimiento, de igual forma se utilizan las ecuaciones correspondientes a la sección 5.5.1 y la temperatura de T_b , para obtener las temperaturas en la Zona 2 y en la Zona 3.

La ecuación (5. 13), permite obtener la temperatura del radio interno del recubrimiento, pero primero se debe determinar el coeficiente de conductancia del gas, mediante la ecuación (5. 11), reemplazando los valores de la Tabla 5.1 y con un ancho efectivo del huelgo igual a $\delta_{ef} = 0.000104 \text{ m}$, se obtiene:

$$h_g = \frac{k_{gas}}{\delta_{ef}} + \frac{\sigma_{SB} * T_b^3}{\frac{1}{\epsilon_b} + \frac{1}{\epsilon_z} - 1} = \frac{(5.669 * 10^{-8}) * 0.3}{0.000104} + \frac{1064.59^3}{\frac{1}{0.85} + \frac{1}{0.18} - 1}$$

$$h_g = 2884.61 \left[\frac{W}{m^2 K} \right]$$

El flujo de calor se obtiene con la potencia generada en el extremo de la barra de combustible, mediante la ecuación (5. 12).

$$q_b'' = \frac{q_b}{2\pi r_i L} = \frac{123723.93}{2\pi * 0.00419 * 4.3}$$

$$q_b'' = 1092941.98 \left[\frac{W}{m^2} \right]$$

Reemplazando q_b'' , T_b y h_g en (5. 13), se obtiene T_{z0} .

$$T_{z0} = T_b - \frac{q_b''}{h_g} = 1183.59 - \frac{1092941.98}{2884.61}$$

$$T_{z0} = 681.70 \text{ K} = 409.55 \text{ }^\circ\text{C}$$

Una vez obtenida la temperatura en el interior del recubrimiento, se emplea la ecuación de conducción de calor (5. 15), para encontrar la temperatura en su exterior.

$$T_{zs} = T_{z0} + \frac{q_b'''}{4k_z}(r_{z0}^2 - r_{zs}^2) - \left(q_b''' \frac{r_{zs}^2}{2k_z} \right) \ln \left(\frac{r_{zs}}{r_{z0}} \right)$$

Reemplazando los valores de la Tabla 5.1 y los valores de $k_z = 16 \left[\frac{W}{m K} \right]$ $T_{z0} = 804.70 K$, se obtiene T_{zs} .

$$T_{zs} = 804.70 + \frac{8.91}{4 * 16} (0.00419^2 - 0.00475^2) - \left(8.91 * \frac{0.00475^2}{2 * 16} \right) \ln \left(\frac{0.00475}{0.00419} \right)$$

$$T_{zs} = 621.15 K = 349 \text{ } ^\circ C$$

Finalmente de la ecuación (5. 19), se obtiene la temperatura del refrigerante.

$$T_\infty = T_{zs} - \frac{q_b'''(r_{zs}^2 - r_{z0}^2)}{2 h r_{zs}} = 674.15 - \frac{8.91 * (0.00475^2 - 0.00419^2)}{2 * 30815.05 * 0.00475}$$

$$T_\infty = 575.15 K = 303 \text{ } ^\circ C$$

Evaluando al modelo neutrónico y a las ecuaciones del modelo térmico, con los mejores parámetros de cálculo y con valores reales de un reactor nuclear AP1000, se obtuvo la concentración de neutrones, la potencia generada y el perfil de temperaturas de la varilla de combustible, todos los algoritmos desarrollados y las ecuaciones empleadas, serán implementadas en el software de simulación, además, los resultados obtenidos, serán validados en la sección 6.3 del presente capítulo.

5.5.3 RESULTADOS DEL SOFTWARE DE SIMULACIÓN

En esta sección se presentarán los resultados de la simulación por software del comportamiento energético del material radiactivo, los algoritmos desarrollados y las ecuaciones implementadas al código del programa, devolverán las soluciones del problema neutrónico y energético, presentándose de forma numérica y gráfica, según lo especificado en el Capítulo 4, en la sección 4.1 (Desarrollo de Software).

Con los valores del flujo escalar de neutrones calculado en la interfaz principal del software, se procede a calcular la potencia que se genera en la barra de combustible y a su vez las temperaturas en cada uno de los elementos de la varilla

de combustible. A continuación se presenta la interfaz secundaria con la información antes mencionada.

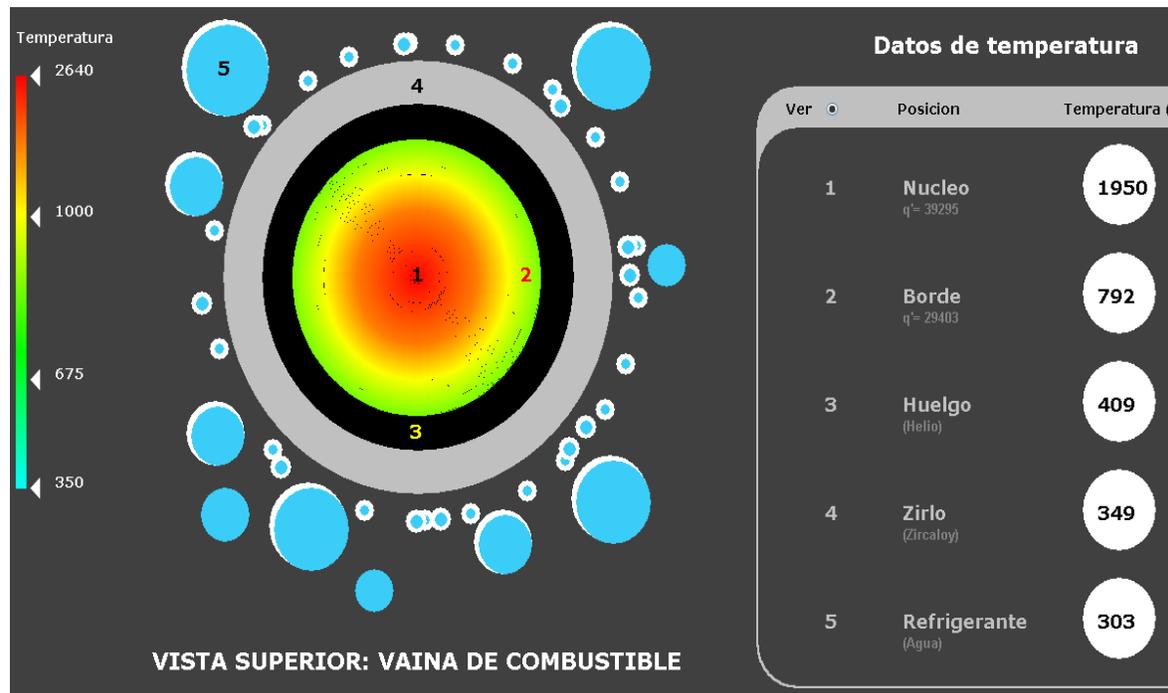


Figura 5. 2: Simulación del comportamiento energético del material UO_2 .

Fuente: El Autor.

Como se observa los datos de potencia lineal y de temperaturas, coinciden con los datos obtenidos en la sección 5.5.2.

La energía producida por la fisión nuclear, tiene el mismo comportamiento que la concentración de neutrones, es decir que en el centro de la barra se genera la mayor producción de energía y en los extremos la menor. De igual forma, se puede observar que la temperatura decae a la vez que se aleja del núcleo de la varilla de combustible, debido a que, el calor se pierde en cada elemento, por los distintos mecanismos descritos en el Capítulo 5 (Análisis Energético).

A continuación se observa el gráfico de temperaturas correspondiente a la interfaz secundaria, con los datos del material MOX y con un valor de fuente de $q = 0.05 \left[\frac{\text{neutrones}}{\text{cm}^2} \right]$.

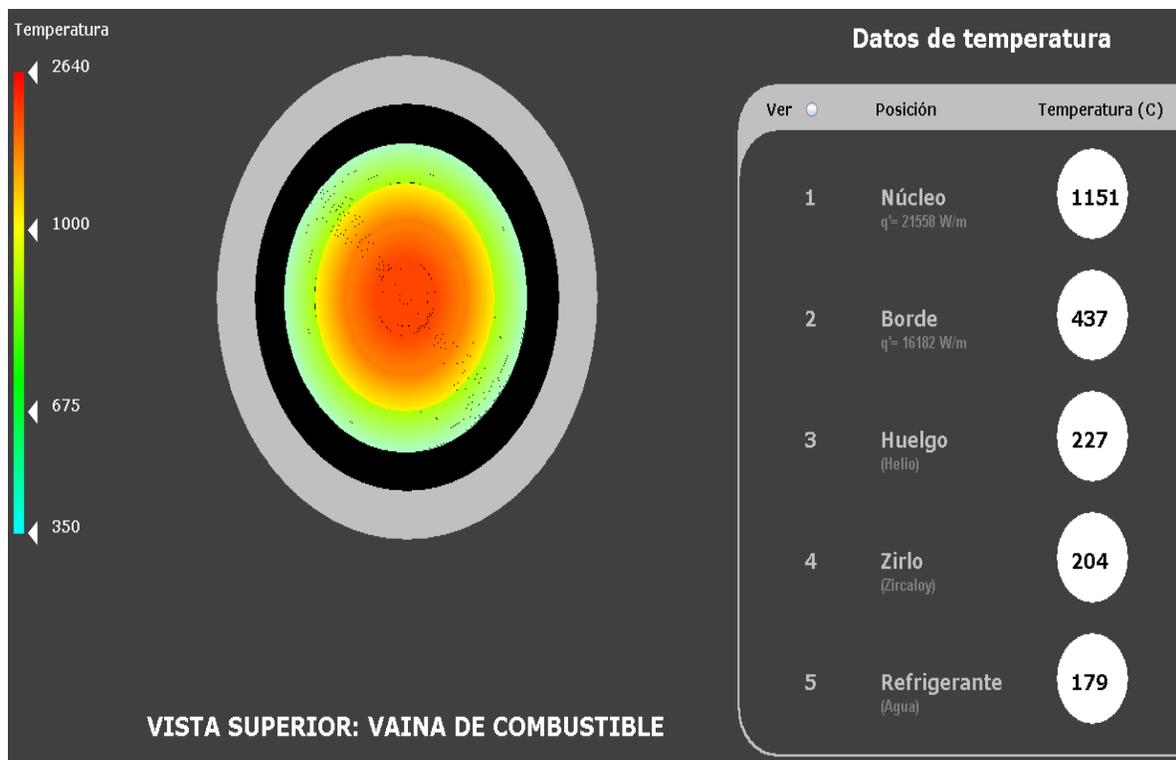


Figura 5. 3: Simulación del comportamiento energético del material MOX.

