

**Universidad Internacional del Ecuador**



**Facultad de Ingeniería Mecánica Automotriz**

**Artículo de Investigación para la obtención del Título de Ingeniero en Mecánica  
Automotriz**

**Estudio numérico y digital de la influencia del tamaño de las ruedas sobre el brazo de  
suspensión en un vehículo SUV**

**Mateo Felipe Vera Mendizábal**

**Director: Ing. Gorky Reyes**

**Quito, Octubre 2019**



## **CERTIFICADO**

## DEDICATORIA

## AGRADECIMIENTO

## ÍNDICE DE CONTENIDO

<b>Certificación</b> .....	III
<b>Dedicatoria</b> .....	IV
<b>Agradecimiento</b> .....	V
Resumen.....	8
Introducción.....	9
Marco teórico.....	10
Materiales y métodos.....	10
Resultados y discusión.....	15
Conclusiones.....	17
Referencias.....	18
ANEXOS.....	20

### ANEXOS INTRODUCCIÓN

Anexo 1: <i>Simulación en modélica de elementos mecánicos de una suspensión</i> .....	21
Anexo 2: <i>Revisión de las Características de Modelado y Optimización para el Diseño del Sistema de Suspensión</i> .....	36
Anexo 3: <i>Estudio numérico y experimental de la influencia del tamaño de las ruedas sobre los elementos de la suspensión</i> .....	46
Anexo 4: <i>Simulación virtual de una suspensión McPherson en entorno</i> .....	58
Anexo 5: <i>Método de los elementos finitos para análisis estructural</i> .....	62

### ANEXO FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Anexo 6: <i>El método de los elementos finitos. Reverté</i> .....	68
Anexo 7: <i>Anuario 2016</i> .....	85
Anexo 8: <i>Consideraciones cinemáticas y dinámicas para el desarrollo de control a un sistema de suspensión</i> .....	89

### ANEXOS MATERIALES Y MÉTODOS

Anexo 9: <i>Diseño de la suspensión delantera de un vehículo de competición fórmula SAE</i> .....	96
Anexo 10: <i>Control Tolerante a Fallas en una Suspensión Automotriz Semi-Activa</i> .....	107
Anexo 11: <i>Ensayo de Fatiga en Flexión Rotativa del Acero AISI-SAE 1018 por el Método Esfuerzo-Vida</i> .....	118
Anexo 12: <i>Analytical and experimental studies on fatigue life prediction</i> .....	124
Anexo 13: <i>Diseño de una suspensión para un vehículo automóvil basada en amortiguadores magneto-reológicos</i> .....	129

Anexo 14: <i>Modelado analítico y control inteligente de un sistema de suspensión activa para un cuarto de vehículo</i> .....	134
Anexo 15: <i>Modelación por Elementos Finitos como Método para la Sustitución de Piezas de Acero por Hierro Nodular</i> .....	152
Anexo 16: <i>Condiciones a simular y cálculo de cargas de cada eje</i> .....	158
Anexo 17: <i>Diseño de suspensión hidráulica para un vehículo todo terreno</i> .....	163
Anexo 18: <i>Análisis mediante MEF del sistema de suspensión de un auto liviano</i> .....	165
Anexo 19: <i>Modelado y simulación de un sistema de suspensión de ¼ de vehículo</i> .....	171

# ESTUDIO NUMÉRICO Y DIGITAL DE LA INFLUENCIA DEL TAMAÑO DE LAS RUEDAS SOBRE EL BRAZO DE SUSPENSIÓN EN UN VEHÍCULO SUV

*Ing. Gorky Reyes*

*goreyesca@internacional.edu.ec*

*Ingeniería Automotriz Universidad Internacional del Ecuador*

*Mateo Felipe Vera Mendizábal*

*maverame@internacional.edu.ec*

## Resumen

Es común encontrar hoy en día vehículos SUV modificados por razones estéticas, principalmente sus aros y neumáticos son los primeros elementos en ser reemplazados. El auge del mercado asiático ha puesto al alcance una gran variedad de atractivos modelos y diseños siempre de mayor dimensión, se conoce que estas alteraciones podrían repercutir en otros subsistemas principalmente en la suspensión. Hasta el momento no se ha llevado a cabo un estudio que establezca un criterio técnico para estas modificaciones. Se desarrolló un análisis virtual de la repercusión que tiene la modificación de las dimensiones de ruedas y neumáticos 235/65 R17 y 235/55 R18 sobre los subsistemas de la suspensión en un vehículo SUV. Son dos casos de estudio, donde el brazo de suspensión es el elemento que más esfuerzos y régimen crítico de trabajo presentó en la investigación. Al modificar las dimensiones de las ruedas y neumáticos se presentan variaciones de esfuerzos en la zona externa con respecto al bastidor, en zonas centrales y zonas periféricas del elemento. Se comprobó que las condiciones de trabajo se vuelven más exigentes para el brazo de suspensión, los resultados obtenidos indican que al sustituir el neumático por uno de mayor dimensión aumentan los valores de deformación unitaria, en las diferentes zonas estudiadas, por tanto los valores de los esfuerzos en el eje X en este elemento aumentan aproximadamente 28% y en un 24% en los esfuerzos en el eje Y, lo que significa que no representa un potencial peligro debido al margen de seguridad del material sin embargo las exigencias para el elemento incrementan.

**Palabras clave:** brazo de suspensión, esfuerzo, simulación numérica, desplazamiento, neumático

## Summary

It's common to find today modified SUV vehicles for aesthetic reasons, mainly their tires are the first to be replaced. The Asian market development has made available a wide variety of attractive models and designs in most of cases bigger than original, it is known that these alterations could affect other subsystems mainly in the suspension. However, no study has been carried out that establishes a technical reason for these modifications. A virtual analysis of the impact of modifying the dimensions of wheels and tires 235/65 R17 and 235/55 R18 on the subsystems of the suspension in an SUV vehicle was developed. The model has the ability to simulate dynamic conditions of the suspension mechanism to verify in this way the stresses on each component.

There are two cases of study, the suspension arm is the element that most efforts and critical work regime presents. It is possible to demonstrate that when modifying the dimensions of the wheels, there are variations of forces in the external zone with respect to the frame (ball joint), in central areas and peripheral areas of the element. It was found that the working conditions become more demanding for the suspension arm, the results obtained indicate that when replacing the tire with a bigger one, the values of unit displacement increase, in the different areas studied, therefore the values of the Efforts in the X axis in this element increase approximately 24% and in 28% in the efforts in the Y axis which means that it does not represent a potential hazard due to the safety margin of the material, however the demands for the subsystems increase the work condition effort,.

**Key words:** Suspension arm, effort, simulation, displacement, hazard, tyre



## 1. INTRODUCCIÓN

Alrededor de todo el mundo se fabrican aros y neumáticos de todos los tamaños y distintos diseños estructurales. La tendencia de los últimos años es cambiar por ruedas de mayor tamaño comparadas a la diseñada y recomendada por el fabricante con la única finalidad de mejorar el aspecto estético de los vehículos, por tal motivo se estudió las características físico/técnicas que tienen impacto en la suspensión al elevar las dimensiones de aros y llantas.

Hoy en día los sistemas de suspensión requieren un análisis complejo para su desarrollo, la dinámica de los elementos es uno de los pilares fundamentales en su construcción. Encontrar el sistema de suspensión idóneo para cada modelo es el reto de los fabricantes de autos. [1]

Los sistemas de suspensión automotriz de la actualidad poseen algunas ventajas en su desempeño en cuanto al confort, maniobrabilidad y durabilidad, sin embargo existen elementos susceptibles a daños y fatigas de material prematuras producidas por modificaciones realizadas. [2]

El diseño de los componentes del sistema de suspensión se ha llevado a cabo a través de metodologías analíticas y supuestos, en los cuales se analiza aisladamente su función, trabajando en conjunto con todos los subsistemas que componen el sistema McPherson por ser el más utilizado [3], sin embargo no se tiene certeza de que tanto puede variar el comportamiento sin dejar de cumplir los requerimientos técnicos establecidos por las normas.

Hasta la llegada del Método de los Elementos Finitos (MEF), los sistemas continuos se abordaban analíticamente área por área, pero por esa vía sólo es posible obtener solución para sistemas con geometría muy sencilla debido a que este proceso genera un sistema lineal de ecuaciones por lo general muy grande para ser resuelto a mano es por eso que este método recién se popularizó con el avance de la tecnología en el cual el ordenador procesa en milisegundos. [4]

No es fuera de lo común que para una estructura sencilla se generen cerca de diez mil ecuaciones con diez mil incógnitas. [5] Por lo tanto la herramienta se vuelve

imprescindible para la resolución en serie de ecuaciones.

En la investigación se realizó un análisis, para encontrar las deformaciones y esfuerzos del brazo de suspensión cuando se varían las dimensiones de las ruedas 235/65 R17 y 235/55 R18 y con la ayuda de modelos digitales y simulaciones de esfuerzos en Ansys Free Student Software se obtuvo la lectura de los mismos.

En la actualidad se desconoce los efectos que estas modificaciones generan en cada elemento que compone el sistema. Por ello, se realizó un análisis de los esfuerzos que soporta el brazo de suspensión delantero de una suspensión, con la finalidad de establecer un criterio técnico de las consecuencias que presenta el cambiar la dimensión de las ruedas, sobre los componentes del sistema principalmente el brazo de suspensión que presentan inconvenientes de fatiga de forma prematura, originando mantenimientos correctivos no deseados y antes de lo previsto por el fabricante.

En la presente investigación fueron considerados conceptos fundamentales de la dinámica vehicular, separando en diagramas de cuerpo libre los subsistemas para la lectura de fuerzas, aceleraciones, momentos, etc.

También es importante la interpretación de las ecuaciones que describen dicho comportamiento. Para ello en esta investigación se da un resumen de todo aquello que es importante considerar al momento de hacer un análisis de un sistema de suspensión y las ecuaciones que permitieron obtener los valores de entrada del modelo de elemento finito del SUV. [5]

## 2. ELEMENTOS DE SUSPENSIÓN

Es un tipo de suspensión ampliamente utilizado en los automóviles modernos, toma su nombre de Earl S. McPherson, un ingeniero que la desarrolló para su uso en 1951, en el modelo Ford Consul y después en el Zephyr. Puede ser utilizada tanto en el eje delantero como en el trasero, si bien habitualmente se utiliza en el delantero, donde proporciona un punto de apoyo a la dirección y actúa como eje de giro de la rueda. [6]

La suspensión McPherson tiene muchas ventajas, entre las que se destaca su simplicidad, lo que implica un coste de fabricación muy bajo. Es el sistema más compacto y liviano. Actualmente es el sistema, permite un menor número de componentes. [7]



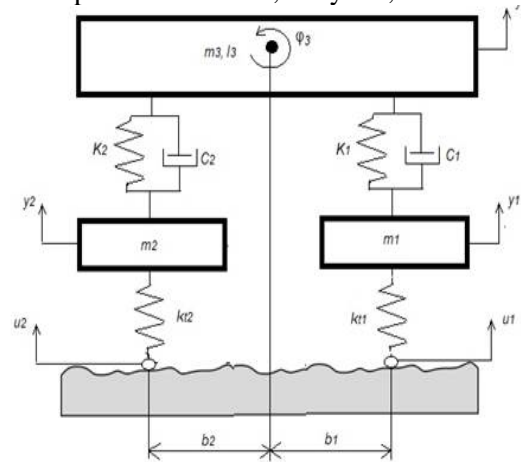
**Figura 1:** Suspensión McPherson  
**Fuente:** [1]

Los elementos que componen el sistema McPherson se visualizan en la figura 1 y estos son: cojinete superior, amortiguador, muelle helicoidal, brazo de suspensión, mangueta y rótula. [7]

Por medio de la rueda y neumático, se transfieren las diferentes cargas ocasionadas por el tipo de calzada, aceleración, frenado, arranque y posición estática, hacia los componentes del sistema de suspensión y al chasis. Para esto todos los componentes de la suspensión se encuentran unidos por elementos de unión como rótulas y pernos. [8]

En la figura 2 se introduce los componentes individuales necesarios para la creación del modelo, consta de una masa suspendida

$m_A$ , masas no suspendidas  $m_2$  y  $m_1$ , la rigidez de la suspensión  $K_1$  y  $K_2$ , la rigidez radial de los neumáticos  $K_{z1}$  y  $K_{z2}$ , el coeficiente de amortiguamiento viscoso del sistema de suspensión  $C_1$  y  $C_2$ , además de los desplazamientos  $U_2$ ,  $U_1$  y  $Y_1$ ,  $Y_2$



**Figura 2:** Modelo de suspensión de medio vehículo  
**Fuente:** [2]

## 3. MATERIALES Y MÉTODOS

### 3.1 Método de Elementos Finitos

Se dividió la pieza geométrica que se va a estudiar (mesa de suspensión) en pequeños elementos llamados elementos finitos, de esta forma considera al modelo como un ensamble de un número finito de elementos conectados mediante nodos. El comportamiento de los elementos finitos está descrito por un sistema de ecuaciones que se resuelven por medio de un software especializado ANSYS Free Student Software. En el modelo de elementos finitos los cuales son elementos 3D, el análisis para evaluar el comportamiento de la pieza sometida a cargas estáticas será lineal y se conoce que el material es elástico.

De esta manera toda la estructura se representa mediante las ecuaciones de equilibrio en las direcciones de dichas deformaciones. [9]

Lo que permite visualizar cuantitativamente la tensión y esfuerzos de la estructura automotriz, en este caso el brazo de suspensión así permite la identificación áreas críticas lo que da con detalle donde

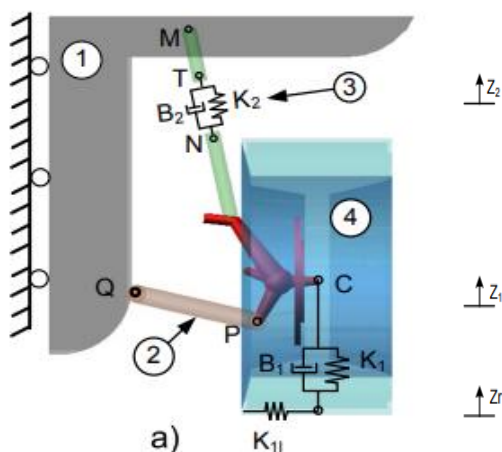
se concentran las tensiones más elevadas en el subsistema.

El método en la presente investigación obtiene resultados que pronostican la durabilidad de los componentes, la visualización de deformaciones, tensiones máximas y mínimas, esfuerzos, en el brazo de suspensión del SUV[10], el tener una lectura de las deformaciones que sufre el brazo de suspensión permite optimizar e implementar mejoras geométricas en su construcción, a la vez permitió conocer las situaciones de mayor exigencia del sistema para comprobar si la seguridad del vehículo se ve comprometida al realizar este tipo de modificaciones.