Fuente: El Autor.

Como la concentración de neutrones es proporcional a la energía producida, se observa que el comportamiento energético, sin importar el combustible nuclear que se utilice, tiene el mismo comportamiento, en el centro de la barra se liberará mayor energía que en sus extremos. De igual forma la temperatura decae, mientras se aleja del núcleo de la varilla de combustible.

CAPÍTULO 6

TEORÍA DEL CONTROL AUTOMÁTICO EN UN REACTOR NUCLEAR

Se plantean los conceptos básicos del control automático, posteriormente se describen los escenarios y principios necesarios de la energía nuclear para formular y aplicar las herramientas del control automático, como son: la cinética de un reactor, su criticidad y sus mecanismos de control o apagado, con estos principios se describen las ecuaciones de la cinética del reactor y se aplican las herramientas del control automático. Se estudian escenarios en los cuales es posible controlar un reactor, analizando su controlabilidad, observabilidad y estabilidad.

6.1 INTRODUCCIÓN AL CONTROL AUTOMÁTICO

El control automático es una ciencia multidisciplinaria, encargada de formular leyes matemáticas que permiten el gobierno de sistemas físicos, en función a los objetivos o valores que se desean alcanzar. La aplicación de estas leyes transforma al sistema en un proceso controlado, el cual presenta mejoras al momento de alcanzar estos objetivos, o bien se convierte en un automatismo, capaz de controlarse a sí mismo sin la supervisión de un humano.

Su objetivo es, diseñar los controladores, que se encuentran entre los datos de entrada del sistema y la planta en sí, de tal forma que logre alcanzar los valores especificados, según los requerimientos planteados por parte de los ingenieros que realicen el control, de esta forma se logra un comportamiento del sistema según las exigencias de diseño que se requieran.

Esta herramienta es fundamental al momento de automatizar cualquier tipo de sistema o proceso, es masivamente aplicado en la industria para optimizar los recursos y actividades que se presentan en la producción.

Existen tres componentes básicos de un sistema de control, los cuales son: los objetivos de control (variables actuantes) o entradas, que generalmente se las identifican con la letra u , los componentes del sistema de control, en este componente se encuentra el controlador y el proceso, y finalmente los resultados (variables controladas) o también llamadas salidas.

De acuerdo a lo planteado anteriormente, en el sistema de control interviene las salidas, según las especificaciones del sistema, mediante las entradas a través de los elementos de control.



Figura 6. 1: Diagrama básico del control automático.

Fuente: El Autor.

Como se observa en la Figura 6. 1 los objetivos, son las entradas del sistema, que servirán de información al sistema de control para que realice las operaciones necesarias, dirija señales a los actuadores, que serán los encargados de ejecutar las instrucciones determinadas por el sistema de control y así obtener las salidas deseadas.

A fin de clasificar a los sistemas de control por su realimentación, primero es importante detallar su significado. Se dice que un sistema de control es realimentado, cuando un conjunto de relaciones en secuencia cerrada tiene un comportamiento de causa y efecto sobre las variables del sistema. Según esta definición se puede clasificar a los sistemas de control en: Sistemas de control en lazo abierto y Sistemas de control en lazo cerrado.

Los sistemas de control en lazo abierto, actúan según las especificaciones del controlador, que se encuentra en serie, antes del proceso controlado o también llamado planta, se caracteriza por no tener una señal que verifique o mida si la

variable controlada llegó a su valor deseado, es decir la variable de entrada, tiene un valor constante predeterminado, que sólo será objeto de modificación para que la señal que llegue al proceso controlado, pueda ser reconocida y transformada por los actuadores; es por este motivo que algunos ejemplos de controladores en lazo abierto son: amplificadores, filtros, microcontroladores o también pueden ser componentes mecánicos como pasadores, bombas, etc.

A continuación se presentan los componentes de un sistema de control en lazo abierto.

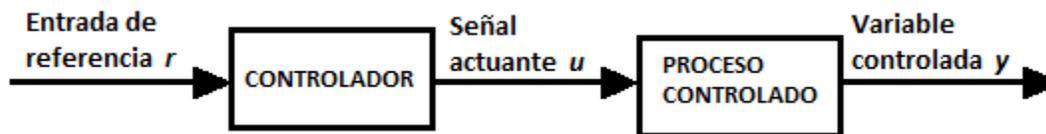


Figura 6. 2: Sistema en lazo abierto.

Fuente: El Autor.

Los sistema de control en lazo cerrado se caracterizan por tener elementos que midan el valor de la variable de salida, no sólo eso, este valor censado se compara con la señal de entrada y se determina el error de los resultados, de esta forma el controlador puede tomar las acciones necesarias para corregir el error medido, mandar esta nueva señal de instrucción a los actuadores de la planta y tener mayor precisión a la salida del sistema. La variable de salida medida, que se presenta como un término para medir el error del sistema, se conoce como la realimentación.

Los componentes de un sistema de control en lazo cerrado se describen de forma gráfica a continuación.

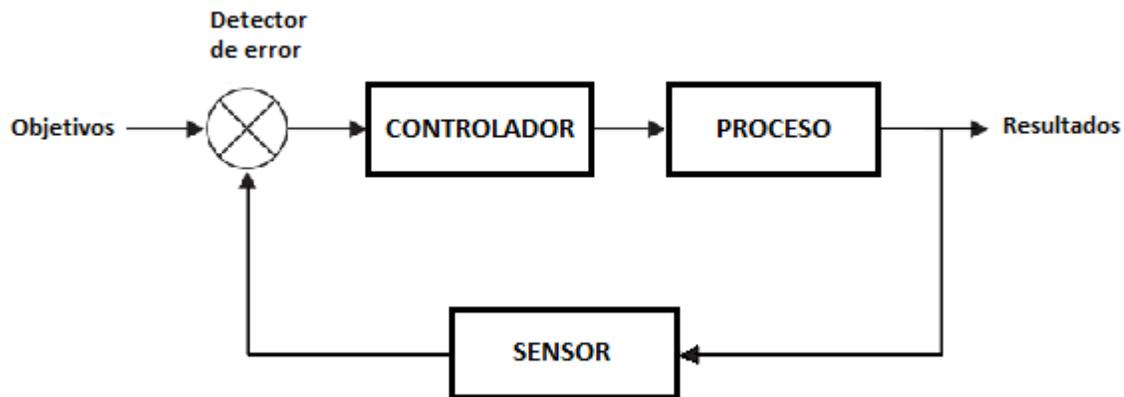


Figura 6. 3: Sistema en lazo cerrado.

Fuente: El Autor.

Ambos sistemas: Figura 6.2 y Figura 6.3, están representados en diagramas de bloques, que presentan ciertas propiedades, lo cual permite realizar operaciones entre los distintos componentes del sistema; estas operaciones se las realiza para obtener un diagrama de bloques más simplificado y poder aplicar los conceptos del control de mejor forma.

Una vez que se han determinado los componentes de un sistema de control, se puede plantear el concepto de *función de transferencia*, que es la formulación matemática del comportamiento del control, planta o del sistema controlado, según la entrada o perturbación que presenta, está relacionada como el cociente de las salidas sobre las entradas del sistema.

Para poder plantear la función de transferencia de la planta y de esta forma poder aplicar un control sobre ella, es necesario determinar el modelo matemático del sistema que se desea controlar, una vez obtenida la o las ecuaciones que rigen el comportamiento del problema, se transforman las ecuaciones diferenciales a ecuaciones en función de la frecuencia, con la transformada de Laplace, ya que es más fácil manipular ecuaciones algebraicas (en función de s), que ecuaciones diferenciales, posteriormente se identifican las entradas y las salidas del sistema, para luego poder plantear la relación de las salidas sobre las entradas y así determinar su función de transferencia.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = G(s)$$

Dónde:

$U(s)$ Entradas u objetivos.

$Y(s)$ Salidas o resultados.

$G(s)$ Función de transferencia.

De los conceptos del control automático se logra identificar que los procesos cuya variable de salida es un parámetro fijo, que no cambiará y que no necesita de una precisión muy alta, se puede aplicar un control en lazo abierto sin realimentación, pero, en los procesos cuya entrada, son perturbaciones de comportamiento aleatorias, y que se necesita realizar un control preciso, con una exactitud elevada y que responda de forma rápida, es indispensable tener sensores que permitan determinar el valor de la variable controlada y así realizar una acción de forma rápida; para este tipo de procesos se utiliza los sistemas de control en lazo cerrado. Debido a que un reactor nuclear es un proceso muy crítico, obviamente los sistemas de control aplicados son en lazo cerrado y con parámetros de seguridad muy estrictos, debido al riesgo mortal que existe si se presentan fallas en el funcionamiento del reactor.

6.2 CONCEPTOS GENERALES DEL CONTROL DE REACTORES NUCLEARES

El factor determinante a controlar en un reactor nuclear es la potencia, ya que si la cantidad de energía producida en un tiempo corto, excede los valores de seguridad, las fallas producidas en el núcleo ocasionarían accidentes mortales, para los operadores de la planta y para la población aledaña.

El sistema de control debe ser diseñado tal que, el tiempo en que incrementa la energía generada en el núcleo, sea mayor al tiempo máximo que se demore en

realizar una operación de control (accionamientos electro-mecánicos). Si el tiempo de generación de energía es muy corto, simplemente el reactor no es controlable.

Debido a la importancia en la seguridad de un reactor nuclear, la variable que será estudiada en esta sección será la potencia del reactor, de los conceptos desarrollados en el capítulo 2 y en la sección 5.3 del capítulo 5, se puede determinar que la potencia de un reactor nuclear depende del flujo de neutrones, del enriquecimiento del material fisil y de la sección eficaz de fisión. El parámetro del enriquecimiento es único en todos los reactores, debido a normas de seguridad, todo reactor nuclear debe operar con un combustible que no supere el 5% de enriquecimiento, valores mayores son utilizados en la elaboración de armas nucleares, entonces el valor de enriquecimiento será constante en todo el combustible del reactor y por consiguiente será descartado como parámetro de control. La sección eficaz de fisión es un parámetro muy difícil de manipular debido a que es una magnitud muy pequeña ($\text{barns} = 1 * 10^{-24} \text{cm}^2$), de igual forma se descarta para su manipulación en el control. La variable sobre la cual el control es más eficiente, es la concentración de neutrones, ya que al introducir una barra de control ésta absorberá los neutrones libres y reducirá los procesos de fisión que se originan por unidad de tiempo.

Como se detalló en la sección 2.6 del capítulo 2 el reactor alcanza un estado crítico, cuando la concentración de neutrones no cambia con respecto al tiempo, en este punto el reactor se encuentra en estado estacionario. Pero existen variaciones del flujo de neutrones que se originan debido a perturbaciones en la planta o cuando el reactor inicia o termina su funcionamiento. En estas variaciones el control automático aplicado debe ser capaz de ejecutar las acciones correspondientes para que el reactor vuelva a su estado crítico.

La potencia y la criticidad de un reactor dependen de ciertos factores que alteran su comportamiento, los cuales se los describe a continuación.

6.2.1 VIDA NEUTRÓNICA

Es el tiempo que transcurre desde que un neutrón es liberado hasta que desaparece del sistema, este tiempo se divide en dos instantes, el primero es el tiempo en el que un neutrón alcanza la energía térmica, denominado *tiempo de moderación* y el segundo es el tiempo que transcurre desde que el neutrón alcanza su energía térmica, hasta que desaparece del sistema y se llama *tiempo de difusión*. Estos conceptos son importantes en la modelación de las ecuaciones para el control de un reactor nuclear.

6.2.2 REACTIVIDAD Y FACTOR DE MULTIPLICACIÓN EFECTIVO

En la fisión nuclear los neutrones liberados poseen una gran velocidad y energía, al chocar con los átomos inestables presentes en el combustible, se produce nuevamente la fisión, a los neutrones que son liberados por este proceso, se los llama neutrones instantáneos. Como se describió en el capítulo 2, en el proceso de la fisión nuclear se liberan neutrones instantáneos y productos de fisión, estos productos se encuentran excitados y se desintegran por emisión de partículas beta, liberando neutrones en un tiempo determinado que depende del proceso de la desintegración del producto, este tiempo puede durar segundos o minutos; a los neutrones que son liberados por el decaimiento de los productos de fisión, se los denomina *neutrones retardados*. Este grupo de neutrones, son los que posibilitan las acciones de control sobre el reactor nuclear, ya que su tiempo de generación retarda el tiempo en que los neutrones se producen en todo el núcleo del reactor, lo que permite tener un tiempo de respuesta, suficiente para que los actuadores ingresen las barras de control y absorban una cantidad de neutrones, que permita volver a su estado crítico al reactor.

Los productos de fisión que al desintegrarse liberan neutrones, se los denomina *precursores* y su producción en un tiempo determinado, es un factor importante en el control de un reactor nuclear, ya que son productores de neutrones retardados.

La acumulación total de neutrones en un reactor, depende del número de eventos de fisión y del número de sus productos, entonces el número de neutrones que

generan eventos de fisión en un tiempo determinado, será fundamental en el crecimiento de la concentración de neutrones y por consiguiente en la potencia del reactor. A este número promedio de neutrones, se los conoce como el *Factor de Multiplicación Efectiva*. Este concepto es muy importante, ya que ayuda a describir los estados del sistema.

Como se mencionó anteriormente un reactor se encuentra en estado crítico, cuando la tasa de neutrones que se generan, es igual a la tasa de neutrones que se pierden, esto hace que la acumulación de neutrones no varíe en función del tiempo y la reacción en cadena sea auto-sostenida, para que esto suceda, por cada evento de fisión, por lo menos un neutrón debe ser liberado para que pueda producir otro evento, en este caso, el factor de multiplicación efectiva es $k = 1$. Cuando el número de neutrones generados, es superior al número de neutrones absorbidos (pérdidas), la acumulación de neutrones crecerá de forma exponencial con relación al tiempo y el reactor alcanzará el estado supercrítico, de esta forma se observa que el valor de multiplicación efectiva es $k > 1$; esta acumulación de neutrones deberá ser controlada para que el nivel de potencia del reactor no sobrepase los valores de seguridad y pueda volver a su estado crítico sin ocasionar accidentes en el núcleo.

El tercer estado que puede alcanzar un reactor nuclear es el subcrítico y se origina cuando el número de neutrones generados, es menor al número de neutrones absorbidos, esto ocasionará que la acumulación de neutrones decrezca de forma exponencial hasta que el proceso de fisión se detenga por completo, este caso, se describe con el factor de multiplicación eficaz cuando $k < 1$.

Como se puede observar k es una magnitud muy importante en el control de reactores nucleares, pero en ciertos modelos, no se toma en cuenta este valor, sino a la reactividad, que es igual a:

$$\rho = \frac{k - 1}{k}$$

De esta ecuación se puede observar que tener cualquier valor que se mida, se puede obtener el otro mediante esta ecuación.

El estado eficaz de operación de un reactor es el estado crítico y cualquier variación de la reactividad, debe generar acciones de control, que permitan que el reactor alcance nuevamente la estabilidad dentro de un corto tiempo y sin que alcance valores peligrosos de potencia.

6.3 APLICACIÓN DE LOS CONCEPTOS DEL CONTROL AUTOMÁTICO

Una vez detallada la importancia de las variables que influyen en la potencia de un reactor nuclear, en esta sección se plantearán y desarrollarán las teorías de control, para que las perturbaciones o cambios que presente la reactividad, sean controladas, mediante barras de control, ocasionando que el flujo de neutrones disminuya y el reactor alcance nuevamente su estado crítico.

En todo este proceso, es importante determinar la estabilidad del reactor, si ésta existe, se debe evaluar el estado transitorio que experimentó, para observar si los niveles de potencia no supera los límites de seguridad o si sus oscilaciones no son tan violentas, además se debe determinar en qué tiempo alcanza el nuevo estado estacionario, todos estos datos son importantes para poder desarrollar un sistema de control que funcione dentro de los parámetros y tiempos, en donde el control del reactor sea efectivo (seguro).

Se puede identificar gracias a los conceptos planteados anteriormente que la variable de entrada del sistema de control del reactor nuclear es la reactividad, al ingresar al sistema será tratada por el control desarrollado, posteriormente, la variable controlada ingresará a la planta o proceso, en donde se tomarán las decisiones para ejecutar los actuadores y obtener la variable de salida que en este caso será la concentración o flujo de neutrones, este sistema se realimentará negativamente para que el valor de la reactividad disminuya según la concentración de neutrones censada, una vez determinado el error del proceso se

repite hasta alcanzar el estado estacionario. Un diagrama general del sistema de control del reactor nuclear se presenta a continuación.

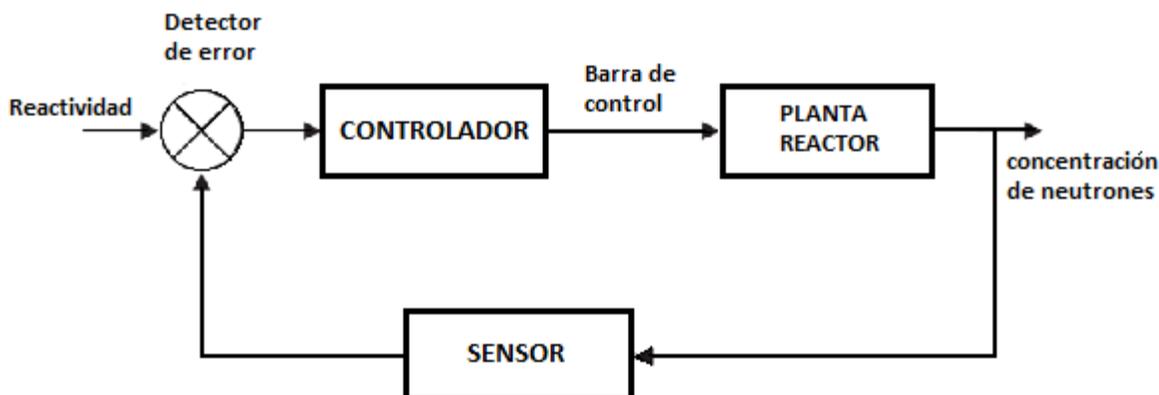


Figura 6. 4: Sistema de control general de un reactor nuclear.

Fuente: El Autor.