### 3.1.1 Preproceso

Dentro del análisis por elementos finitos, este paso es fundamental, se definieron por completo el modelo a estudiar (geometría), propiedades de material, definición de conexiones, mallado del sistema y estado de carga del sistema.

La figura 3 muestra una representación del modelo propuesto, donde los elementos principales del sistema de suspensión McPherson son: 1) el chasis (la masa suspendida), 2) el brazo de control, 3) el puntal McPherson y 4) el conjunto de rueda (masa no suspendida). El desplazamiento de la masa suspendida es  $Z_2$ , el desplazamiento en masa no suspendida es  $Z_1$  y la perturbación del camino es  $Z_r$ .



**Figura 3:** Modelo planar ¼ de vehículo

**Fuente:** [16]

Con soporte de J.D Valladolid como lo muestra el anexo 19 y analizando los diagramas de cuerpo libre de los cuerpos 1 y 4 correspondientes a la figura 3 se obtiene las siguientes ecuaciones.

$$1 \frac{Z_2 x_2}{Z_2 K_1^2} + \frac{Z_1(x_2 - x_1)}{Z_1 K_1} + K_2(x_2 - x_1) = 0 \quad (1)$$

$$4 \frac{Z_r^2 x_1}{Z_r K_1^2} + \frac{B_2 Z_r x_1}{Z_r K_1} + x_1(K_2 - K_1) - \frac{B_2 Z_r x_2}{Z_r K_1} - K_2 x_2 = K_1 \quad (2)$$

La constante de cada elemento se obtiene de la relación que existe entre la fuerza y la deformación para el material.

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (3)$$

La deformación unitaria del elemento se obtuvo de la razón entre la variación de la longitud y la longitud original del elemento

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} \quad (4)$$

Las ecuaciones que rigen el conjunto de elementos, rigen también el mecanismo, permitiendo pasar de un sistema que se encuentra regido por varias ecuaciones diferenciales a un sistema con un número de grados de libertad finitos modelado por un sistema de ecuaciones lineales o no.

Los sistemas a analizar presentan las siguientes partes:

Domino: Espacio geométrico donde se analiza el sistema.

Condiciones de contorno: Variables conocidas, restricciones de movimiento, cargas y desplazamientos.

Incógnitas: Variables del sistema que se desea conocer.

### 3.1.2 Datos de entrada

La carga que se utilizó en el modelo de asistencia computacional, se determinó por medio del peso real del vehículo, junto con otros parámetros del vehículo que se establecen en la tabla 1, obtenidos del manual de especificaciones técnicas del vehículo.

**Tabla 1:** Valores recopilados de ficha técnica para simulación cuasi estática del vehículo

Parámetros vehículo	Descripción o unidad
Extremo del vehículo	Frontal
Tipo de suspensión	McPherson
Radio de amortiguamiento del neumático	24.8kg/mm
Altura del centro de gravedad	470mm
Ancho de vía	1.820mm
Longitud	4.410mm
Distancia entre ejes	2.640mm
Peso del vehículo	1.410Kg o 113.818N
Peso del eje delantero	820Kg
Peso eje delantero LH	360Kg
Peso eje delantero RH	470Kg
Max torque de alineamiento	26 ft-lb- 36.60 Nm

**Fuente:** Autor

La fracción del peso del vehículo que soporta las ruedas delanteras (Izquierda 3528N Derecha 4606N) fue la carga considerada. Esta se aplica en sentido vertical ascendente, además se programó la simulación con una constante de deformación del resorte de suspensión de 30mm que es el recorrido real, en sentido vertical. La cual midió los esfuerzos generados en el plato de suspensión, cuando la rueda desciende 30mm. Adicionalmente, se muestran otros parámetros requeridos para la elaboración de la simulación en la tabla 2.

**Tabla 2:** Valores para la simulación

Parámetros de vehículo	
Recorrido de amortiguador compresión	de 30mm
Recorrido de amortiguador tracción	de 30mm
Constante amortiguamiento (k)	de $1500 \text{ Nm}^{-1} \text{ s}^{-1}$
Constante elasticidad del resorte (c)	de $117600 \text{ N m}^{-1}$

**Fuente:** Autor

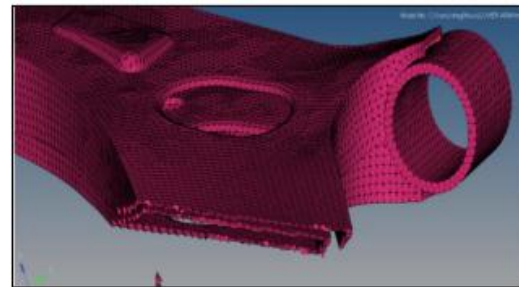
### 3.1.3 Discretización

El mallado que se observa en la figura 4 es uno de los aspectos más importantes, se establecieron criterios y valores para la elaboración del mallado del elemento estudiado. Combinaciones de elementos triangulares fueron usadas durante el mallado debido a su facilidad para acoplarse a geometrías complejas. [11]

**Tabla 3:** Criterios y valores para el mallado

Criterios	Valor
Tamaño de la malla	4mm
Tipo elemento a utilizar	Triángulo
Angulo mínimo y máximo	y 20 y 120

**Fuente:** Autor



**Figura 4:** Mallado completo de brazo de suspensión tamaño de malla (4mm) 43862 nodos

**Fuente:** [3]

### 3.1.4 Condiciones de frontera

En la simulación es fundamental determinar los puntos de apoyo del brazo de suspensión de tal manera que se asemeje a las condiciones reales, como lo muestra la figura 5, el punto 1 es donde conecta la rótula de suspensión y es libre de girar en todas las direcciones y el punto 2 y 3 se establece la conexión con bujes de suspensión, así permitió solamente el movimiento de tensión y compresión del amortiguador. Es importante mencionar que para el proceso de la simulación dinámica se han convertido los cuerpos rígidos en cuerpos flexibles. [12]

Para el ensamble de partes en el modelo digital se colocaron restricciones de unión que simulan las uniones de rótulas y pernos entre partes de la suspensión, para posteriormente ser sometidas a los esfuerzos en el modelo digital.

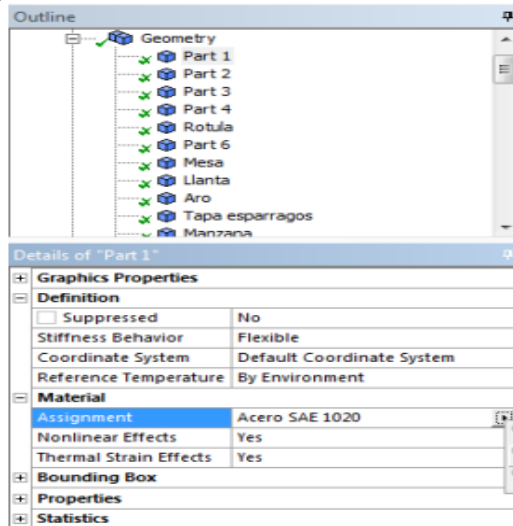


**Figura 5:** Puntos de unión para la simulación dinámica.

**Fuente:** [3]

### 3.2 Ensayo virtual

Para definir el material utilizado se colocó en el software ANSYS Student Software la celda “Engineering Data” en el cual se selecciona el material de la biblioteca del programa, como lo muestra la figura 6



**Figura 6:** Definición de materiales ANSYS

**Fuente:** [18]

#### 3.2.1 Conexiones

Se definió un tipo de conexión adecuado entre las piezas con la finalidad de que una vez realizado el mallado, los nodos sean compatibles entre sí y la transmisión de fuerzas sea posible, las regiones de contacto son puntos que interactúan con otros. Se utilizaron contactos de tipo “bonded” para asegurar que los elementos permanezcan unidos y sin deslizamientos.

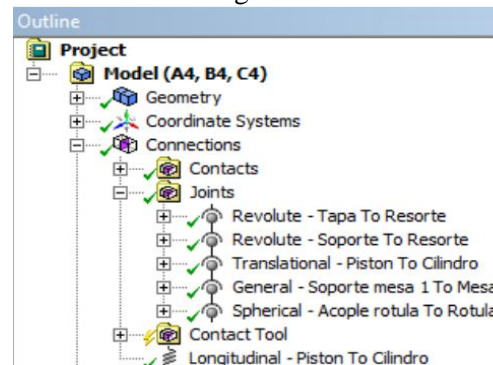
En el software se utilizaron seis tipos de uniones entre los elementos, los cuales están en la tabla 4.

**Tabla 4:** Uniones utilizadas en el sistema de suspensión

Unión	Elementos
Traslational	Pistón y cilindro amortiguador
Revolute	Resorte
Spherical	Rótula
General	Soporte Mesa / Mesa
Spring	Amortiguador
Revolute	Soporte del resorte

**Fuente:** Autor

En la figura 7 se configura las uniones; los nexos Revolute aseguraron el resorte unido a su plato inferior y superior, además le permite girar sobre su propio eje para simular el estirar y comprimirse, la unión Traslational permitió el movimiento en un solo sentido del pistón dentro del cilindro asemejando el comportamiento del amortiguador, la unión Spherical hizo posible el giro en todas las direcciones simulando la rótula, la unión General se utilizó en el soporte del brazo de suspensión con el fin de que se pueda mover durante el movimiento en sentido vertical, la unión Spring simuló la elasticidad del resorte como el amortiguamiento, dentro de los detalles de la unión se coloca la constante de amortiguamiento ( $k$ )  $1500 \text{ Nm}^{-1} \text{ s}^{-1}$  como se ve en la figura 7.



**Figura 7:** Uniones utilizadas en el sistema de suspensión

**Fuente:** [18]

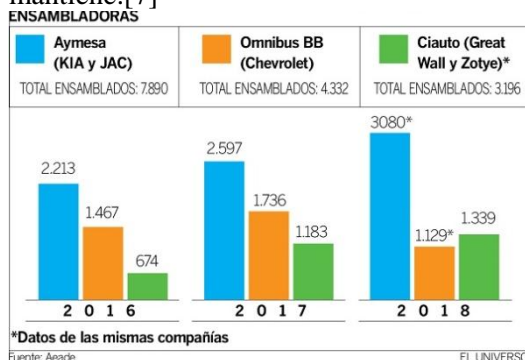
Ansyes Student Software es un programa que no utiliza unidades, es decir, dependiendo de las unidades utilizadas para definir la geometría y de las unidades utilizadas en la definición de las propiedades del material se obtienen los resultados cuyas unidades serán en función de las unidades introducidas previamente. [18]Para la obtención de resultados con unas unidades coherentes y dado a que la

modelización de la pieza es pequeña las medidas se introdujeron en milímetros, esto hizo que las unidades de desplazamientos se obtengan en milímetros y las tensiones en MegaPascales. La carga se aplicó en sentido vertical ascendente, el peso del vehículo que soporta las ruedas delanteras, izquierda: 2428N y derecha 4406N además se conjuga con el parámetro de deformación del resorte 30mm en sentido vertical, de esta manera se obtuvo los esfuerzos generados en el brazo de suspensión derecho, cuando la rueda desciende 30mm creando una carga igual a la magnitud del peso que descansa sobre el eje delantero del vehículo, haciendo que los muelles se compriman y el amortiguador comience su carrera de compresión. Mientras eso sucede, el brazo de suspensión se desplaza en sentido vertical generando un movimiento torsional en los bujes que sujetan el brazo con el bastidor del vehículo, esto hace que el muelle se comprima 150mm provocando que el vástago del amortiguador realice una carrera de igual medida, y el brazo de suspensión se deforme como consecuencia de la fuerza aplicada. Este proceso se realiza en dos casos puntuales, con ruedas 235/65 R17 y 235/55 R18.

### 3.3 Materiales

#### 3.2.1 Vehículo

Se elabora un modelo del brazo de suspensión, la geometría es obtenida del vehículo KIA SportageR el cual fue seleccionado debido a que según la AEADE es el SUV compacto que más se ensambla en el Ecuador desde Enero hasta Julio el 2016, 2017 y 2018 y la tendencia se mantiene.[7]



**Figura 8:** Número de SUV'S ensamblados en Ecuador  
Fuente: [7]

Los datos técnicos de la suspensión de obtiene del manual del vehículo Kia SportageR y constan de los valores de los ángulos que tiene la geometría de la suspensión del vehículo.

**Tabla 5:** Datos técnicos para ángulos de suspensión Kia SportageR

		Front	Rear
<b>Converg</b>	Individual	0+-0.1	0.1+-0.1
	Total	0+-0.2	0.2+-0.2
<b>Cámbor</b>		-0.5+-0.5	-0.1+-0.2
<b>Cáster</b>		4.02+-0.5	

Fuente: Autor

Se observa en la tabla 5 que cada fabricante diseña su propio sistema de suspensión, tomando en cuenta las consideraciones cinemáticas del sistema de suspensión empleado, geometría del modelo, materiales de fabricación y datos técnicos del automóvil para elaborar el cálculo de la suspensión. [15]

#### 3.2.2 Brazo de suspensión

Permite la sujeción del sistema de suspensión al bastidor y, simultáneamente, el de transmitir parte de los esfuerzos que rueda y carrocería, la unión al chasis se realizó a través de juntas elásticas para soportar el movimiento oscilatorio.

El impacto del cambio de la dimensión de las ruedas influye directamente en el desempeño de este subsistema. [16]

#### 3.2.3 Material

El material seleccionado para la simulación del brazo de suspensión es el acero SAE 1020 siendo este elemento utilizado para construcción [18] como que tiene las propiedades mostradas a continuación en la tabla 6.

**Tabla 6:** Características mecánicas del brazo de suspensión del acero SAE1020

Propiedades Mecánicas	Valor	Unidades
Módulo Young	207	GPa
Densidad	7870	Kg/m <sup>3</sup>
Esfuerzo máximo tensión elástica	380	MPa

Fuente: [2]

### 3.3 Aumento del momento de inercia de las ruedas

Las masas que no se encuentran en suspensión son mucho más sensibles a los aumentos de masa, la relación existente es de 4 veces más, es decir si se añade 4kg a las ruedas es equivalente a 16kg al auto, además de la inercia lineal se suma el momento de inercia rotacional, respecto al eje de giro.