6.3.1 MODELO MATEMÁTICO DE LA CINÉTICA DE UN REACTOR NUCLEAR

Bajo las condiciones de criticidad, la tasa de cambio que experimenta la concentración de neutrones, con respecto al tiempo, está definida por las variaciones de los neutrones instantáneos y los precursores. Las ecuaciones que describen la cinética de un reactor, se plantean en el siguiente modelo matemático (Glasstone & Sesonske, FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE LA CINÉTICA DE LOS REACTORES, 1990)⁴⁴

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\rho - \beta}{l} n + \sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i$$

$$\frac{dC_i}{dt} = \frac{\beta_i}{l} n - \lambda_i C_i$$

Dónde:

n Concentración de neutrones. $\left[\frac{\text{neutrones}}{m^3}\right]$

⁴⁴ Glasstone, S., & Sesonske, A. (1990). FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DE LA CINÉTICA DE LOS REACTORES. En S. Glasstone, & A. Sesonske, *Ingeniería de reactores nucleares* (pág. 330). Barcelona: Reverte.

- C Concentración de precursores del grupo i . [$\frac{\text{precursores}}{m^3}$]
- ρ Reactividad.
- β Fracción de neutrones retardados.
- λ Constante de decaimiento del precursor. [$\frac{1}{s}$]
- l Tiempo de vida efectiva de los neutrones. [$\frac{1}{s}$]

Existen seis grupos de precursores presentes en la fisión nuclear, es por esto que el termino $\sum_{i=1}^6 \lambda_i C_i$, es la sumatoria de todos estos grupos, pero, por motivos de simplificación del modelo (lo que facilitará aplicar de mejor forma las operaciones de control), se tomará en cuenta los valores de λ y C , como el promedio de estos seis grupos, con lo cual no se perderá exactitud en el cálculo, así el modelo simplificado resulta de la siguiente forma:

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{\beta}{l}n + \lambda C + \frac{\rho}{l}n$$

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\beta}{l}n - \lambda C$$

(6.1)

El sistema de ecuaciones resultantes describe la cinética de un reactor nuclear para un solo grupo de neutrones promedio. Se identifica claramente que las variables de estado son n y C , la variable controlada es ρ y que el sistema es de segundo orden no lineal, ya que la variable de salida está multiplicando a una variable de estado en el término $\frac{\rho}{l}n$ de la primera ecuación. Para poder aplicar las teorías de control, es necesario que el sistema sea lineal, para esto existen distintas técnicas que permiten transformar al sistema. A continuación se evaluará al modelo matemático en su estado estacionario, de esta forma $\frac{dn}{dt} = 0$ y $\frac{dC}{dt} = 0$, reemplazando estos valores en sus respectivas ecuaciones, se obtiene los valores de n_0 y C_0 , que permitirán plantear un modelo linealizado del sistema.

Para la concentración de precursores se tiene:

$$C_0 = \frac{\beta}{l} n_0 - \lambda C_0 = 0$$

$$C_0 = \frac{\beta}{l \lambda} n_0$$

De igual forma para la ecuación de la tasa de cambio de los neutrones rápidos, se obtiene.

$$n_0 = -\frac{\beta}{l} n_0 + \lambda C_0 + \frac{\rho_0}{l} n_0 = 0$$

Reemplazando C_0 en la ecuación anterior, resulta.

$$n_0 = -\frac{\beta}{l} n_0 + \lambda \frac{\beta}{l \lambda} n_0 + \frac{\rho_0}{l} n_0 = 0$$

$$\rho_0 = 0$$

Reemplazando el valor de la reactividad $\rho_0 = 0$ en la ecuación (6. 1), se obtiene el modelo linealizado del sistema, que se presenta a continuación.

$$\frac{dn}{dt} = -\frac{\beta}{l} n + \lambda C$$

(6. 2)

$$\frac{dC}{dt} = \frac{\beta}{l} n - \lambda C$$

La forma en la que se presenta el modelo del comportamiento cinético del reactor nuclear, permite aplicar las teorías de control a través de las variables de estado. La importancia de modelar al sistema en variables de estado, es que permite aplicar todas las teorías del control moderno y con esto obtener toda la información del sistema, como por ejemplo si es estable, controlable, observable, etc. De esta manera se puede diseñar el controlador apropiado para el sistema, conociendo todas sus características con anterioridad, permitiendo controlar al sistema de forma óptima.

Las ecuaciones dinámicas de un sistema lineal invariante en el tiempo, son:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t) + Ew(t) \quad (6.3)$$

Donde (6. 3) es la ecuación de estado.

$$y(t) = Cx(y) + Du(t) + Hw(t) \quad (6.4)$$

Y (6. 4) es la ecuación de salida.

Las variables de estado $x(t)$ son las incógnitas que se determinarán según las entradas que se le proporcione al sistema, se las identifican en las ecuaciones al multiplicar a los coeficientes de las matrices A y C .

Los términos $u(t)$ y $w(t)$, representan las funciones de excitación del sistema, vienen acompañados por las matrices B y E , en el caso de las ecuaciones de estado y por D y H , en las ecuaciones de salida.

Una vez linealizado el sistema y expresado en sus variables de estado, se presentan de la siguiente forma.

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{l} & \lambda \\ \frac{\beta}{l} & -\lambda \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{l} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

$$C = [1 \ 0]; \quad D = [0 \ 0]$$

Al obtener el comportamiento dinámico del sistema, es necesario plantear la función de transferencia, mediante las ecuaciones de estado, para así aplicar las teorías del control moderno. En forma similar las variables de estado se pueden representar en una relación de un número de entradas y salidas definidas, con una función de transferencia. La obtención general de la función de transferencia utilizando el modelo de las variables de estado, se encuentra desarrollado en (Kuo

B. C., Relación entre las ecuaciones de estado y las funciones de transferencia, 1996)⁴⁵.

La función de transferencia, mediante el modelo de las variables de estado es:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B + D \quad (6. 6)$$

En donde:

$G(s)$ Matriz de función de transferencia.

sI Matriz identidad por la variable de frecuencia s .

A, B, C, D Las matrices del modelo.

Ya que el modelo del reactor presenta una sola entrada con una sola salida, el sistema se denomina SISO por sus siglas en ingles *Single Input, Single Output*. Para obtener su función de transferencia, se realizan las operaciones matriciales descritas en la ecuación (6. 6).

$$sI - A = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{\beta}{l} & \frac{\beta}{l} \\ \lambda & -\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \frac{\beta}{l} & -\frac{\beta}{l} \\ -\lambda & s + \lambda \end{bmatrix}$$

Una de las ventajas de aplicar el modelo de las variables de estado, es determinar la existencia de la función de transferencia, se tiene que cumplir que $\det[sI - A] \neq 0$ para que la función de transferencia exista, en el caso particular del reactor:

$$\det[sI - A] = s^2 + s\left(\frac{\beta}{l} + \lambda\right)$$

Con lo cual se determina que si existe una función de transferencia y que se pueden aplicar las operaciones necesarias, para diseñar el control.

⁴⁵ Kuo, B. C. (1996). Sistemas de Control Automático. En B. C. Kuo, *Sistemas de Control Automático* (págs. 242-243). Naucalpan de Juárez: Prentice-Hall.

Tabla 6. 1: Parámetros del modelo cinético.

Descripción	Símbolo	Valor	Unidades
Fracción de neutrones retardados.	β	0.00765	
Constante de decaimiento del precursor.	λ	0.76748	$\left[\frac{1}{s}\right]$
Tiempo de vida efectiva de los neutrones.	l	0.000176	$\left[\frac{1}{s}\right]$

Fuente: (Lamarsh & Anthony, 2001)⁴⁶

Aplicando las operaciones matriciales restantes de la ecuación (6. 6), y reemplazando los parámetros del modelo (Tabla 6.1), la función de transferencia del reactor nuclear en lazo abierto es:

$$G(s) = \frac{5681,8182 (s + 0.7675)}{s(s + 44.23)} \quad (6. 7)$$

En esta configuración de la función de transferencia, se pueden identificar claramente, la ganancia $K = 5681,8182$, el cero de la función $z = -0.7675$ y sus polos $p_1 = 0$ y $p_2 = -44.23$.

En esta instancia resulta significativo resaltar las características del control moderno, ya que provee criterios para determinar si existe o no una solución al sistema, lo que no sucede con el control clásico, este último necesita de varias operaciones de prueba y error para identificar una solución, sin conocer previamente si ésta existe.

Uno de los criterios que provee el control moderno, es la controlabilidad, que permite conocer si cada variable de estado de la planta se puede controlar. El

⁴⁶ Lamarsh, J., & Anthony, B. (2001). *Introduction to Nuclear Engineering*. Prentice Hall.

concepto de controlabilidad es: “Se dice que un proceso es completamente controlable, si cada variable de estado del proceso se puede controlar para llegar a un cierto objetivo en un tiempo finito, a través de algún control no restringido $u(t)$ ” (Kuo B. C., 1996)⁴⁷. En otras palabras, si una variable de estado es independiente del control ejercido sobre ella, nunca llegará al estado deseado, planteado en los objetivos del sistema, en este caso se dice que el sistema es no controlable.

Primeramente se plantea la matriz de controlabilidad del sistema, con ella se podrá entrar en detalle en sus propiedades y aplicaciones (Kuo B. C., Definición de controlabilidad de estado, 1996)⁴⁸.

$$S = [B \quad (A * B)]$$

Donde S , es la matriz de controlabilidad del sistema y A, B , las matrices de dimensión de las ecuaciones de estado.

Para identificar si el modelo del reactor nuclear es controlable, se aplican los conceptos de la matriz de controlabilidad, si el rango de la matriz es igual al rango de la matriz A o igual a la dimensión del sistema, se dice que el sistema presenta un control tal que, la variable de estado alcance el valor deseado según la variable de entrada. Utilizando las librerías de MATLAB, se puede determinar que el rango de la matriz S es igual a 2 y el rango de la matriz A también es igual a 2, con lo que se puede determinar que el modelo del reactor presenta un control que permita llegar a los objetivos deseados.

$$S = [B \quad A * B]$$

controlabilidad=rank(S)

controlabilidad =

2

⁴⁷ Kuo, B. C. (1996). Controlabilidad de sistemas lineales. En B. C. Kuo, *Sistemas de Control Automático* (pág. 275). Juárez: Prentice-Hall.

⁴⁸ Kuo, B. C. (1996). Deficnion de controlabilidad de estado. En B. C. Kuo, *Sistemas de Control Automático* (págs. 276-277). Juárez: Prentice-Hall.

Una vez que se ha comprobado que el modelo del reactor se puede controlar, es momento de determinar si es observable. La observabilidad se define como “Se dice que un punto x_0 del espacio de estado es observable en $[t_0, t_1]$, si siendo este el estado inicial en el instante $x_0 = x(t_0)$, el conocimiento de la entrada $u(t)$ en el intervalo $[t_0, t_1]$ y de la salida $y(t)$ en el mismo intervalo permite determinar que el estado inicial del sistema en el instante es x_0 ” (Dominguez, Pascual, Sebastian, & Jimenez, 2006)⁴⁹.

En otras palabras un sistema es observable si a través del conocimiento de las variables de entrada y salida, se puede determinar su estado en un intervalo conocido.

Para sistemas lineales invariantes en el tiempo la estabilidad de un sistema se obtiene analizando la matriz de observabilidad:

$$P = \begin{bmatrix} C \\ C A \\ C A^2 \\ \vdots \\ C A^{n-1} \end{bmatrix}$$

Para el modelo del reactor se tiene.

$$P = \begin{bmatrix} C \\ C A \end{bmatrix}$$

Si el rango de la matriz de observabilidad P es igual al rango de la matriz A o igual a la dimensión del sistema, el sistema es observable. De igual forma mediante código de MATLAB, se determina el rango de la matriz, siendo este igual a 2, determinando que el sistema es observable.

```
P = [C; C * A]
```

```
observabilidad=rank(P)
```

```
observabilidad =
```

```
2
```

⁴⁹ Dominguez, S., Pascual, C., Sebastian, J., & Jimenez, A. (2006). Observabilidad. En S. Dominguez, C. Pascual, J. Sebastian, & A. Jimenez, *CONTROL EN EL ESPACIO DE ESTADO* (pág. 117). Madrid: Pearson Education.

Otro de los conceptos necesarios para diseñar el sistema de control del reactor nuclear, es la estabilidad, pero para poder definirla e identificar su existencia en el modelo del reactor, primero es importante determinar su ecuación característica. La ecuación característica de una función de transferencia es la que se presenta en su denominador y las raíces de dicha ecuación son los polos de la función, con los cuales se determinará la estabilidad del modelo. Para sistemas SISO, se deben hallar los polos de la ecuación característica y dependiendo de su ubicación en el plano s , se podrá identificar si el sistema es estable o inestable. El plano s con sus respectivas regiones, se encuentra ilustrado en la siguiente gráfica.

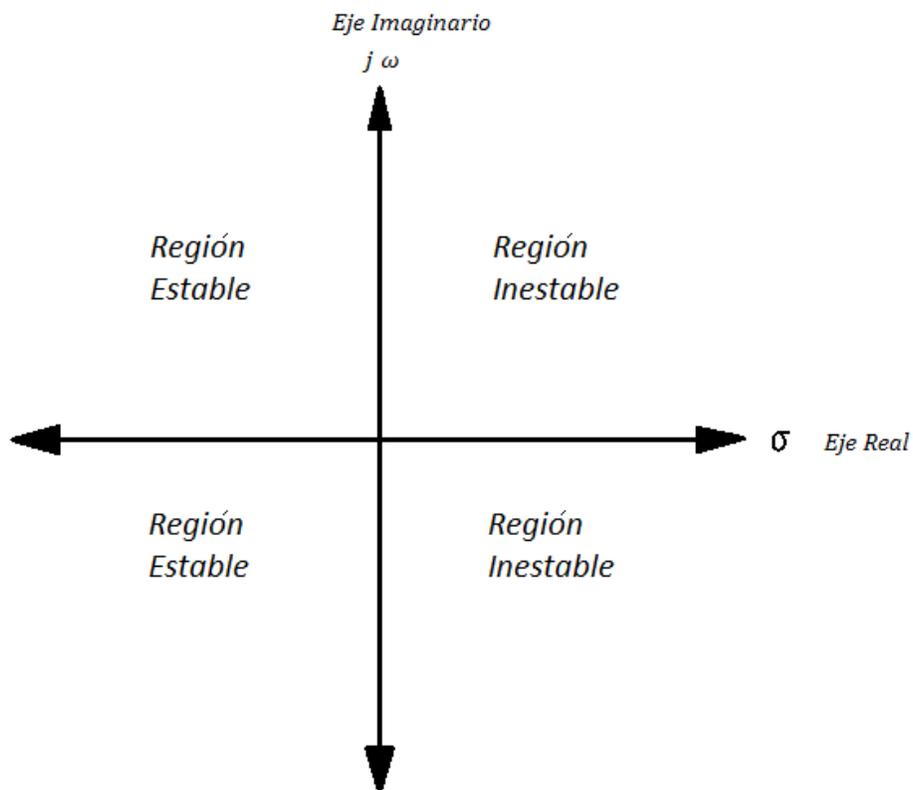


Figura 6. 5: Plano complejo s .

Fuente: El Autor.

Como se observa en la Figura 6. 5, los semiplanos ubicados a la izquierda del eje imaginario, representan la región estable y los semiplanos a su derecha, la región inestable, al calcular los polos de la función de transferencia, según su ubicación en el plano complejo, se determinara su estabilidad. Es importante mencionar que

si un polo coincide con el origen de los ejes, el sistema será considerado como inestable.

Para el caso del reactor nuclear, los polos de la función son: $-44,23$ y 0 , con esta información y de acuerdo con las teorías de control moderno, se puede determinar que el sistema es inestable, ya que uno de sus polos, coincide con el origen del sistema cartesiano del plano complejo s . Si se desea visualizar los polos de la función, se puede utilizar el comando de MATLAB `rlocus(num, den)`, en el parámetro `num`, se especifica el numerador de la función de transferencia y en el parámetro `den`, se especifica el denominador, el resultado se muestra a continuación.

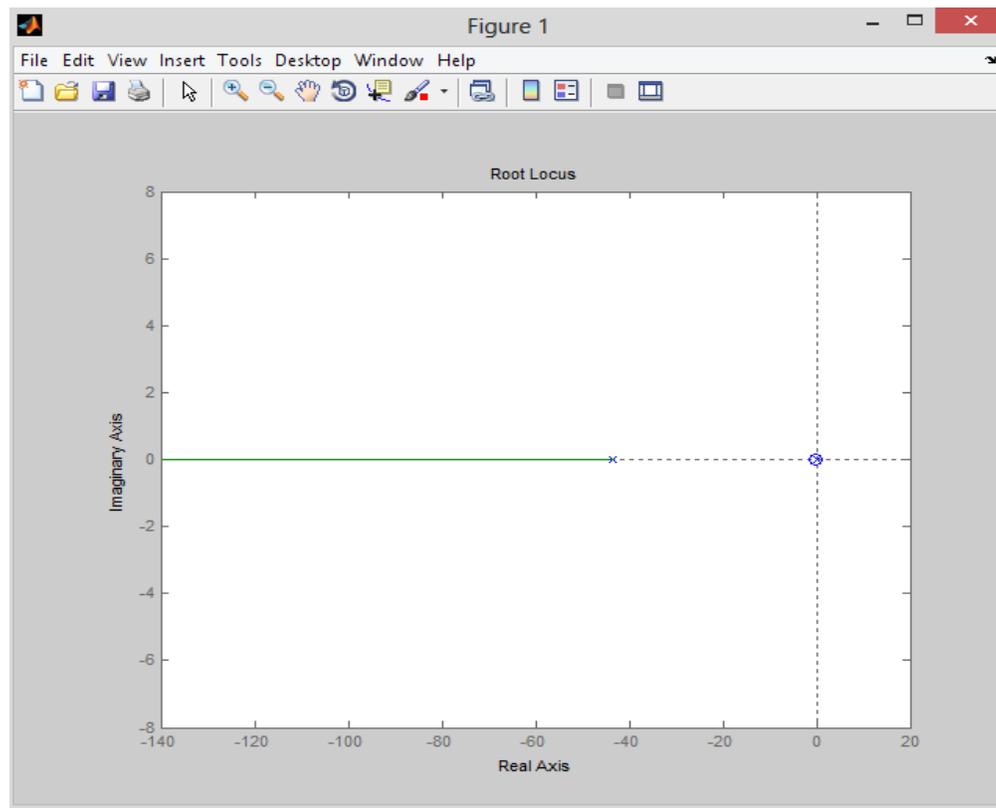


Figura 6. 6: Ubicación de los polos de la función de transferencia en lazo abierto del reactor nuclear.

Fuente: El Autor.

Por este motivo, se deben aplicar las operaciones necesarias, para que el sistema logre alcanzar la estabilidad.

El siguiente paso es observar el comportamiento del sistema en lazo abierto, lo que proporciona información cuando no se realimenta la variable de salida, utilizando las herramientas del SIMULINK, un programa que viene incluido en ciertas versiones de MATLAB, se diseña el diagrama de bloques en lazo abierto y se simula su comportamiento. A continuación se presenta el diagrama de bloques del modelo en lazo abierto.

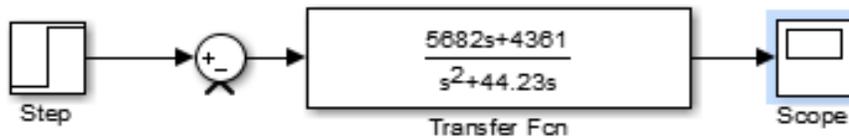


Figura 6. 7: Diagrama de bloques del modelo del reactor nuclear mediante SIMULINK, en lazo abierto.

Fuente: El Autor.