Lo que significa que cuanto mayor es el momento de inercia más cuesta acelerarla, este dato se hace referencia debido a que el momento de inercia no solo depende de la masa de la rueda, sino también de su tamaño.

$$I = m * r * r. \quad (5)$$

Donde m es masa (Kg) y r es el radio (m)

#### Neumático 235/55 R18

$$I = 23kg * 0.37m * 0.37m.$$

$$I = 3.15 kgm^2.$$

#### Neumático 235/65 R17

$$I = 21kg * 0.35m * 0.35m.$$

$$I = 2.57 kgm^2.$$

Como se observa, uno de los factores determinantes en la inercia rotacional es la masa de la rueda [17]

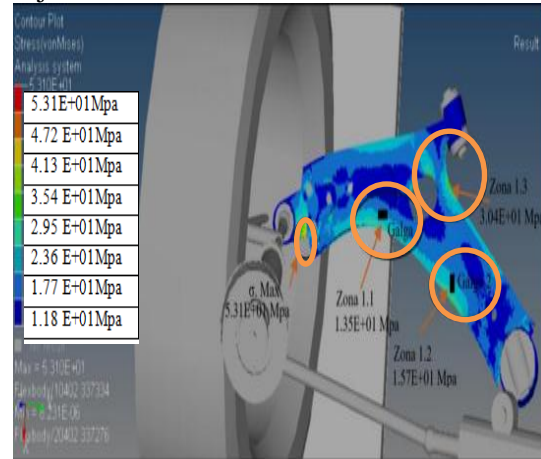
Se induce una fuerza sobre la masa no suspendida, esta responde a dicha fuerza con un movimiento inversamente proporcional a su peso, así la rueda ligera actúa más rápido ante la irregularidad en caso real y la rueda más grande por su peso y diámetro se mueve menos y a menores rpm por lo que su absorción de la

vibraciones son menores repercutiendo en el brazo de suspensión.

## 4 RESULTADOS Y DISCUSIÓN

### 4.1 Neumático 235/55 R18

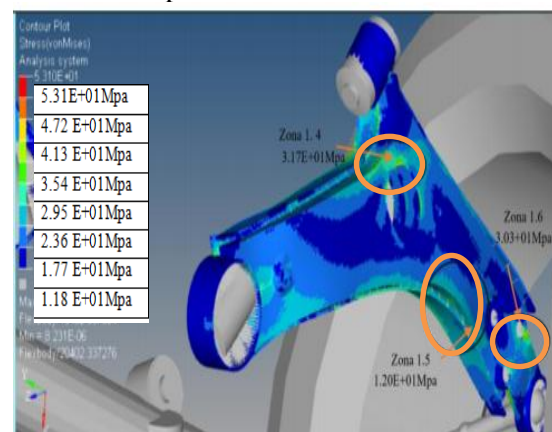
En la figura 10 se puede visualizar los esfuerzos VonMises es escala de colores, las zonas superiores del brazo de suspensión han sido asignadas una codificación para así mostrar los esfuerzos en áreas aproximadas a los puntos de sujeción en la tabla 7.



**Figura 10:** Vista superior de esfuerzos en 235/55 R18

Fuente: Autor

Mientras en la figura 11 se visualiza los esfuerzos VonMises en escala de colores, las zonas inferiores del brazo de suspensión han sido de igual forma asignada una codificación para su ubicación en la tabla 7.



**Figura 11:** Vista inferior de esfuerzos en 235/55 R18

Fuente: Autor

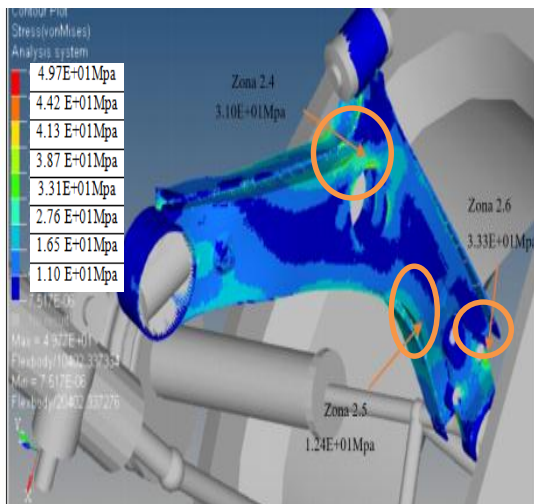
**Tabla 7:** Distribución de esfuerzos en zonas estudiadas 235/55R18

Zona	Número elemento	Esfuerzo VonMises (MPa)
σMAX	280253	51.1
Zona 1.1	290062	12.4
Zona 1.2	284019	14.3
Zona 1.3	295155	28.7
Zona 1.4	298899	31.04
Zona 1.5	265557	13.64
Zona 1.6	337768	30.25

**Fuente:** Autor

#### 4.2 Neumático 235/65 R17

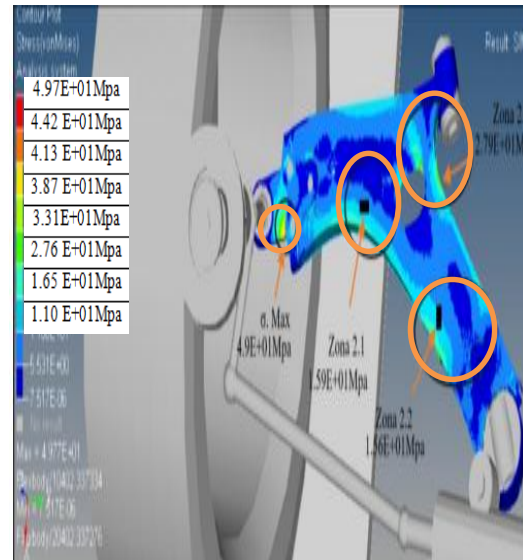
Como se observa en la figura 12, se utiliza las mismas zonas de análisis del caso anterior con designación diferente. Se observan los valores del esfuerzo que se presentaban en el brazo de suspensión en la zona 2.4 cerca del agujero pasante; 2.5 se encuentra en la parte lateral inferior del elemento y la zona 2.6 se encuentra la rótula. Los puntos donde concentran esfuerzos son detallados en la tabla 8.



**Figura 12:** Vista inferior de esfuerzos en 235/65 R17

**Fuente:** Autor

La figura 13 muestra el esfuerzo VonMises en la parte superior del brazo de suspensión, en las zonas 2.1, periferias de la rótula, 2.2 zona con el borde más largo de la geometría y la zona 2.3 ubicado en la cercanía del buje de unión al bastidor.



**Figura 13:** Vista superior de esfuerzos en 235/65 R17

**Fuente:** Autor

**Tabla 8:** Distribución de esfuerzos en zonas estudias 235/65 R17

Zona	Numero elemento	Esfuerzo VonMises (MPa)
σMAX	280253	48.6
Zona 2.1	290062	14.7
Zona 2.2	284019	14.7
Zona 2.3	295155	26.2
Zona 2.4	298899	30.3
Zona 2.5	265557	11.7
Zona 2.6	337768	32.36

**Fuente:** Autor

#### 4.3 Deformación unitaria

La tabla 9 muestra los valores de la deformación unitaria medida en el eje X, los valores de la deformación unitaria son diferentes y tienden a aumentar cuando se utiliza el neumático 235/55 R18 comparado con el 235/65 R17.



**Tabla 9:** Valores de deformación unitaria en el eje X

Neumático 235/65 R17		Neumático 235/55 R18		Variación de deformación unitaria X
Zona	Deformación unitaria Eje X	Zona	Deformación unitaria Eje X	
Max	3.72E-05	Max	4.90E-05	-1.18E-05
2.6	2.93E-05	1.4	4.10E-05	-2.62E-05
2.4	1.84E-05	1.6	2.37E-05	-5.30E-06

Fuente: Autor

Por otro lado la tabla 10 se elabora la comparación de las deformaciones unitarias medidas en el eje Y cuando la simulación se elabora con neumáticos 235/55 R18 y neumáticos 235/65 R17.

**Tabla 10:** Valores de deformación unitaria en el eje Y

Neumático 235/65 R17		Neumático 235/55 R18		Variación de deformación unitaria Y
Zona	Deformación unitaria Eje Y	Zona	Deformación unitaria Eje Y	
Max	3.44E-05	Max	4.39E-05	9.5E-06
2.3	1.16E-05	1.3	3.19E-05	2.03E-05
2.5	2.0E-05	1.5	2.66E-05	6.55E-06

Fuente: Autor

Tras lanzar la simulación de la aplicando los esfuerzos, se encuentran resultados, entre los que destacan: tensión elevada con respecto al resto de zonas en las bandas cilíndricas, se deberá tener cuidado especial a esta zona, principalmente el elemento de unión (rótula) que no fue analizado en esta investigación.

Tensión localizado en el puente de unión entre los dos cilindros, lo que significa que una mejora en su diseño sería redondear aristas para no acumular la tensión en esta zona.

En el análisis por el método de elementos finitos cada nodo posee sus propiedades fisicomecánicas propias, estas se conectan y actúan entre sí como se esperaba hay lugares donde se supera enormemente el criterio de aceptación y el límite del material como se puede verificar en la tabla

6, donde será indispensable optimizar el uso de materia para conseguir una pieza lo más ligera posible.

Deformación en la zona de aplicación del esfuerzo, es decir, la zona de contacto entre eje y brazo de suspensión. Debido a la influencia del cambio de las dimensiones de las ruedas, existe una variación en los valores de esfuerzos que soporta el brazo de suspensión en todas las zonas estudiadas, además se verificó que los esfuerzos VonMises máximo tiende a incrementar cuando se realiza el análisis con el neumático 235/55 R18 sobretodo en el porta rótula. Comparando variación de deformación unitaria en el eje X (2.91) R17 y (3.22) R18 la variación de esfuerzo entre ambas 0.28 (%) En los ejes Y (5.15) R17 (9.77) R18 con la variación de 0.24 (%). En la tabla 11 se detalla la comparativa de ambos casos de estudio.

**Tabla 11:** Comparativa de resultados

Neumático	235/55 R18	235/65/R17
Esfuerzo MAX	51.1Mpa	48.6Mpa
Momento de inercia	3.15	2.57
Deformación unitaria en X	3.22	2.91
Deformación unitaria en Y	9.77	5.15
Factor de Seguridad	7	7

Fuente: Autor

## 5. CONCLUSIONES

Al elaborarla simulación, los resultados obtenidos indican que al sustituir el neumático por uno de mayor dimensión aumentan los valores de deformación unitaria, en las diferentes zonas estudiadas, por tanto los valores de los esfuerzos en el eje X en este elemento aumentan aproximadamente 24% y en un 28% en los esfuerzos en el eje Y lo que significa que las exigencias para los subsistemas de la suspensión incrementan.

Se pudo evidenciar que las condiciones de trabajo se vuelven más exigentes para el brazo de suspensión, a medida que incrementa el diámetro de la rueda con respecto al original.

Se visualizó que existen zonas del brazo de suspensión que mantienen niveles bajos de esfuerzo, por lo que se podría realizar una investigación para aligerar este elemento.

El estudio reveló que estas alteraciones producen deformaciones y tensiones que están dentro de los límites que permite el material por lo tanto la modificación no constituye un potencial peligro para la integridad de los ocupantes.

Las condiciones o variables tomadas en este estudio fueron analizadas por el fabricante para dimensionar el sistema de suspensión como evidenció el margen de seguridad e elemento estudiado.

Como profesionales en el campo, se deben tomar en cuenta varios factores para modificar algún elemento del sistema de suspensión de cualquier vehículo, evaluar el contexto donde se va a modificar. No es posible solamente cambiar un componente sin pensar que este pertenece a un sistema cuyas partes han sido diseñadas para estar interrelacionadas entre sí.

## 6. REFERENCIAS.

- [1] **D. R Oliva Domínguez, R.** *Simulación en modélica de elementos mecánicos de una suspensión* Bachelor's thesis Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid 2011.
- [2] **W. H., Llanes- E.A Cedeño, J.V Molina & J. C Rocha-Hoyos** *Revisión de las Características de Modelado y Optimización para el Diseño del Sistema de Suspensión Mcpherson.* Universidad Internacional SEK Quito 2018.
- [3] **Verdugo, U., Ismael, S., & Álvarez Cárdenas, C. L.** *Estudio numérico y experimental de la influencia del tamaño de las ruedas sobre los elementos de la suspensión Mcpherson,* Master's thesis, Universidad del Azuay (2017).
- [4] **D. Mesa Fernández,** *Simulación virtual de una suspensión McPherson en entorno VRML,* Bachelor's thesis, Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid 2011.
- [5] **J. T. C Lizarza.** *Método de los elementos finitos para análisis estructural.* Escuela Superior de Ingenieros Industriales, Universidad de Navarra. Pamplona 2000.
- [6] **O. C. Zienkiewicz,** *El método de los elementos finitos.* Reverté (1981).
- [7] **Del Ecuador,** Venta de vehículos SUV subió un 58% este año A. D. E. A. AEADE. *Anuario 2017* (2017). .
- [8] **L. Navarro Torrado** Consideraciones cinemáticas y dinámicas para el desarrollo de control a un sistema de suspensión. *Revista colombiana de tecnologías de avanzada (rcta).* vol1, no31 Julio 2018.
- [9] **J. Orejuela de Cáceres,** *Diseño y construcción del sistema de suspensión de un vehículo monoplaza para la competición Fórmula Student,* Tesis de grado, Universidad Politécnica Salesiana Sede Cuenca 2016.
- [10] **J.C. Tudon Martínez.** Control Tolerante a Fallas en una Suspensión Automotriz Semi-Activa. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial,* [S.l.], v. 13, n. 1, p. 56-66., ISSN 1697-7920. ene. 2016.
- [11] **C. Polanco & J. Peña.** *Ensayo de Fatiga en Flexión Rotativa del Acero AISI-SAE 1018 por el Método Esfuerzo-Vida.* Tesis de grado, Escuela Politécnica Superior del Litoral 2011.
- [12] **M. SKumar. S. Vijayarangan,** Analytical and experimental studies on fatigue life prediction of steel and composite multi-leaf spring for light passenger vehicles using life data analysis. *Materials science,* 13(vol2), 141-146. 2017.
- [13] **V. Chacón Hernando,** *Diseño de una suspensión para un vehículo automóvil basada en amortiguadores magneto-reológicos,* Bachelor's thesis, Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid 2010.

[14] **D. J. L. H Ezeta,, D. A Mandow & D. A. J. G Cerezo.** *Modelado analítico y control inteligente de un sistema de suspensión activa para un cuarto de vehículo.* Tesis Doctoral, Universidad de Málaga 2013

[15] **M. Jacas, M., Rodríguez, & U. Ordoñez.** *Modelación por Elementos Finitos como Método para la Sustitución de Piezas de Acero por Hierro Nodular.* Ingeniería Mecánica. Insituto Superior Politécnico Jesá Antonio Echeverría. La Habana 2005.

[16] **R. Cedeño Madera** *Análisis de suspensión de Autobús mediante elemento finito.* Tesis de grado Universidad Nacional Autónoma De México 2013

[17] **F.J. García** *Diseño de suspensión hidráulica para un vehículo todo terreno.* Dep. De Ingeniería Ciencia de los Materiales y del Transporte Escuela Técnica Superior de Ingeniería. Sevilla, 2016

[18] **A. S. Marcial Rodriguez,** *Análisis mediante MEF del sistema de suspensión de un auto liviano* Escuela Politécnica Nacional, Tesis de Grado Quito 2012

[19] **J.D Valladoli** 2018 Marzo 1. *Modelado y simulación de un sistema de suspensión de ¼ de vehículo.*

# **ANEXOS**

**Anexo1**

**D. R Oliva Domínguez, R.** *Simulación en modélica de elementos mecánicos de una suspensión* Bachelor's thesis Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid 2011.

**UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID**

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR



INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL MECÁNICA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

PROYECTO FIN DE CARRERA

# **SIMULACIÓN EN MODELICA DE ELEMENTOS MECÁNICOS DE UNA SUSPENSIÓN**

Autor:

**D. Rubén Oliva Domínguez**

Tutoras:

**Dra. Dña. Beatriz López Boada**

**Dra. Dña. María Jesús López Boada**

Noviembre, 2011

### **3. SUSPENSIONES VEHICULARES**

#### **3.1. INTRODUCCIÓN**

Las funciones principales de la suspensión de un vehículo son soportar el peso de dicho vehículo, permitir su movimiento elástico controlado sobre los ejes y proteger al propio automóvil de las vibraciones extremas, absorbiendo las desigualdades del terreno mientras mantiene las ruedas en contacto con el pavimento en todo momento, así como a la vía sobre la que circula, cualesquiera que sea el estado de la vía y su utilización [4]. la suspensión trata de que no sean transmitidas las irregularidades a los ocupantes del vehículo, proporcionándoles un buen nivel de confort y seguridad, así como protegiendo al propio automóvil de las vibraciones extremas. la estabilidad del vehículo debe cumplirse cualesquiera que sean los obstáculos, los desniveles de la ruta, el radio de viraje y la pendiente. Así mismo, debe garantizar la comodidad de los pasajeros y la protección de las mercancías transportadas, reduciendo en cuanto sean posibles los movimientos verticales, longitudinales, transversales y angulares de la parte suspendida. el sistema de suspensión suele estar ubicado en el vehículo entre el suelo y el bastidor y está constituido genéricamente por los mismos componentes para todo tipo de vehículos diferenciándose en sus tipos y dimensiones de acuerdo a las prestaciones del vehículo y su función.

Las suspensiones de los vehículos constituyen un aspecto fundamental del diseño mecánico de cualquier vehículo. Sin embargo, en la mayor parte de los mismos, el diseño de la suspensión afecta también a otras prestaciones del mismo. Todo ello confiere al diseño de la suspensión una gran complejidad y requiere la participación de expertos. En la suspensión de un vehículo existen diferentes tipos de elementos que permiten asegurar las funciones de confort, estabilidad, seguridad y calidad de marcha. De forma general, estos elementos pueden dividirse en elementos elásticos y elementos amortiguadores:

- Elemento flexible. Existen multitud de sistemas que realizan esta función, como pueden ser ballestas, barras de torsión, muelles propiamente dichos, etc. Garantizan la unión entre los órganos de rodadura y el vehículo, aportando una fuerza recuperadora cuando se produce alguna separación entre ellos.
- Amortiguador.

Encargado de mitigar o neutralizar las oscilaciones del elemento flexible producidas por las irregularidades del terreno. Son elementos disipadores de energía que hacen que decaiga el movimiento oscilatorio, provocado por cualquier tipo de perturbación que actúe sobre la suspensión. A parte de estos elementos existen otros que completan la cadena cinemática de las suspensiones de un vehículo, tales como:

- Las barras estabilizadoras, encargadas de contener la inclinación de la carrocería.
- Los trapecios o brazos de suspensión que conectan la carrocería

del vehículo con los elementos móviles de la suspensión, como la mangueta, elemento sobre el que se fija la rueda. • También se consideran parte de la suspensión los asientos y los neumáticos ya que son capaces de filtrar las irregularidades del pavimento y, por lo tanto, cumplen con la definición de suspensión. Dependiendo del sistema de suspensión utilizado, algunos elementos cumplen la doble función de ser elementos elásticos y de amortiguamiento.

Cualquier tipo de vehículo consta de las siguientes partes:

- Masa Suspendida, es la parte de la masa total que es soportada por el sistema de suspensión. Está constituida por chasis, grupo motor, carrocería, etc.; además de la carga del vehículo.
- Masa no Suspendida, formada por el sistema de suspensión y los elementos que conectan dicho sistema con la vía sobre la que circula el vehículo. Son ejes, ruedas, frenos del vehículo (si están incluidos fuera del chasis), elementos de transmisión, etc. Actualmente existen distintas disposiciones de suspensión cuyo uso depende del tipo de comportamiento que se busca en el vehículo: mayores prestaciones, más comodidad, sencillez y economía, etc.

## 3.2. Suspensiones en vehículos automóviles

### 3.2.1. Suspensión rígida

Las primeras suspensiones estaban formadas por un eje rígido, en cuyos extremos se montaban las ruedas. Como consecuencia de ello, todo el movimiento que afecta a una rueda se transmite a la otra del mismo eje. En la figura 3.1 se puede ver cómo al elevarse una rueda, se extiende su inclinación al eje y de este a la otra rueda. Como el eje va fijado directamente sobre el bastidor, la inclinación se transmite a todo el vehículo. Este montaje es muy resistente y más económico de fabricar, pero tiene la desventaja de ser poco cómodo para los pasajeros y una menor seguridad [5].

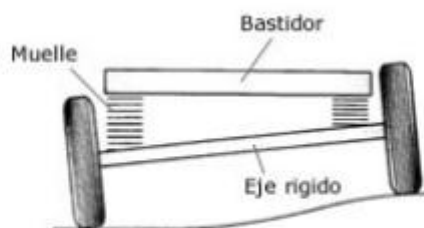


Figura 3.1. Suspensión rígida

Además, el peso de las masas no suspendidas aumenta notablemente debido al peso del eje rígido y al peso del grupo cónico diferencial en los vehículos de tracción trasera. En estos últimos, el grupo cónico sube y baja en las oscilaciones como un parte integradora del eje rígido.

Como principal ventaja, los ejes rígidos destacan por su sencillez de diseño y no producen variaciones significativas en los parámetros de la rueda como caída, avance, etc. El principal

uso de esta disposición de suspensión se realiza sobre todo en vehículos industriales: autobuses, camiones y vehículos todo terreno.

En la figura 3.2 se muestra un modelo de eje rígido actuando de eje propulsor. En estos casos, el eje está constituido por una caja que contiene el mecanismo diferencial (1) y por los tubos (3) que contienen los palieres. El eje rígido en este caso se apoya contra el bastidor mediante ballestas (2) que hacen de elemento elástico transmitiendo las oscilaciones. Completan el conjunto los amortiguadores (4).

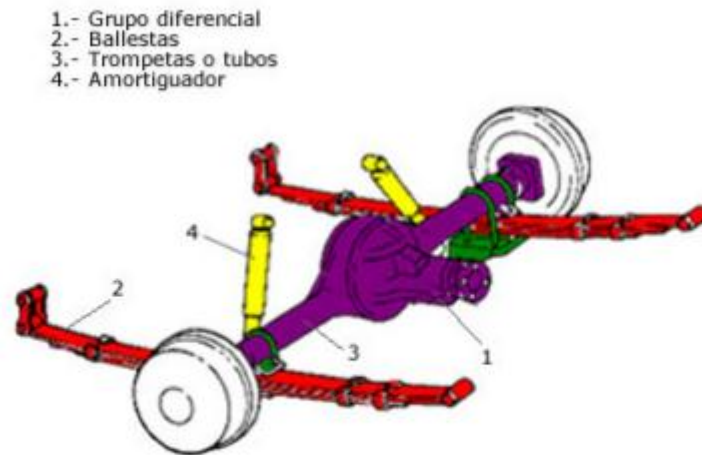


Figura 3.2. Suspensión rígida para el eje trasero propulsor

### 3.2.2. Suspensión semirrigida

Las suspensiones son muy parecidas a las anteriores, su principal diferencia es que las ruedas están unidas entre sí y en el eje rígido pero transmitiendo de una forma parcial las oscilaciones que reciben de las irregularidades del terreno. En cualquier caso, aunque la suspensión no es rígida total, tampoco es independiente. La función motriz se separa de la función de suspensión y de guiado, o lo que es lo mismo, el diferencial se une al bastidor y no es soportado por la suspensión. Existen dos tipos de suspensiones semirrigidas: la de Dion y la de eje torsional.

3

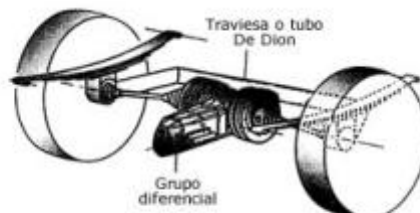


Figura 3.6. Suspensión semirrigida de *Dion* con ballestas

En la actualidad hay pocos coches que montan esta suspensión debido a que su coste es elevado.



### 3.2.2.2. Sistema de eje torsional

El eje torsional es otro tipo de suspensión semirrígida utilizada en las suspensiones traseras, en vehículos que tienen tracción delantera. El tubo que une las dos ruedas tiene forma de U, por lo que es capaz de deformarse un cierto ángulo cuando una de las ruedas encuentra un obstáculo para después, una vez pasado el obstáculo, volver a la posición inicial.

Las ruedas están sujetas rígidamente a dos brazos longitudinales unidos por un travesaño que se tuerce durante las sacudidas no simétricas, dando estabilidad al vehículo.

Esta configuración da lugar, a causa de la torsión del puente, a una recuperación parcial del ángulo de caída de alto efecto de estabilización, características que, junto al bajo peso, bajo coste y poco espacio que ocupa, resulta ideal para instalarla junto con otros componentes en la parte inferior del vehículo (depósito de combustible, escape, etc.).

Esta configuración ha convertido a este tipo de suspensiones en una de las más empleadas en vehículos de gama media-baja.

En la figura 3.7 se observa un esquema de sistema de eje torsional.

En la figura 3.8 se observa una figura de un eje torsional integrado en un vehículo.

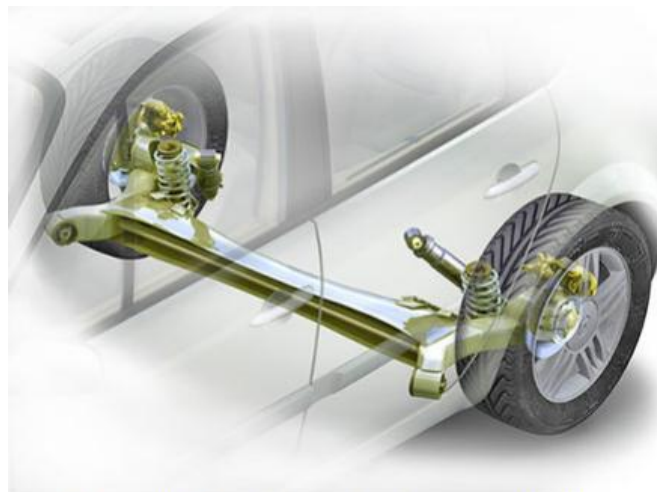


Figura 3.8. Sistema de eje torsional con vehículo

### 3.2.3. Suspensión independiente

El sistema de suspensión independiente tiene un montaje elástico independiente que no está unido a otras ruedas. A diferencia del sistema rígido, el movimiento de una rueda no se transmite a la otra y la carrocería resulta menos afectada. En la figura 3.9 se muestra una suspensión independiente.

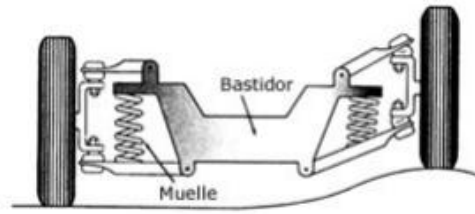


Figura 3.9. Suspensión independiente

Actualmente, la suspensión independiente a las cuatro ruedas se va utilizando cada vez más debido a que es la más óptima desde el punto de vista de confort y estabilidad, al reducir de forma independiente las oscilaciones generadas por el pavimento sin transmitir las de una rueda a otra del mismo eje.

La principal ventaja añadida de la suspensión independiente es que posee menos masa no suspendida que otros tipos de suspensión, por lo que las acciones transmitidas al chasis son de menor magnitud.

El diseño de este tipo de suspensión debe garantizar que las variaciones de caída de rueda y ancho de ruedas en dichas ruedas directrices deben ser pequeñas para conseguir una dirección segura del vehículo.

Por el contrario, para cargas elevadas esta suspensión puede presentar problemas. Actualmente este tipo de suspensión es el único que se utiliza para las ruedas directrices.

El número de modelos de suspensión independiente es muy amplio y además posee numerosas variantes.

Los principales tipos de suspensiones de tipo independiente son:

- Suspensión de eje oscilante.
- Suspensión de brazos tirados.
- Suspensión McPherson.
- Suspensión de paralelogramo deformable.
- Suspensión multibrazo (multilink).

#### 3.2.3.1. Suspensión de eje oscilante

La peculiaridad de la suspensión de eje oscilante, se muestra en la figura 3.11, es que el elemento de rodadura (1) y el semieje (2) son solidarios (salvo el giro de la rueda), de forma que el conjunto oscila alrededor de una articulación (3) próxima al plano medio longitudinal del vehículo.

Este tipo de suspensión no se puede usar como eje directriz puesto que en el movimiento oscilatorio de los semiejes se altera notablemente la caída de las ruedas en las curvas. Completan el sistema de suspensión dos conjuntos muelle-amortiguador telescópico (4)

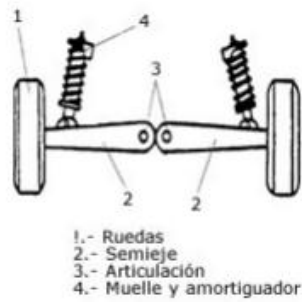


Figura 3.11. Suspensión de eje oscilante

Una variante de este sistema es realizada mediante un eje oscilante pero de una sola articulación mostrada en la figura 3.12. La ventaja que presenta es que el pivote de giro (1) está a menor altura que en el eje oscilante de dos articulaciones. El mecanismo diferencial (2) oscila con uno de los palieres (3), mientras que el otro (4) se mueve a través de una articulación (6) que permite a su vez un desplazamiento de tipo axial en el árbol de transmisión. El sistema también cuenta con dos conjuntos muelle-amortiguador (7).

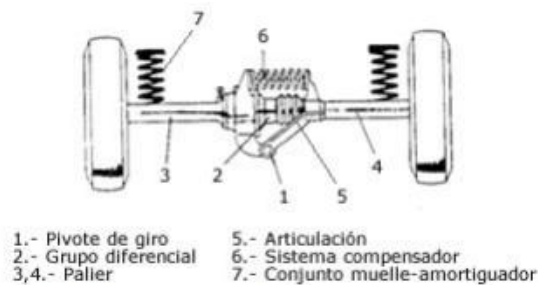


Figura 3.12. Suspensión de eje oscilante compensado

### 3.2.3.4. Suspensión McPherson

La suspensión McPherson fue desarrollada por Earle S. McPherson, ingeniero de Ford del cual recibe su nombre. Este sistema es uno de los más utilizados en el tren delantero aunque se puede montar igualmente en el trasero.