El primer elemento (Step) representa una entrada escalón, con el valor máximo igual a la unidad, el segundo elemento (Transfer Fcn) es un sumador, como se puede observar, no está alimentada la entrada correspondiente a la realimentación, el tercer elemento es la función de transferencia, que en este caso cambió de la configuración de Ganancia-Polos-Ceros a la configuración tradicional de Ceros-Polos y finalmente el último componente (Scope) es una herramienta que permite observar mediante una gráfica el comportamiento del diagrama de bloques diseñado. En la Figura 6. 8, se muestran los resultados obtenidos por el componente Scope, en una simulación de 2 segundos.

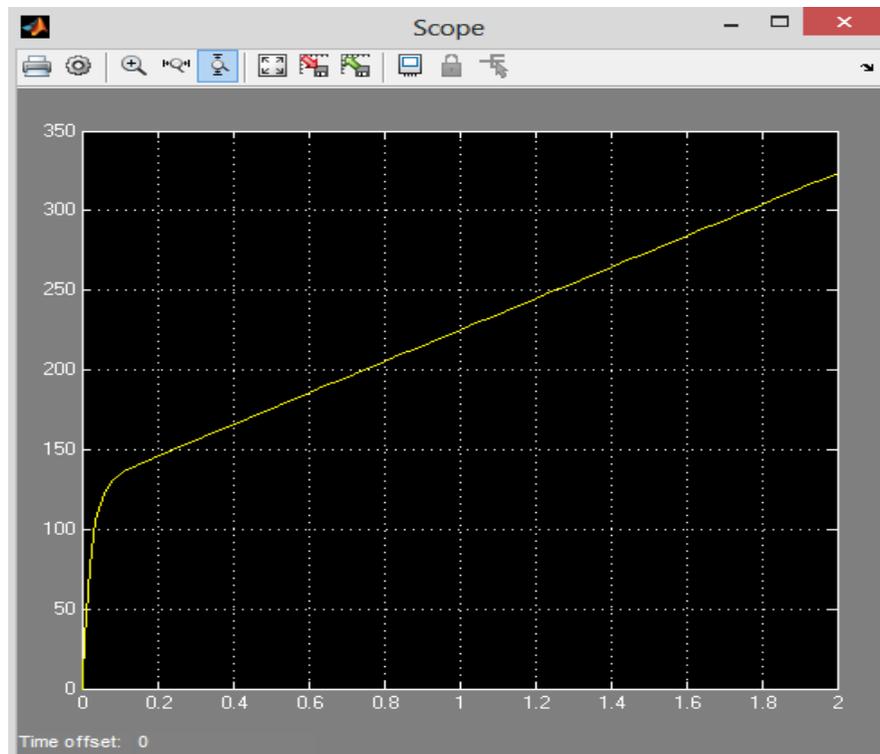


Figura 6. 8: Simulación del comportamiento del modelo en lazo abierto.

Fuente: El Autor.

Como se puede observar sin la realimentación, el sistema no tiene la información necesaria para compensar el error a través de los actuadores y la potencia del reactor sube indefinidamente. Para poder determinar si mediante la realimentación el modelo puede alcanzar un estado estable, se debe observar su comportamiento en lazo cerrado. Se utiliza el mismo procedimiento, pero en este caso la simulación se la realiza con el sistema realimentado.

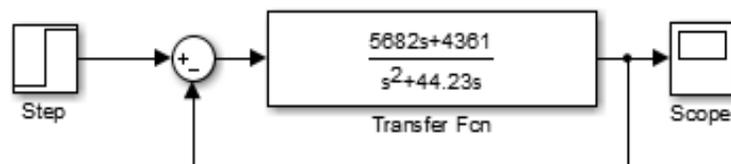


Figura 6. 9: Diagrama de bloques del modelo del reactor nuclear mediante SIMULINK en lazo cerrado.

Fuente: El Autor.

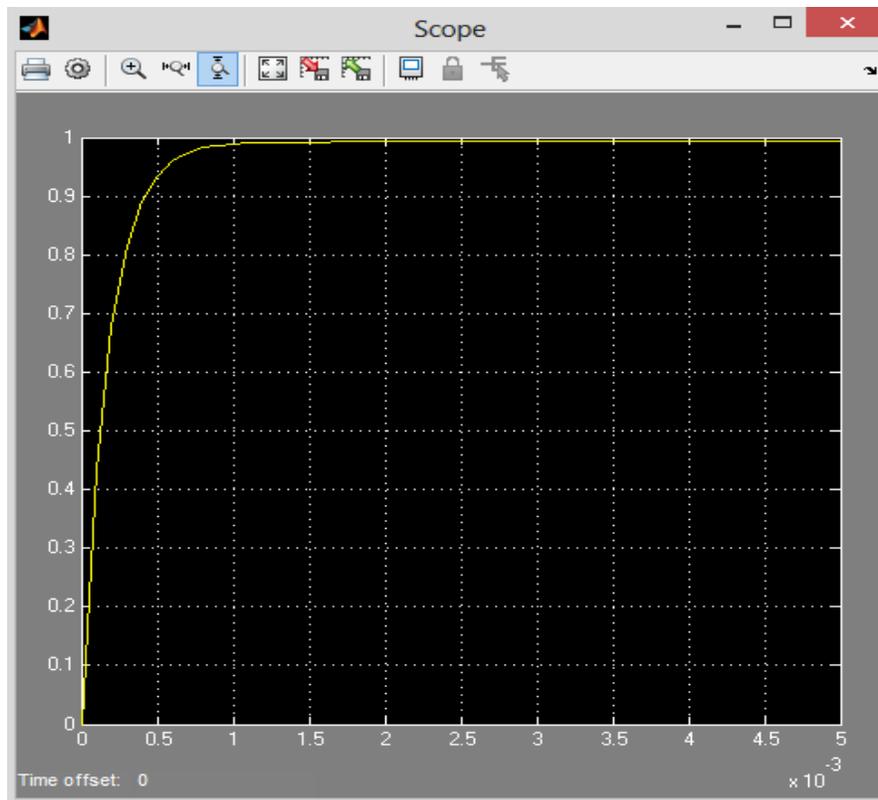


Figura 6. 10: Simulación del comportamiento del modelo en lazo cerrado.

Fuente: El Autor.

Como se puede observar en la Figura 6. 10, el sistema tiene un comportamiento muy bueno, ya que con la información de la variable de la salida, se logró compensar el error en un tiempo muy corto (aproximadamente 0.0025 segundos). Este comportamiento se logra ya que una información muy importante de la variable de salida del sistema, es la concentración de precursores, que emiten neutrones retardados, lo cual hace que la reacción del sistema mejore y se logre compensar el error en un tiempo corto.

Ahora bien, la Figura 6. 10 describe un comportamiento de la lectura del sistema en lazo cerrado, pero no representa la acción real de los actuadores en un reactor nuclear, ya que su tiempo de respuesta en la realidad es mucho mayor que el tiempo obtenido en la simulación. Para obtener datos que se aproximen a la realidad de la velocidad de los actuadores, se colocará un controlador PID antes de la función de transferencia de la planta, con esto se simulará el tratamiento de

la señal de entrada, demoras en la reacción de los actuadores y ruidos que ingresen al sistema, esto hará que la respuesta del modelo sea mayor, pero será parecida a la reacción en el mayor tiempo que se da en los reactores nucleares. De igual forma se utilizará las herramientas de SIMULINK para realizar el diagrama de bloques del sistema, así como también el dimensionamiento de los valores del controlador PID, a continuación se muestra este proceso en las siguientes gráficas.

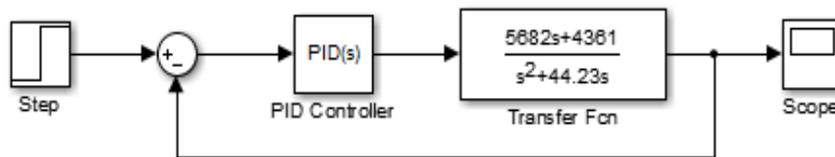


Figura 6. 11: Diagrama de bloques del control PID del modelo del reactor nuclear.

Fuente: El Autor.

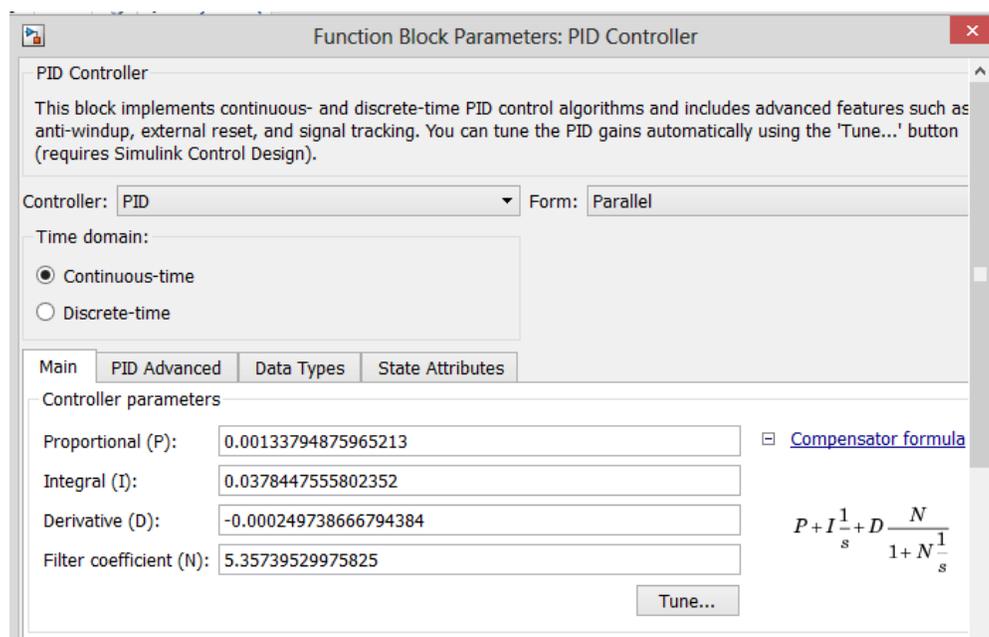


Figura 6. 12: Dimensionamiento de los parámetros del controlador PID, a través de la función Tuning de SIMULINK.