Este sistema ha tenido mucho éxito, sobre todo en vehículos más modestos, por su sencillez de fabricación y mantenimiento, el coste de producción y el poco espacio que ocupa.

Con esta suspensión es imprescindible que la carrocería sea más resistente en los puntos donde se fijan los amortiguadores y muelles, con objeto de absorber los esfuerzos transmitidos por la suspensión. En la figura 3.17 se observa una suspensión McPherson.

En la figura 3.18 se observa un esquema de una suspensión McPherson.

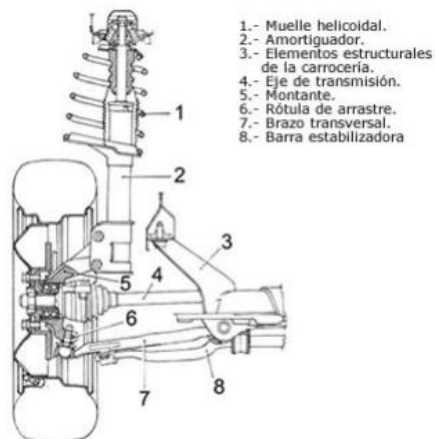


Figura 3.18. Esquema de un sistema de suspensión *McPherson*

En la figura 3.19 se observa un plano despiezado de una suspensión *McPherson*.

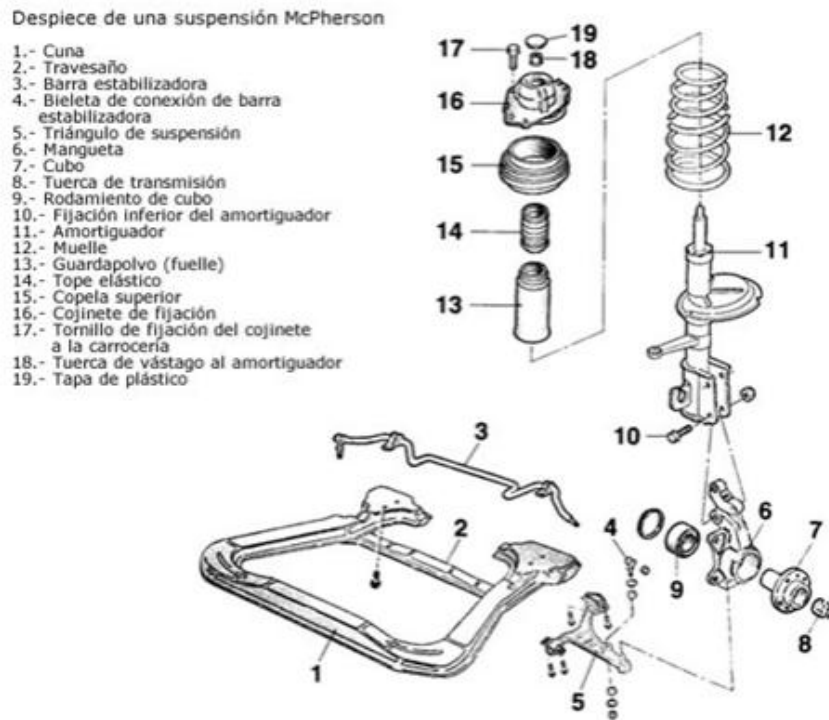


Figura 3.19. Despiece de una suspensión *McPherson*

La figura 3.20 muestra un modelo detallado de una suspensión *McPherson* con brazo inferior y barra estabilizadora.

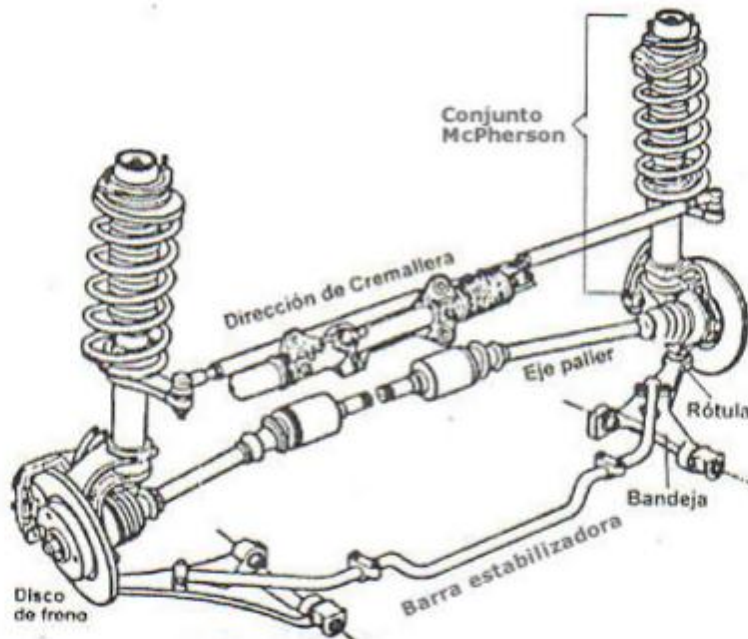


Figura 3.20. Suspensión *McPherson* con barra estabilizadora

En la figura 3.21 se detallan cada una de las partes de la suspensión:

- La mangueta (1) de la rueda va unida al cubo (2) permitiendo el giro de este mediante un rodamiento (3). A su vez, la mangueta va unida al bastidor a través de dos elementos característicos de toda suspensión *McPherson*.
- El brazo inferior (4) que va unido a la mangueta (1) mediante una unión elástica (A) (rótula) y unido al bastidor mediante un casquillo (B).
- Respecto a los conjuntos muelle helicoidal-amortiguador, el amortiguador (5) va anclado de forma fija a la parte superior de la mangueta (1) y el muelle (6) es concéntrico al amortiguador y está sujeto mediante dos copelas superior (C) e inferior (D). El amortiguador está unido al bastidor por su parte superior mediante un cojinete de agujas (7) y una placa de fijación (8). En las ruedas delanteras se hace necesaria la existencia de este cojinete axial ya que el amortiguador al ser solidario a la mangueta gira con ésta al actuar la dirección.



Figura 3.21. Detalle de una suspensión *McPherson*

- La suspensión tipo McPherson forma un mecanismo de tipo triángulo articulado formado por el brazo inferior (4), el conjunto muelle amortiguador y el propio chasis. El lado del triángulo que corresponde al muelle-amortiguador es de compresión libre por lo que sólo tiene un único grado de libertad: la tracción o compresión de los elementos elásticos y amortiguador.
- Al transmitirse a través del muelle-amortiguador todos los esfuerzos al chasis es necesario un dimensionado más rígido de la carrocería en la zona de apoyo de la placa de fijación (8).
- Como elementos complementarios a esta suspensión se encuentra la barra estabilizadora (9) unida al brazo inferior (4) mediante una bieleta (10) y al bastidor mediante un casquillo (E), y en este caso, un tirante de avance (11).

### 3.2.3.5. Falsa McPherson

Actualmente existen múltiples variantes en cuanto a la sustitución del tirante inferior (4 en la figura 3.21) que pueden ser realizadas por un triángulo inferior, una doble bieleta transversal con tirante longitudinal, etc. A estos últimos sistemas también se les ha denominado falsa McPherson, aunque en cualquier caso todos ellos utilizan el amortiguador como elemento de guía y mantienen la estructura de triángulo articulado.

La suspensión clásica McPherson dispone de la barra estabilizadora como tirante longitudinal, mientras que las denominadas falsas McPherson ya absorben los esfuerzos longitudinales con la propia disposición del anclaje del elemento que sustituye al brazo inferior.

En la figura 3.22 se muestra un esquema McPherson donde se ha sustituido el brazo inferior por un triángulo (1) que va unido a la mangueta (2) mediante una rótula (A) y a la cuna del motor (3) mediante dos casquillos (C) y (D). El resto de los componentes es similar al de una McPherson convencional.

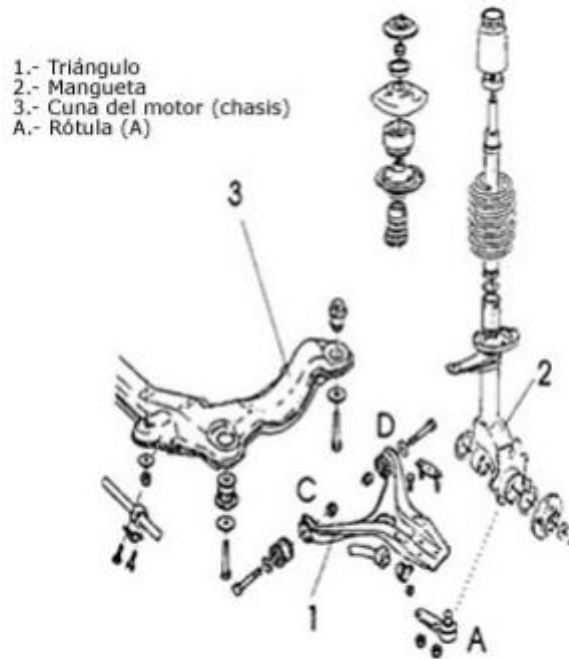


Figura 3.22. Despiece de una suspensión *falsa McPherson*

En la figura 3.23 se observan varios modelos de conjunto para la suspensión McPherson.

### 3.2.3.6. Suspensión de paralelogramo deformable

La suspensión de paralelogramo deformable, junto con la McPherson, es la más utilizada en un gran número de automóviles, tanto para el tren delantero como para el trasero. Esta suspensión también se denomina suspensión por trapecio articulado y suspensión de triángulos superpuestos.

En la figura 3.24 se muestra una suspensión de paralelo deformable con los elementos numerados.

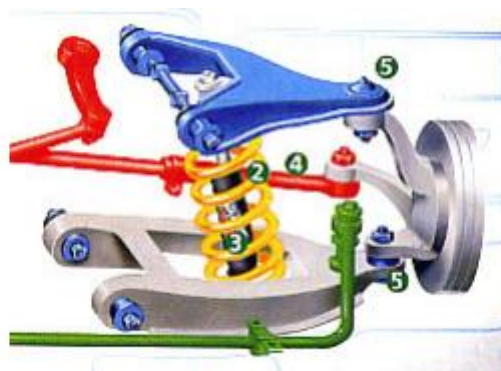


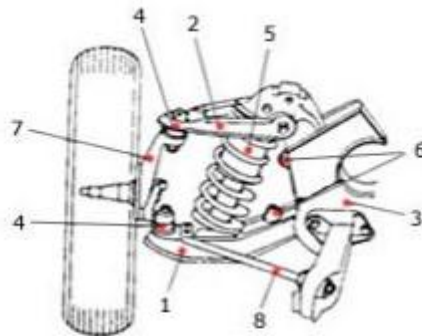
Figura 3.24. Suspensión de paralelogramo deformable

En la figura 3.25 se muestra una suspensión convencional de paralelogramo deformable. El paralelogramo está formado por un brazo superior (2) y otro inferior (1) que están unidos al chasis a través de unos pivotes, cerrando el paralelogramo a un lado el propio chasis y al otro la

propia mangueta (7) de la rueda. La mangueta está articulada con los brazos mediante rótulas esféricas (4) que permiten la orientación de la rueda.

Los elementos elásticos y amortiguador coaxiales (5) son de tipo resorte helicoidal e hidráulico telescópico, respectivamente, y están unidos por su parte inferior al brazo inferior y por su parte superior al bastidor.

Completan el sistema unos topes (6) que evitan que el brazo inferior suba lo suficiente como para sobrepasar el límite elástico del muelle y un estabilizador lateral (8) que va anclado al brazo inferior (1).



- |                               |                                  |
|-------------------------------|----------------------------------|
| 1.- Trapecio o brazo inferior | 5.- Conjunto muelle-amortiguador |
| 2.- Trapecio o brazo superior | 6.- Topes de goma                |
| 3.- Bastidor                  | 7.- Mangueta                     |
| 4.- Rótula                    | 8.- Barra estabilizadora         |

**Figura 3.25. Suspensión de paralelogramo deformable**

Con distintas longitudes de los brazos (1) y (2) se pueden conseguir distintas geometrías de suspensión de forma que puede variar la estabilidad y la dirección según sea el diseño de estos tipos de suspensión.

En la figura 3.26 se observa un detalle de una suspensión de paralelogramo deformable.



**Figura 3.26. Detalle de suspensión de paralelogramo deformable**



La evolución de estos sistemas de suspensión de paralelogramo deformable ha llegado hasta las actuales suspensiones llamadas multibrazo o multilink.

### 3.2.3.7. Suspensiones multibrazo o multilink

Las suspensiones multibrazo se basan en el mismo concepto básico que sus precursoras: las suspensiones de paralelogramo deformable; es decir, el paralelogramo está formado por dos brazos transversales, la mangueta de la rueda y el propio bastidor.

La diferencia fundamental que aportan estas nuevas suspensiones es que los elementos guía de la suspensión multibrazo pueden tener anclajes elásticos mediante manguitos de goma.

Gracias a esta variante, las suspensiones multibrazo permiten modificar tanto los parámetros fundamentales de la rueda, como la caída o la convergencia, de la forma más apropiada de cara a la estabilidad en las distintas situaciones de uso del automóvil.

Esto significa que las dinámicas longitudinal y transversal pueden configurarse de forma precisa y prácticamente independiente entre sí, y que puede alcanzarse un grado máximo de estabilidad direccional y confort.

A principios de los noventa se comenzó a instalar estos sistemas multibrazo en automóviles de serie dando buenos resultados aunque había reticencias para los ejes no motores. En la actualidad, las grandes berlinas adoptan este sistema en uno de los trenes o en ambos. Para que una suspensión se considere multibrazo debe estar formada al menos por tres brazos.

Las suspensiones multibrazo se pueden clasificar en dos grupos fundamentales:

- Suspensiones multibrazo con elementos de guía transversales u oblicuos con funcionamiento similar al de las suspensiones de paralelogramo deformable.
- Suspensiones multibrazo que además disponen de brazos de guía longitudinal con un funcionamiento, que recuerda a los sistemas de suspensión de ruedas tiradas por brazos longitudinales.

En la figura 3.27 se muestra un sistema multibrazo delantero y en la figura 3.28 uno trasero del tipo paralelogramo deformable con tres brazos. La suspensión delantera consta de un brazo superior (1) que va unido a una mangueta (2) larga y curvada mediante un buje de articulación (A) y un brazo inferior transversal (3) que va unido a la mangueta por una rótula doble (B) y al bastidor por un casquillo (C) que aísla de las vibraciones. Cierra el paralelogramo deformable el propio bastidor como en cualquier suspensión de este tipo.

Esta suspensión dispone, además, de un tercer brazo (4) que hace de tirante longitudinal y que está unido al bastidor y mangueta de la misma forma que el brazo inferior transversal (3). La gran altura de la prolongación de la mangueta consigue una disminución de los cambios de convergencia de la rueda y un ángulo de avance negativo.