Fuente: El Autor.

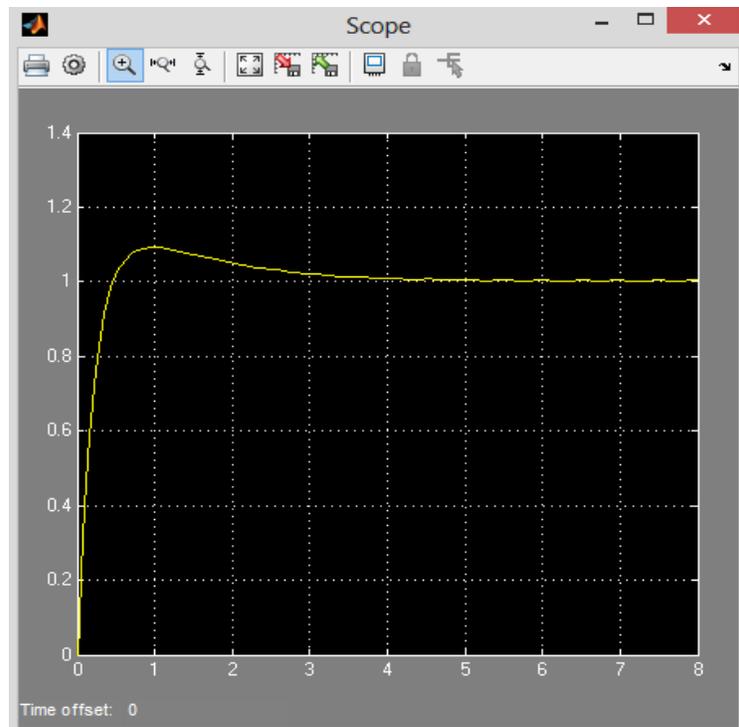


Figura 6. 13: Simulación del comportamiento del sistema con un controlador PID.

Fuente: El Autor.

Con la herramienta Tuning de SIMULINK, se logró dimensionar las variables del controlador PID, una vez diseñado el controlador, se procedió a realizar la simulación, los datos obtenidos, que se muestran en la Figura 6. 13, muestran que el sistema se estabiliza aproximadamente a los 5 segundos y su sobre-pico es menor al 10% de la señal de entrada, estos datos se acercan más a la realidad, que los datos obtenidos en el modelo en lazo cerrado, ya que se dan circunstancias en las que el control del reactor no tiene que ser muy rápido, debido a que puede inducir una subida abrupta de la reactividad. En otros escenarios, cuando el reactor nuclear requiere la introducción total de las barras de control en el menor tiempo posible (Alerta de reactividad), el sistema deja caer a las barras de control por medio de la gravedad, de esta forma, las barras absorben la mayoría de neutrones libres en un tiempo muy corto, que es el que tardan las barras en caer una distancia similar a la altura del elemento combustible.

CAPÍTULO 7

CONCLUSIONES

La energía nuclear en el Ecuador no ha sido tomada en cuenta en comparación con otras alternativas de energía, esto no quiere decir que en un futuro no se la considere como una opción para integrar la matriz energética del país. Este proyecto servirá como base de futuras investigaciones en este campo, ya que detalla los principios generales y específicos de su aplicación. Es importante mencionar que mientras más investigaciones se realicen en el país en relación a la energía nuclear, más se concientizará a la sociedad al respecto, lo que permitirá crear debates, eliminar prejuicios, desarrollar nuevas ramas de investigación y demás, pero sobre todo ser una alternativa latente para el país como fuente de producción de energía.

7.1 CONCLUSIONES DE LA INVESTIGACIÓN

A continuación se describen las conclusiones del proyecto.

- 1) En el Capítulo 2 se estudió los principios básicos de la fisión nuclear, detallando las leyes que rigen este fenómeno y conjuntamente con las leyes de transporte, se desarrolló el modelo matemático de un reactor nuclear (Ecuación lineal de Boltzmann). En esta ecuación se determinó que se pueden realizar distintos tipos de aproximaciones y simplificaciones, por ejemplo, transformar al modelo en un problema de criticidad o en un problema de fuente, de igual forma se puede plantear a la ecuación con neutrones monoenergéticos o con energías variables, se puede simplificar las dimensiones de la ecuación, para estudiarla en, tres, dos o en una dimensión. Es ésta en sí, la importancia de desarrollar desde las bases de la fisión nuclear el modelo matemático, ya que el lector entra en conocimiento de cada proceso y para futuras investigaciones se tiene

desarrollada la Ecuación lineal de Boltzmann, con lo que se puede aplicar otro tipo de simplificaciones y solucionar otros problemas en el área de la neutrónica.

2) La diversidad de métodos numéricos aplicados, permitió desarrollar distintas destrezas en la discretización del dominio espacial, además se logró determinar la eficacia de cada método, con lo cual el lector puede tomar las mejores características de cada desarrollo, para dar solución a problemas similares o a los problemas planteados en la sección 7.2.

3) Los métodos numéricos más exactos en la discretización de la variable espacial fueron, el Método de los Elementos Finitos (4 elementos cuadrados) y el método de Euler Mejorado.

El método de Euler Mejorado presentó un error del 0.0284 %, evaluado en un número de puntos igual a 980, lo cual es un resultado muy bueno, considerando las cantidades de operaciones y número de particiones que se manejan en otros productos de simulación. A pesar de que es un método tradicional y fácil de aplicar, sus buenos resultados radican en el conjunto de técnicas que se aplicaron para reducir el número de operaciones del algoritmo final.

El método numérico más exacto fue el método de los Elementos Finitos con 4 elementos cuadrados, presentando un error del 0.0268 %, esto indica claramente que el método es muy bueno en la solución de ecuaciones similares al problema de fuente. Por presentar pocas restricciones en su aplicación y obtener datos muy buenos utilizando un número bajo de elementos finitos, el MEF es el método numérico más eficiente en la solución de la ecuación lineal de Boltzmann en una dimensión.

4) En la aplicación y resultados, se determinó que en los problemas de neutrónica, la información principal para obtener datos de energía y temperaturas en la varilla de combustible es el flujo de neutrones, partiendo

de este valor se calculó la energía producida por la barra de combustible y se desarrolló un modelo de temperaturas en cada elemento de la varilla. Los resultados obtenidos de la concentración de neutrones tuvieron un comportamiento muy definido, el flujo se comporta como una función Seno de $[0, \pi]$; incluso variando los parámetros del material fisible y de la fuente, dentro de valores reales, el flujo escalar de neutrones tiene el mismo comportamiento.

La concentración de neutrones es directamente proporcional a la energía generada, por tal motivo los resultados de la gráfica de temperaturas presentan el mismo comportamiento del flujo neutrónico, mayor producción de energía en el centro y menor producción en el extremo de la barra.

- 5) La teoría del control automático en un reactor nuclear da a conocer otros conceptos muy diferentes a los manejados en la neutrónica. En el control de reactores nucleares se manipulan las ecuaciones de la cinética de los neutrones, para poder aplicar las herramientas del control automático y determinar la o las configuraciones de un controlador, conjuntamente con sus parámetros de diseño. De esta forma se profundiza en los conceptos de control en reactores nucleares, para que en un futuro se puedan realizar proyectos en esta área.

7.2 ESTUDIOS FUTUROS

Después de analizar los resultados obtenidos y determinar el alcance del software de simulación, se sugiere seis posibles direcciones a seguir, que se nacen de la finalización del presente proyecto.

- Resolver la ecuación lineal de Boltzmann en una dimensión, para el problema de fuente, con neutrones multienergéticos y comparar los resultados obtenidos con el problema monoenergético.
- Resolver la ecuación lineal de Boltzmann en dos dimensiones y comparar los resultados con la solución unidimensional.

- Resolver la ecuación lineal de Boltzmann en una dimensión con métodos numéricos estocásticos y comparar su eficiencia con los métodos numéricos determinísticos.
- Desarrollar un modelo de energético, que permita obtener el perfil de temperaturas en cada punto de la varilla de combustible, tomando en cuenta la dilatación de los materiales, las presiones del gas y del refrigerante, para cualquier reactor nuclear.
- Resolver el problema de termohidráulica en una varilla de combustible, desarrollando un código que se acople al software de simulación y de esta forma obtener resultados de la neutrónica y de la termohidráulica en la varilla de combustible.
- Resolver el problema de criticidad del reactor nuclear, aplicado a la varilla de combustible.