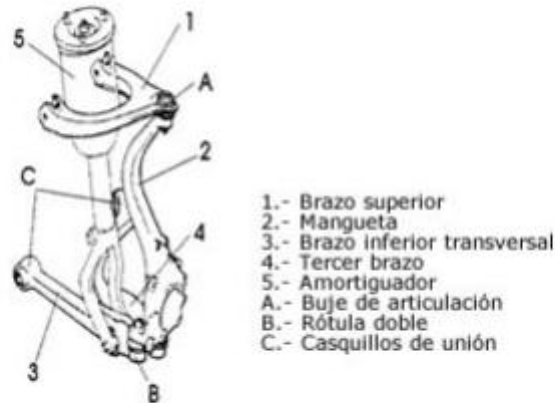


Figura 3.27. Esquema de una suspensión multibrazo delantera

La suspensión trasera se observa en la figura 3.28. Esta suspensión consta de un brazo superior (1) con forma de triángulo como la delantera, pero dispone de dos brazos transversales, superior (2) e inferior (3) y un tirante longitudinal inferior (4).

Las articulaciones son similares al modelo de suspensión delantera. Ambos sistemas poseen como elementos elásticos muelles helicoidales y amortiguadores telescópicos (5) y también barra estabilizadora. Se puede observar que en la disposición delantera el amortiguador va anclado a la barra inferior transversal (3) mediante una horquilla.

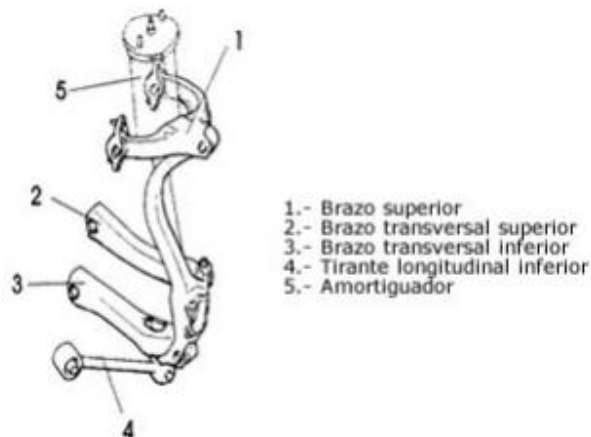


Figura 3.28. Esquema de una suspensión multibrazo trasera

En la figura 3.29 se observa una suspensión multibrazo trasera en una rueda.



Figura 3.29. Detalle de suspensión multibrazo en una rueda

En la figura 3.31 se observa una suspensión multibrazo en un eje del Audi A6.



Figura 3.31. Suspensión multibrazo Audi A6 eje delantero

En la figura 3.32 se observa una suspensión multibrazo de un Audi Quattro.

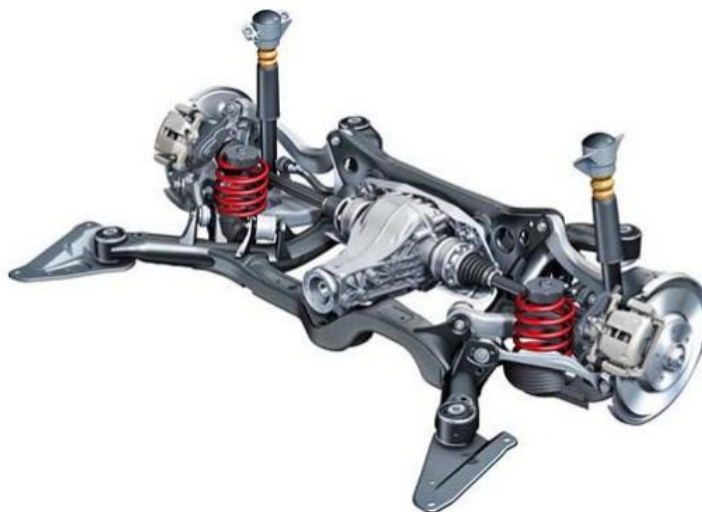


Figura 3.32. Suspensión multibrazo Audi Quattro eje trasero

## Anexo 2

W. H., Llanes- E.A Cedeño, J.V Molina & J. C Rocha-Hoyos *Revisión de las Características de Modelado y Optimización para el Diseño del Sistema de Suspensión Mcpherson*. Universidad Internacional SEK Quito 2018

### **Revisión de las Características de Modelado y Optimización para el Diseño del Sistema de Suspensión Macpherson**

#### **Review of the Modeling and Optimization Characteristics for the Design of the Macpherson Suspension System**

**William H. Vega<sup>1 2</sup>**

**Edilberto A. Llanes-Cedeño<sup>1</sup>**

**Jaime V. Molina<sup>1</sup>**

**Juan C. Rocha-Hoyos<sup>1</sup>**

<sup>1</sup>Universidad Particular Internacional SEK, Fac. de Arquitectura e Ingenierías, Casilla 17-03-02, Quito - Ecuador (Correo-e: wvega.mdm@uisek.edu.ec; carlos.rocha@uisek.edu.ec)

<sup>2</sup>Ministerio de Educación Ecuador, Dpto. de Administración Escolar Coordinación zona 1 educación, Casilla 10-02-01, Ibarra – Ecuador.

## **RESUMEN**

El objetivo de este trabajo fue caracterizar los procesos de diseño en los contextos de aplicación de software de simulación, resaltando las técnicas predictivas de multicuerpos, elementos finitos y modelado matemático. para la identificación de sus características de trabajo al aplicarlo en la suspensión. El proceso definido se aplicó en función de modelos, variables de diseño, optimización y la tendencia actual en la simulación mecánica. La utilidad del modelo se evaluó para la aplicación de optimización en función del componente objetivo de diseño, considerando varios criterios tales como características cinemáticas, conformidad, estabilidad del vehículo y prueba de comodidad de conducción. Se concluye que el modelo definido sirve como referente para establecer estrategias de simulación y optimización.

**Palabras clave:** suspensión Macpherson; simulación computacional; sistemas automotrices; optimización.

## **ABSTRACT**

The objective of this work was to characterize the design processes in the application contexts of simulation software, highlighting the predictive techniques of multibody, finite elements and mathematical modelling for the identification of its work characteristics when applying it in the suspension. The defined process was applied in function of models, design variables, optimization and the current trend in the mechanical simulation. The utility of the model was evaluated for the optimization application in function of the design objective component, considering several criteria such as kinematic characteristics, conformity, vehicle stability and

driving ease test. It is concluded that the defined model serves as a reference to establish simulation and optimization strategies.

**Keywords:** Macpherson suspension; computer simulation; automotive systems; design optimization

## INTRODUCCIÓN

Uno de los diseños más comunes hoy en día es la suspensión delantera Macpherson, fue descrita por primera vez en una patente de Fiat en 1926, diseñada a finales de los años cuarenta y aplicado en 1948 por Ford en los modelos Anglia y Consul ([Sandu et al., 2011](#)). Como tal, es una configuración de suspensión relativamente nueva, por su masiva aplicación en la actualidad ([Smith y Swift, 2016](#)). Referidas bajo las normas conocidas como la; SAE J670 e ISO 8855 que abarca los sistemas de coordenadas definidos para el diseño del vehículo/suspensión y el análisis dinámico (J670, 2008; ISO 8855, 2013). Aunque la terminología de dinámica de vehículos definida en el SAE J670 se limita únicamente a los vehículos turismos y camiones ligeros con dos ejes, mientras que la ISO 8855 incluye términos adicionales relativos a vehículos comerciales pesados con ejes múltiples ([Cao et al., 2011](#); [Mitra et al., 2015](#)).

El desarrollo de software de simulación virtual ha evolucionado la forma de diseñar nuevos productos que satisfagan las necesidades y requerimientos de los clientes. En esencia, ha permitido el desarrollo de productos virtuales integrados por computadora, completo con modelado 3D integrado, análisis, simulación y optimización, con la mejora continua de las tecnologías de información y comunicación ([Horta y Canale, 2009](#)). Además, nacidos del desarrollo de técnicas de ingeniería y diseño computarizado existen muchas opciones predictivas que ofrecen al diseñador y fabricante una mayor confianza en nuevos diseños ([Prior, 1992](#); [Colomina et al., 2006](#)). Para el caso de suspensión en vehículos, se requiere una representación precisa de los parámetros de diseño ([Hu et al., 2014](#); [Tey et al., 2014](#)) y sobre todo para automatizar el proceso de diseño, se recomienda un software de simulación dinámica combinado con algoritmos de optimización para modelar, simular y sintetizar a fin de lograr resultados precisos ([He y McPhee, 2007](#); [Sandu et al., 2011](#)).

La mayoría de las investigaciones sobre el sistema de suspensión se realizan en base al modelo lineal de un cuarto de vehículo, el cual permite una buena representación de la dinámica del sistema para el diseño ([Alexandru C. y P. Alexandru, 2011](#)). A fin de obtener mejores resultados, se desarrollan modelos no lineales (mecánico, hidráulico, etc.) y técnicas de simulación multidisciplinaria de sistemas multicuerpo (MBS) ([Hurel et al., 2013](#)a). Las técnicas de simulación se aplican ampliamente en todo el desarrollo de la suspensión para optimizar las características cinemáticas (K) y cumplimiento (C) de la suspensión, para predecir el control de frecuencia vertical (Alexandru y Totu, 2016; [Aly et al., 2015](#)), el rendimiento de la conducción (R) y manejo (H), y para investigar el rendimiento del viaje ([Drotar et al., 2015](#); [Yi et al., 2014](#)). Además, en el proceso de diseño del vehículo la evaluación subjetiva, la prueba objetiva y el análisis de simulación del

sistema de estabilidad del vehículo en viaje se aplican al desarrollo de los vehículos (Hurel et al., 2013b; [Sun et al., 2013](#)). En este trabajo se aborda los procesos de simulación en los sistemas de suspensión Macpherson, a partir de una revisión de las distintas técnicas aplicadas a la optimización para estos sistemas con el fin de la inclusión de los modelos matemáticos y los avances realizados en el modelado y simulación de la dinámica vehicular.

## **METODOLOGÍA**

La investigación se realizó en varias etapas: la primera fase se centró en la definición del modelo de aplicación más común del sistema de suspensión, empleando la propuesta metodológica de varios autores como la abordada por [Valderrama \(2005\)](#). Como resultado se identificaron las ecuaciones de movimiento y se establecieron las particularidades de este. Al analizar la literatura encontrada se caracterizó el sistema de optimización a través de las técnicas predictivas de elementos finitos (EF) y de análisis de dinámica en MBS dominantes en la ingeniería computarizada (CAE) de los sistemas de suspensión ([Drotar et al., 2015](#); [Liu et al., 2008](#)) con sus modificaciones para la tendencia actual, además de la técnica esquemática por *simulink* en función del componente objetivo de diseño, asegurándose de que las características K y C de la suspensión del vehículo se puedan estimar adecuadamente y también se pueda explicar muchos aspectos de la R y H de un vehículo sin problema ([Yi et al., 2014](#)). Los sistemas de suspensión tienen que aislar la masa suspendida de la carga propia del vehículo y también proporcionar las características de conducción y manejo deseadas. La mezcla real de cargas introducidas en la suspensión depende en gran medida de la superficie y el uso de la carretera por esa razón es necesario un modelo que aporte a identificar su trabajo de absorción de movimiento ([Prior, 1992](#)).

### **Sistema de suspensión de un cuarto de vehículo**

Las propuestas analíticas para las suspensiones óptimas proporcionan directrices no sólo para la configuración de parámetros, sino más importante, tienen el potencial de ofrecer información sobre el diseño del vehículo. [Sancibrian et al., \(2010\)](#) menciona un mayor rendimiento en el diseño y se logra a medida que aumenta la característica cinemática de la suspensión, dado que la posición del neumático de un vehículo con respecto a la calzada juega un papel importante en la determinación de la manipulación ([Sharp y Crolla, 1987](#)). Además, la dependencia de un parámetro óptimo puede modificarse en la fase de concepción del vehículo antes de concebir u optimizar un sistema de suspensión ([Smith y Swift, 2016](#)).

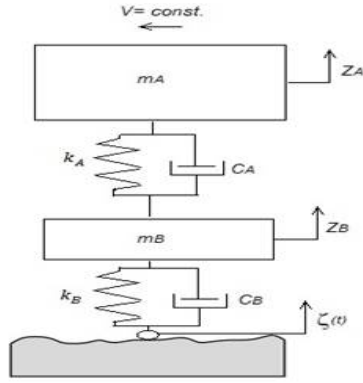


Fig. 1: Modelo de suspensión de un cuarto de vehículo (Adaptada de [Lozia y Zdanowicz, 2016](#); [Sandu et al., 2011](#))

$$\begin{bmatrix} m_A & 0 \\ 0 & m_B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{z}_A \\ \ddot{z}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 \\ -c_1 & c_1 + c_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{z}_A \\ \dot{z}_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_A \\ z_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_2 \end{bmatrix} \cdot \dot{\zeta} + \begin{bmatrix} 0 \\ k_2 \end{bmatrix} \cdot \zeta \quad (1)$$

$$M \cdot \ddot{q} + C \cdot \dot{q} + K \cdot q = C_\zeta \cdot \dot{\zeta} + K_\zeta \cdot \zeta \quad (2)$$

### Sistema de suspensión de un medio vehículo

En este modelo, el vehículo se representa como una viga con una cierta masa, el haz puede ser asumido como infinitamente rígido, donde se analiza la respuesta dinámica del vehículo sobre las excitaciones de la entrada del terreno  $u_1$  y  $u_2$ , véase en la figura 2, además está representado por las masas no suspendidas de las ruedas delanteras y traseras  $m_1$ ,  $m_2$ , y la masa de la carrocería del vehículo  $m_3$ . El cuerpo y las ruedas están conectados por suspensiones pasivas con muelles lineales con coeficientes de rigidez  $K_1$ ,  $K_2$  y amortiguadores viscosos de coeficientes de amortiguación  $C_1$ ,  $C_2$ . Las propiedades elásticas de los neumáticos están representadas por resortes con  $kt_1$ ,  $kt_2$  de rigidez. El modelo longitudinal de la mitad del vehículo es un sistema dinámico con cuatro grados de libertad: desplazamientos verticales de las masas individuales  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$ , rotación lateral de la carrocería del vehículo sobre el centro de gravedad del vehículo también llamado guiño  $\phi_3$ , relaciona también su inercia  $I_3$ , y los valores de la distancia  $b_1$  y  $b_2$  que equilibra el centro de gravedad.

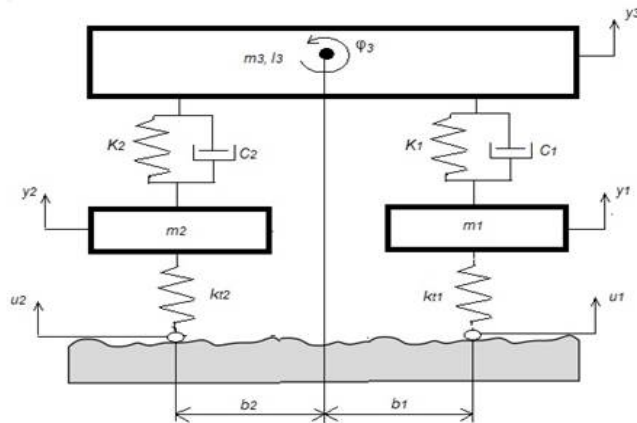


Fig. 2: Modelo de suspensión de medio vehículo (Adaptada de [Goga y Klůčik, 2012](#))

Las ecuaciones 3, 4, 5, 6 son del movimiento del vehículo para el modelo y se formulan para que se pueda analizar y optimizar su trabajo, respecto a sus operación normal ([Goga y Klůčik, 2012](#)).

$$m_1 \ddot{y}_1 + C_1(-\dot{y}_1 + \dot{y}_3 + b_1 \dot{\varphi}_3) + K_1(-y_1 + y_3 + l_1 \varphi_3) + k_{t1}(y_1 - u_1) = 0 \quad (3)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 + C_2(-\dot{y}_2 + \dot{y}_3 - b_2 \dot{\varphi}_3) + K_2(-y_2 + y_3 - l_2 \varphi_3) + k_{t2}(y_2 - u_2) = 0 \quad (4)$$

$$m_3 \ddot{y}_3 + C_1(-\dot{y}_1 + \dot{y}_3 + b_1 \dot{\varphi}_3) + C_2(-\dot{y}_2 + \dot{y}_3 - b_2 \dot{\varphi}_3) + K_1(y_3 - y_1 + l_1 \varphi_3) + K_2(-y_2 + y_3 - b_2 \varphi_3) = 0 \quad (5)$$

$$I_3 \ddot{\varphi}_3 + C_1 b_1(-\dot{y}_1 + \dot{y}_3 + b_1 \dot{\varphi}_3) + C_2 b_2(-\dot{y}_2 + \dot{y}_3 - b_2 \dot{\varphi}_3) + K_1 b_1(y_3 - y_1 + b_1 \varphi_3) + K_2 b_2(-y_2 + y_3 - b_2 \varphi_3) = 0 \quad (6)$$

Las herramientas de simulación pueden ser útiles para el análisis cinemático donde se identifican algunas variables que buscan la versatilidad de diseño, un ejemplo, es el uso de un movimiento aplicado en el centro de la rueda para que la acción del movimiento aplicado provoque eliminar los grados de libertad del modelo y, por lo tanto, el análisis es relativamente simple por esta razón es utilizado ampliamente para el diseño y la optimización adecuada, por tal motivo se plantea varios pasos ([Liu et al., 2008](#); [Sancibrian et al., 2010](#)) como en la figura 3 para esta revisión.

## DISEÑO DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN

La suspensión crea una conexión entre el vehículo (incluyendo ocupantes y carga) y la carretera. Las fuerzas verticales más notables relaciona el coeficiente de amortiguación, donde los resortes y amortiguadores aporta al vehículo en la reducción de las aceleraciones de la carrocería del vehículo, movimientos reducidos del balanceo y del cabeceo, cambios de la fuerza en la rueda reducidos y comportamiento adecuado de la vibración que es independiente de la carga útil del vehículo, además la energía que se debe controlar aumenta exponencialmente con la velocidad del vehículo ([Lee et al., 2009](#)). El diseño ligero del sistema juega un papel más importante en el chasis que en cualquier otra área, ya que toda la masa no suspendida del vehículo se incluye en



la suspensión. Una masa no suspendida más pequeña reduce el efecto de las vibraciones de la rueda sobre el cuerpo del vehículo y sobre las fluctuaciones dinámicas de la carga de la rueda (Tey et al., 2014, Rocha-Hoyos et al., 2017). Los componentes presentes en el sistema de suspensión son: carrocería, amortiguador, vástago de pistón, tubo amortiguador, mangueta, barra de dirección, cremallera de dirección, tirante de dirección, brazo inferior, y neumático, estos responden a diferentes grados de libertad (dof); Los dof se calculan utilizando los criterios de Grübler-Kutzbach (Sancibrian et al., 2010). Como vista general se han definido las siguientes restricciones de movimiento visible en la tabla 1. Además, el modelo para el análisis cinemático se presenta en la figura 4, donde se supone que el chasis está fijo y el centro de la rueda está sujeto a un desplazamiento vertical.

**Tabla 1 :** Enlaces y las uniones que conectan los elementos de la suspensión (Adaptada de Hurel et al., 2013b)

Unión	dof	Punto de trabajo	Elementos relacionados con las uniones cinemáticas
Revolución	1	$O_F$	carrocería - brazo inferior
Esférico	3	$O'_F$	brazo inferior- amortiguador -mangueta
Esférico	3	$C_F$	tirante de dirección-amortiguador -mangueta
Revolución	1	$T_F$	neumático-amortiguador -mangueta
Esférico	3	$D_F$	barra de dirección - cremallera de dirección
Translacional	1	$Q_F$	cremallera de dirección - carrocería
Cilíndrico	2	$B_F - M_F$	vástago de pistón - tubo amortiguador
Esférico	3	$B_F$	carrocería- amortiguador

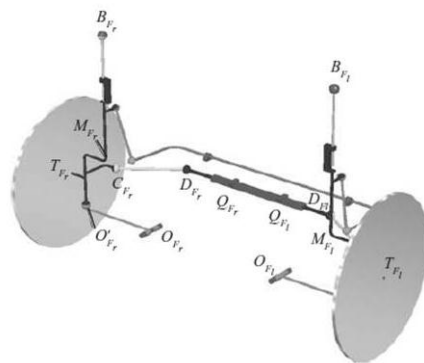


Fig.4: El modelo para el análisis cinemático suspensión (Adaptada de Hurel et al., 2013b, Mántaras y Luoue, 2012)

## MÉTODOS DE SIMULACIÓN

Es necesario generalizar las modelizaciones para visualizar el medio de aplicación en función del componente objetivo de diseño.

### Estado de frecuencia lineal

El método lineal da valores propios en el dominio de la frecuencia. Éstos eran muy poderosos al investigar la estabilidad y el comportamiento de conducción para vehículos de pasajeros cuyas suspensiones podían ser lineales de manera fiable. En la actualidad es útil ya que con el mismo

se investigan las tendencias y las muestran nociones de su comportamiento de forma generalista ([Karnopp, 2009](#)).

### **Estado estable no lineal**

Para aplicaciones tales como fuerzas en curvas de radio pequeño, transferencia de carga de rueda en una pista curvilínea, etc., son importantes las no linealidades del contacto entre el vehículo y el neumático. Se obtiene una visión valiosa de estos problemas a partir de una solución en estado estacionario, evitando algunas de las complejidades de amortiguación dentro del sistema ([Verros et al., 2005](#)).

### **Dinámica no lineal**

El único enfoque sensible es una solución de integración a tiempo completa de ecuaciones no lineales y este es el método más utilizado en las aproximaciones actuales. Esto permite el modelado de sistemas muy complejos y la obtención de soluciones detalladas. Sin embargo, es posible modelar los componentes con tanto detalle que los datos requeridos para una situación real no pueden obtenerse de manera realista ([Mántaras y Luque, 2012](#)).

### **Bidimensionales y tridimensionales**

Para los análisis de sistemas de suspensión, se deben tener en cuenta los movimientos producidos en los tres ejes, los cuales son considerados por este método, alineándose con los métodos de simulación más recientes ([Mántaras y Luque, 2012](#)), los componentes de suspensión son sistemas complejos que deben ser analizados por el método bidimensional y tridimensional ([Smith y Swift, 2016](#)). [Fallah et al., \(2009\)](#) propuso un modelo no lineal de un sistema de suspensión macpherson de dos grados de libertad para el control de conducción que se aplica para evaluar los parámetros cinemáticos de la suspensión, tales como ángulos de curvas, pivote y bujes principales. Otros modelos bidimensionales se aplican con fines dinámicos, [Sandu et al., \(2011\)](#) desarrollan un modelo dinámico de MBS de una suspensión macpherson para aplicar técnicas de identificación del sistema; Sin embargo, las soluciones exactas requieren el enfoque tridimensional, [Sancibrian et al., \(2010\)](#) propone modelos tridimensionales matemáticos para estudiar la cinemática del sistema macpherson. Mántaras y Luque, (2012) presenta un equipo de prueba virtual con comportamiento elasto-cinemático de un vehículo, en el proceso de diseño, los datos de entrada variable son la aceleración longitudinal, lateral y el radio de la curva, que están definidos por el objeto de diseño.

### **Modelado simulación dinámica multicuerpo**

Esta técnica se aplica a la simulación de la dinámica y la cinemática de los vehículos, ofreciendo la capacidad de modelar la carga de la carretera y las maniobras de los vehículos con una precisión cada vez mayor, además muestra la optimización de los componentes a un menor costo ([Prior, 1992](#)). Hay que considerar que con el software se puede simular numéricamente una

gran variedad de matrices de cargas dinámicas reales ([Yi et al., 2014](#)). Y como base se muestra el modelo de la suspensión en la figura 5 en *Adams/car*.

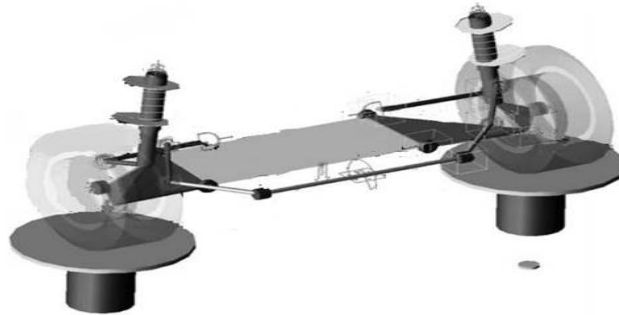


Fig. 5: Modelo de la suspensión delantera en *Adams/car* (Adaptada de [Sun et al., 2013](#); [Tev et al., 2014](#))

El efecto sobre la orientación de la rueda se puede analizar manipulando cargas cuasi estáticas que representan las fuerzas de frenado y aceleración, y así estimar las cargas severas, además es relevante la maniobra en la conducción. [Prior. \(1992\)](#) investigó la maniobra de cambio de carril que es una de las simulaciones necesarias por tener orientaciones escalonadas o sinusoidales para esto el modelo completo requerido para esta experimentación también requiere que se incluya un modelo de dirección; por otro lado el modelo de simulación del vehículo en movimiento antes del impacto con la calzada muestra que el automotor se encuentra en un movimiento de cabeceo bajo la influencia de la carga de frenado dando como resultado que la dinámica de cualquier punto de referencia para todos los dof se pueda determinar.

[Sun et al., \(2013\)](#) estudiaron el diseño de la suspensión con simulación dinámica MBS y las características K y C, que son fundamentales tanto en teoría como en prueba ([Mántaras y Luque, 2012](#)). En este planteamiento según [Feng et al., \(2012\)](#) se identifica los parámetros estructurales que tienen un impacto en las características cinemáticas a través de la simulación de movimiento paralelo de la rueda y optimización de los parámetros, además se mostró que en el proceso de subida y bajada de la rueda, los valores del ángulo de inclinación aumentan ligeramente, los ángulos de dirección y de avance disminuyen ligeramente, lo que significa que la suspensión optimizada mejora la estabilidad de manejo del vehículo y la comodidad de conducción. En otro estudio, [Yi et al., \(2014\)](#) evalúa la suspensión en base a dos etapas para las características cinemáticas (K) y cumplimiento (C), de donde se seleccionan 8 características descritas en la tabla 2, sabiendo que afectan en gran medida el rendimiento de la conducción (R) y manejo (H), además, estas son muy difícil predecirlas con precisión debido a tantas incertidumbres y no linealidades que no se consideran en el modelo de simulación. En el caso particular de no identificar el valor objetivo de cada característica se pueden emplear los resultados de la evaluación de comparación subjetiva y el *benchmarking* del vehículo de la competencia y el prototipo original del vehículo ([Sun et al., 2013](#); [Yi et al., 2014](#)).

Por otra parte, según [Drotar et al. \(2015\)](#) otra utilidad de la técnica, es optimizar las vibraciones táctiles hasta  $f = 100$  Hz aplicada en la fase inicial del proceso de desarrollo de la suspensión delantera, además para el estudio del confort de conducción, similar a la combinación de las pruebas K y C con simulación dinámica MBS para el análisis de dirección y manejo, partiendo del modelo construido en *Adams/car*. Se demuestra el efecto del aislamiento del bastidor auxiliar sobre el confort de marcha a través del análisis de las fuerzas transmitidas a la carrocería del vehículo, la sensibilidad de la rigidez del buje para impactar la dureza usando un modelo de vehículo completo y además de optimizar la dureza del impacto utilizando diferentes niveles de conformidad entre el bastidor auxiliar y los bujes de suspensión. [Liu et al. \(2008\)](#) estudiaron el sistema de suspensión macpherson con resorte de carga lateral, encontrando las características verticales y laterales deseable sin fuerza longitudinal en operación, lo que reduce notablemente la fuerza lateral y mantiene el rendimiento del sistema original en las simulaciones y experimentos, y puede ser un enfoque eficiente en el diseño óptimo de la estructura, ya que se corrobora también con análisis de elementos finitos. Este enfoque aplica para otros diseños complicados de resortes de suspensión de resorte.

**Tabla 2 :** Características cinemáticas y cumplimiento de la suspensión propuestas (Adaptada de [Prior, 1992](#))

Parámetro	Características (K y C)
rango del cambio de dirección en el desplazamiento de rueda	Cinemáticas
cantidad de cambio de dirección en la carrera desplazamiento de rueda	Cinemáticas
altura del centro del balanceo	Cinemáticas
rango del cambio de dirección del balanceo del vehículo	Cinemáticas y Cumplimiento
rigidez lateral de la suspensión	Cumplimiento
rango del cambio de dirección en la fuerza lateral	Cumplimiento
rigidez longitudinal de la suspensión	Cumplimiento
rango del cambio de dirección en la fuerza longitudinal	Cumplimiento

[Thaller et al. \(2016\)](#) reportaron estudios utilizando la herramienta de simulación MBS como es *Car-Marker* y el método de sistema de identificación directa de tiempo continuo (*CT SysId*) que sirve para obtener estimaciones precisas de los valores de los parámetros del sistema de suspensión. A través de las pruebas dinámicas que consisten en excitar el sistema de suspensión manejando, también el análisis de uno o varios obstáculos pequeños y registrando la respuesta de este. *CT SysId* se utiliza para adaptar los valores de parámetros desconocidos de un modelo de vehículo provisional con el fin de que coincida mejor con los datos medidos. Finalmente [Sandu et al. \(2011\)](#) estudió en un auto de la Competencia *Grand American* para validar los resultados experimentales con los obtenidos en un banco de prueba de macpherson comparado con simulación dinámica MBS donde el modelo no lineal exhibe una coincidencia de aceleración ligeramente mejor que el modelo lineal, analizándose el grado de no linealidad presente en la suspensión.