Bibliografía

- Agency, I. A. (21 de 01 de 2013). *International Atomic Energy Agency*. Recuperado el 21 de 01 de 2013, de International Atomic Energy Agency: <http://www.iaea.org>
- Benalcazar Gómez, H. (2012). Algebra Lineal y sus Aplicaciones. En H. Benalcazar Gómez, *Algebra Lineal y sus Aplicaciones* (págs. 289-297). Quito: Serie de Matematica Universitaria.
- Bird, S. (1998). LA ECUACION DE CONTINUIDAD. En S. Bird, *Fenómenos de transporte* (págs. 3.4-3.17). Lightfoot.
- Bourbaki, N. (2004). *Integration I*. Springer Verlag.
- Cavero, J. P. (1989). *Historia de la Energía Nuclear*. Barcelona: Anatomia de la historia.
- Charles, F. B. (1957). Nuclear Engineering. En F. B. Charles, *Nuclear Engineering* (págs. 11-13). New York: McGraw-Hil.
- ComEnergy. (2012). *Energía Nuclear*. Recuperado el 05 de Enero de 2013, de Energía Nuclear: http://energia-nuclear.net/Tipos_de_energia
- Dominguez, S., Pascual, C., Sebastian, J., & Jimenez, A. (2006). Observabilidad. En S. Dominguez, C. Pascual, J. Sebastian, & A. Jimenez, *CONTROL EN EL ESPACIO DE ESTADO* (pág. 117). Madrid: Pearson Education.
- Editor. (08 de 05 de 2013). *Pi Medios*. Recuperado el 28 de 08 de 2013, de Pi Medios: <http://pimedios.es/2013/05/08/breve-historia-de-los-metodos-numericos-en-ecuaciones-diferenciales/>
- EFER, J. (05 de 07 de 2011). *History Msc*. Recuperado el 30 de 08 de 2013, de History Msc: <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Euler.html>
- Energía Nuclear*. (15 de 03 de 2009). Recuperado el 09 de 08 de 2012, de <http://energia-nuclear.net/reactor-nuclear/tipos-de-reactor-nuclear.html>
- Energía Nuclear*. (26 de Mayo de 2012). Recuperado el 20 de Enero de 2013, de Energía Nuclear: http://energia-nuclear.net/situacion/energia_nuclear_en_el_mundo.html
- Fomin, I. M. (2003). *Calculus of Variations*. Dover Publications Inc.
- Glasstone, S., & Sesonske, A. (1984). EXTRACCION DE ENERGIA. En S. Glasstone, & A. Sesonske, *Ingeniería de reactores nucleares* (pág. 423). Barcelona: Reverte.
- Glasstone, S., & Sesonske, A. (1984). SECCIONES EFICACES DE FISION. En S. Glasstone, & A. Sesonske, *Ingeniería de reactores nucleares* (pág. 96). Reverte.

- Glasstone, S., & Sesonske, A. (1984). VELOCIDAD DE FISION Y POTENCIA DE UN REACTOR. En S. Glasstone, & A. Sesonske, *Ingeniería de reactores nucleares* (págs. 95-97). Barcelona: Reverte.
- Glasstone, S., & Sesonske, A. (1990). El problema de criticidad. En S. Glasstone, & A. Sesonske, *Ingeniería de Reactores Nucleares* (pág. 119).
- Glasstone, S., & Sesonske, A. (1990). FUNCION DE TRANSFERENCIA DE LA CINETICA DE LOS REACTORES. En S. Glasstone, & A. Sesonske, *Ingeniería de reactores nucleares* (pág. 330). Barcelona: Reverte.
- Gregory Choppin, J.-O. L. (2001). *Radiochemistry and Nuclear Chemistry*. Butterworth-Heinemann.
- Hacker85. (s.f.). *MetNumVCM*. Recuperado el 30 de 08 de 2013, de MetNumVCM: metnumvmc/unidad-i-2/1-2-1-2-conceptos-basicos-cifra-significativa-precision-exactitud-incertidumbre-y-sesgo
- Harlan, C. (12 de Marzo de 2013). *The Japan Times News*. Recuperado el 17 de Marzo de 2014, de The Japan Times News: <http://www.japantimes.co.jp/news/2013/03/12/national/work-resumes-on-aomoris-new-oma-nuclear-plant/#.UzIBwfldUWk>
- Incropera, F. P., & Dewitt, D. P. (1999). CONVECCION FORZADA. En F. P. Incropera, & D. P. Dewitt, *Fundamentos de Transferencia de Calor* (págs. 311-316). Mexico: Prentice-Hall.
- Incropera, F. P., & P, D. D. (1999). Sistemas Radiales. En F. P. Incropera, & D. D. P, *Fundamentos de Transferencia de Calor* (págs. 106-109). Mexico: Prentice-Hall.
- Jakobsen, H. A. (2007). Equation of Change for Multi-Component Mixtures. En H. A. Jakobsen, *Chemical Reactors Modelling* (págs. 8-17). Berlin: Springer.
- Kuo, B. C. (1996). Controlabilidad de sistemas lineales. En B. C. Kuo, *Sistemas de Control Automatico* (pág. 275). Juarez: Prentice-Hall.
- Kuo, B. C. (1996). Definición de controlabilidad de estado. En B. C. Kuo, *Sistemas de Control Automatico* (págs. 276-277). Juarez: Prentice-Hall.
- Kuo, B. C. (1996). Especificaciones de diseño. En B. C. Kuo, *Sistemas de Control Automatico* (págs. 665-711). Juarez: Prentice-Hall.
- Kuo, B. C. (1996). Relación entre las ecuaciones de estado y las funciones de transferencia. En B. C. Kuo, *Sistemas de Control Automatico* (págs. 242-243). Juarez: Prentice-Hall.
- Kuo, B. C. (1996). Sistemas de Control Automatico. En B. C. Kuo, *Sistemas de Control Automatico* (págs. 227-229). Naucalpan de Juarez: Prentice-Hall.
- Lamarsh, J., & Anthony, B. (2001). *Introduction to Nuclear Engigeering*. Prentice Hall.

- Landolt H., B. R. (2005). *Nuclear Energy: Principles of fission reactors*. Berlin Heidelberg: Springer.
- Lewis, E. E. (1984). Contributions to the total neutron balance. En E. E. Lewis, & W. F. Miller, *Computational Methods of Neutron* (págs. 29-39). New York: John Wiley & Sons.
- Lewis, E. E. (1984). Integro-differential neutron Boltzman equation. En E. E. Lewis, & W. F. Miller, *Computational Methods of Neutron Transport* (págs. 4-5). John Wiley & Sons.
- Lewis, E. E. (1984). Integro-differential neutron Boltzman equation. En E. E. Lewis, & W. F. Miller, *Computational Methods of neutron transport* (págs. 5-8).
- Lewis, E. E. (2008). Section 1-2. En E. E. Lewis, *Fundamentals of Nuclear Reactor Physics* (págs. 12-13). AP.
- Lewis, E. E. (2008). Section 1-2 . En E. E. Lewis, *Computational Methods of Nutron Transport* (págs. 7-8). 1st Edition.
- Lewis, E. E., & Miller, W. F. (1984). Monoenergetic Aproximation. En E. E. Lewis, & W. F. Miller, *Computational Methods of Neutron* (págs. 17-25). New York: John Wiley & Sons.
- LLC, W. E. (2013). IAEA. Recuperado el 3 de Febrero de 2014, de IAEA:
[http://www.iaea.org/OurWork/ST/NE/NEFW/Technical_Areas/NFC/documents/fuel-engineering/TM-Chengdu-2013/Presentations/Session_3/3.8_Preliminary_Assessment_of_Accident_Tolerant_Fuel_Performance_at_Normal_and_Accident_Conditions_\(P._Xu,_et._al.\).pdf](http://www.iaea.org/OurWork/ST/NE/NEFW/Technical_Areas/NFC/documents/fuel-engineering/TM-Chengdu-2013/Presentations/Session_3/3.8_Preliminary_Assessment_of_Accident_Tolerant_Fuel_Performance_at_Normal_and_Accident_Conditions_(P._Xu,_et._al.).pdf)
- Lopes, Z. A. (2011). El metodo de los elementos finitos: Una introduccion. En Z. A. Lopes, *El metodo de los elementos finitos: Una introducción* (págs. 1-2). Maracaibo: Fondo Editorial Universidad Rafael Urdaneta.
- Rainer, F., Bernard, G., & Olivier, M. (2003). symmetry-preserving for steady state systems. En F. Rainer, G. Bernard, & M. Olivier, *Direct and Large-Eddy Simulation V* (pág. 45). Amsterdam: Springer Netherlands.
- Reddy, J. (2006). An introduction to the Finite Element Method. En J. Reddy, *An introduction to the Finite Element Method* (págs. 41-47). Texas: McGraw-Hill Higher Wducation.
- Reinoso, J. (10 de Marzo de 2014). *El Pais*. Recuperado el 17 de Marzo de 2014, de El Pais:
http://sociedad.elpais.com/sociedad/2014/03/10/actualidad/1394474971_124817.html
- REIS, T. (1968). *TECNOLOGIA DE LOS REACTORES NUCLEARES*. URMO, S.A. DE EDICIONES.
- Romero, E. M. (1996). *Energia Nuclear*. Madrid: CONSEJO SUPERIOR DE INVESTIGACIONES CIENTIFICAS.
- Salgado, F. (17 de 05 de 2013). La Energia nuclear en Ecuador. (D. Echeverria., Entrevistador)

- Sanchez, R., & Santandrea, S. (2002). Treatment of boundary conditions. En R. Sanchez, & S. Santandrea, *Nuclear Computational Science* (pág. 7).
- Sccheben, F. (2011). *Iterative Methods for Critically Computations in Neutron Transport Theory*. Bath.
- Senplades. (2013). *Buen vivir*. Recuperado el 17 de Marzo de 2014, de Buen vivir: <http://www.buenvivir.gob.ec/>
- Sesonske, S. G. (1990). Conceptos del flujo de neutrones. En S. G. Sesonske, *Ingeniería de Reactores Nucleares* (págs. 21-25). Barcelona: Reverte.
- Thomée, V. (1969). *Stability Theory for Partial Difference Operators*. SIAM Review.
- Todreas, N. E., & Kazimi, M. S. (2011). En N. E. Todreas, & M. S. Kazimi, *Nuclear Systems* (pág. 435).
- Todreas, N. E., & Kazimi, M. S. (2011). Gas Conductance Models. En N. E. Todreas, & M. S. Kazimi, *Nuclear Systems Volume I: Thermal Hydraulic Fundamentals* (págs. 418-419). Taylor & Francis.
- Tong, L. S., & Weisman, J. (1996). *Thermal Analysis of Pressurized Water Reactors*. Taulor Francis.
- Tsoufanidis, R. G. (1993). *The Nuclear Fuel Cycle: Analysis and Management*. Amer Nuclear Society.
- Twenergy, C. (01 de Diciembre de 2011). *Twenergy*. Recuperado el 12 de Agosto de 2013, de Twenergy: <http://twenergy.com/energia-nuclear>