Generalmente, es obvio que la cantidad de esfuerzo más alta se ha producido en regiones específicas que están cerca del punto fijo en el chasis, como se muestra en la figura 6b. Al

respecto, según [Zhang et al. \(2015\)](#) reportaron que el brazo de la suspensión se analiza en condiciones de carga para garantizar que esté seguro en el proceso de conducción, a través del módulo de análisis de fatiga ANSYS y se verifica que el brazo pueda cumplir con los requisitos de resistencia a la fatiga. Por todo esto la influencia de los componentes de la suspensión sobre las rigideces generales del sistema puede determinarse variando las rigideces de los diversos modelos EF. Según [HeiBing y Ersoy. \(2010\)](#) una opción es la optimización topológica de los distintos componentes para alcanzar sus nuevos valores de rigidez, estos nuevos modelos de componentes se cargan en el modelo de simulación *Adams/flex*, que luego se utiliza para verificar que el sistema global sigue cumpliendo sus objetivos elastocinemáticos, y automatizar el diseño, también se puede reducir espesores de material en aquellas direcciones de carga que no requieren un gran valor de rigidez.

Por otra parte, [Li y Song. \(2014\)](#) establece sus resultados con el nefrograma de esfuerzos para la topología estructural del brazo de suspensión inferior y establece como el punto crítico al extremo de soporte de sujeción el cual tiene un mayor esfuerzo. Entonces, se intensifica parcialmente los materiales en esta área, para evitar el fenómeno de la pérdida de eficiencia. Esto es debido a la abrasión severa en todo tipo de juntas articuladas de suspensión inferior, también se debe plantear un tratamiento de endurecimiento en estos lugares para mejorar su resistencia a la abrasión.

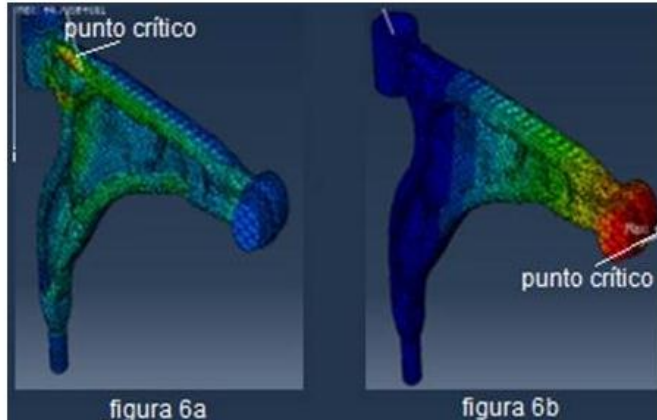


Fig. 6: Brazo inferior de suspensión se visualiza el máximo esfuerzo y el desplazamiento (Adaptada de [Bouazara et al. .2016](#))

**Anexo 3**

**Verdugo, U., Ismael, S., & Álvarez Cárdenas, C. L.** *Estudio numérico y experimental de la influencia del tamaño de las ruedas sobre los elementos de la suspensión Mcpherson*, Master's thesis, Universidad del Azuay (2017).



**UNIVERSIDAD DEL AZUAY**

**Departamento de Posgrados**

**Maestría en Sistemas Vehiculares.**

**Estudio numérico y experimental de la influencia del tamaño de las  
ruedas sobre los elementos de la suspensión Mcpherson.**

**Trabajo de graduación previo a la obtención del título de:**

**Magíster en Sistemas Vehiculares.**

**Autores: Ing. Santiago Ismael Urgilés Verdugo.**

**Ing. Carlos Lenin Álvarez Cárdenas.**

**Director: Ing. Robert Rockwood Iglesias. Mgst.**

**Cuenca, Ecuador**

**2017**

## CAPÍTULO 2.

### SIMULACIÓN COMPUTACIONAL DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN, UTILIZANDO HERRAMIENTAS CAE.

#### Introducción.

En el presente capítulo se elabora un modelo CAD del brazo oscilante de la suspensión y muñón de dirección del vehículo SUV. La geometría es obtenida del vehículo modelo Hyundai Tucson IX, año 2016. Posteriormente se elabora un modelo CAE de la suspensión y se realiza un análisis cuasi-estático, para encontrar las deformaciones y esfuerzos del brazo oscilante de la suspensión, cuando se varían las dimensiones de los neumáticos 255/60R17 y 245/45R18, posteriormente se analizan los resultados.

#### 2.1 Pre proceso de modelo CAE.

2.1.1 Consideraciones para la modelación CAD de los componentes del sistema de suspensión Mcpherson. Cuando el vehículo se está desplazando debido a las irregularidades que tiene la calzada el sistema de suspensión de un vehículo actúa y se transfiere los esfuerzos a través del neumático y la rueda, hacia los demás componentes. Por lo tanto, cada fabricante de automóviles diseña su propio sistema de suspensión, tomando en cuenta las consideraciones cinemáticas del sistema de suspensión empleado, geometría del modelo, materiales de fabricación, y datos técnicos del automóvil para elaborar el cálculo de la suspensión. (Geun-Yeon Kim, 2014).

##### 2.1.1.1 Cinemática del sistema de suspensión de tipo Mcpherson en modelo CAD.

Para una suspensión independiente, en la parte delantera o posterior del vehículo, el ensamble de brazos oscilantes en forma de A, está hecho con la intención de controlar el movimiento relativo de la llanta con el vehículo, y permitir el desplazamiento de la suspensión en una sola dirección evitando la deformación innecesaria de sus componentes. La dirección del desplazamiento puede tener, ganancia de ángulo cámben, cambio de ángulo cáster, cambio en la convergencia y divergencia, dependiendo de los cálculos del diseñador; pero la dirección del movimiento del amortiguamiento siempre tiene una dirección definida, cuando realiza su movimiento en compresión (hacia arriba) y cuando realiza su movimiento en tensión (hacia abajo), en otras palabras, se dice que el eje del amortiguador está restringido a una sola dirección de movimiento relativo al cuerpo del vehículo.

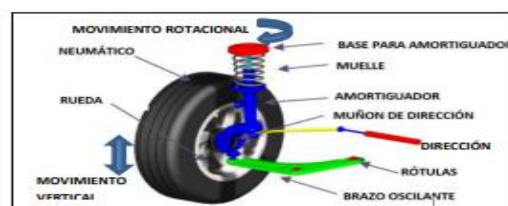


Figura 2.1. Movimientos de la suspensión.

Fuente: Área de Ingeniería y transportes (2004). Suspensión McPherson delantera. Recuperado de [http:// www.unioviado.es](http://www.unioviado.es)

Existen componentes de conexión del sistema, como el muñón de la dirección que no rota, pero, permite la rotación del neumático con el eje de transmisión. Así mismo, las articulaciones y conexiones de la suspensión están diseñadas para permitir el movimiento del muñón hacia arriba y abajo, controlar el movimiento del muelle y el amortiguador. En las suspensiones frontales sin embargo existe un grado de rotación libre para girar la llanta en la dirección que se requiere en el vehículo, que es comandado por el sistema de dirección como se ilustra en las figura 2.1

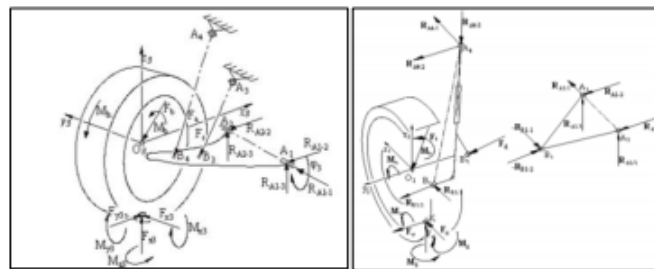
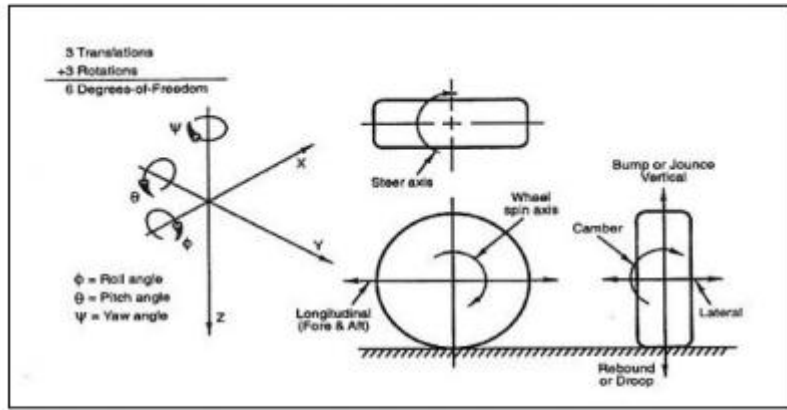


Figura 2.2. Fuerzas, momentos actuantes en suspensión McPherson.

Fuente: Zaktad Mechaniki Plynów (1994). Suspensión McPherson delantera. Recuperado de [http:// www.mech.pk.edu.pl](http://www.mech.pk.edu.pl)

Para cualquier cuerpo que se mueve en un espacio relativo a otro cuerpo, su movimiento puede ser completamente definido por tres componentes de movimiento lineal, y tres componentes de movimiento rotacional, entonces, un cuerpo tiene seis grados de libertad de movimiento en un sistema de tres dimensiones; así mismo, se mencionó que cualquier suspensión independiente puede moverse solamente en una dirección relativa a la carrocería del vehículo, sin tomar en cuenta la dirección del vehículo, por tanto se menciona que la suspensión del vehículo tiene restricción del movimiento en cinco direcciones. Pero en la realidad las partes mecánicas que forman la suspensión no son perfectas, para restringir el movimiento del vehículo en direcciones determinadas, es necesario elaborar un estudio de las geometrías y fuerzas que actúan en las suspensiones independientes, para determinar cómo restringir el movimiento de la suspensión, en especial al muñón de dirección, para limitar su movimiento en cinco direcciones, como se puede observar en la figura 2.2 y 2.3.

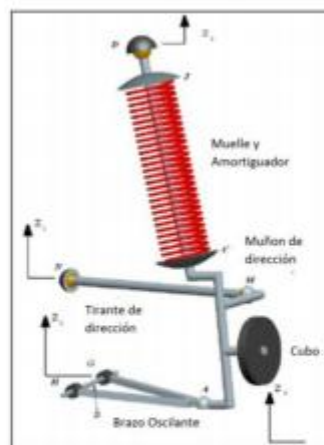




**Figura 2.3.** Sistema de coordenadas y tipos de movimientos de la suspensión.

**Fuente:** (William F. Milliken, 1994) *Fundamentals of vehicles*. Recuperado de <https://www.milliken.com>

Con el propósito de restringir el movimiento de la suspensión se utiliza un varillaje con rótulas al final de cada barra, siendo esta la manera más común de restringir el movimiento de la suspensión. Entonces para poder restringir 5 grados de libertad se necesita 5 barras que funcionen a tensión y compresión. En una suspensión McPherson el puntal o amortiguador, es cinemáticamente un mecanismo deslizante, así mismo, un brazo inferior de control igual a un brazo en A, contiene dos varillas unidas al final con una rótula que será conectada al muñón de dirección y el otro extremo a la carrocería, como se ve en la figura 2.4. (William F. Milliken, 1994)

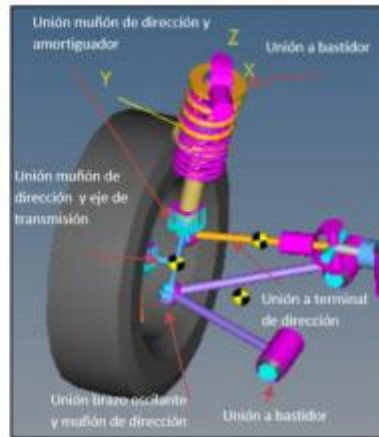


**Figura 2.4.** Restricciones de la suspensión tipo McPherson.

**Fuente:** Researchgate (2004). *Suspension Degree of freedom*. Recuperado de <https://www.researchgate.net>

2.1.1.2 Restricciones de movimiento para ensamble del modelo CAD. Según (S. Vijayarangan, 2012), por medio de la rueda y neumático, se transfieren las diferentes cargas ocasionadas por el

tipo de calzada, aceleración, frenado, arranque y posición estática, hacia los componentes del sistema de suspensión y al chasis. Para esto todos los componentes de la suspensión se encuentran unidos por elementos de unión como rótulas y pernos. Para el ensamble de partes en el modelo CAD, se deben colocar restricciones de unión que simulan las uniones de rótulas y pernos entre partes de la suspensión, para posteriormente ser empleadas en el modelo virtual CAE, mostradas en la figura 2.5.

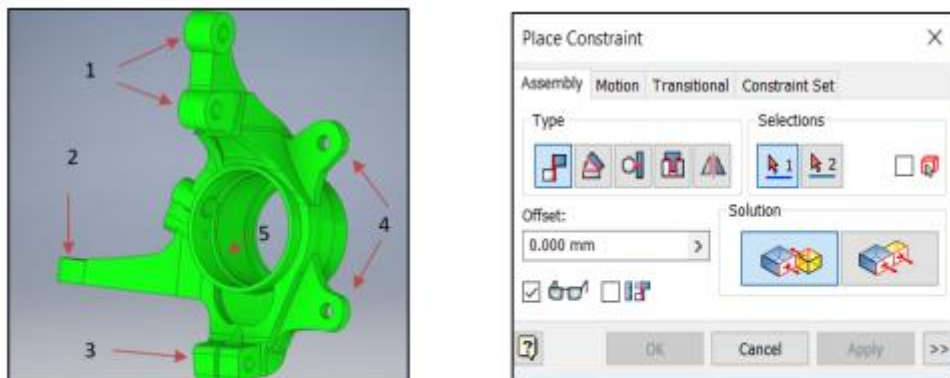


**Figura 2.5.** Puntos de unión del brazo oscilante McPherson.

**Fuente:** Autores.

• **Restricciones de contacto en Muñón de dirección.**

En el sistema de suspensión, el muñón de dirección se une o ensambla adjunto a cinco diferentes partes en diferentes puntos. Cuando se observa la figura 2.6, en el muñón de dirección existen agujeros para colocar pernos de sujeción que unen a este con la base del amortiguador (1), así mismo, la unión con terminal de la dirección (2), la rótula de unión del brazo oscilante de suspensión (3), la unión con la mordaza de pastillas de freno (4), y la unión con el eje de transmisión por medio de un rodamiento (5).



**Figura 2.6.** Puntos para ensamble y restricciones CAD

**Fuente:** Autores.

Las restricciones para el muñón de dirección utilizadas en el modelo CAD se detallan en la tabla 2.1, mencionadas según la numeración de la figura anterior; la restricción 4 no se utiliza debido a que el porta pastillas de freno ha sido despreciado para este análisis y no tiene influencia sobre los resultados.

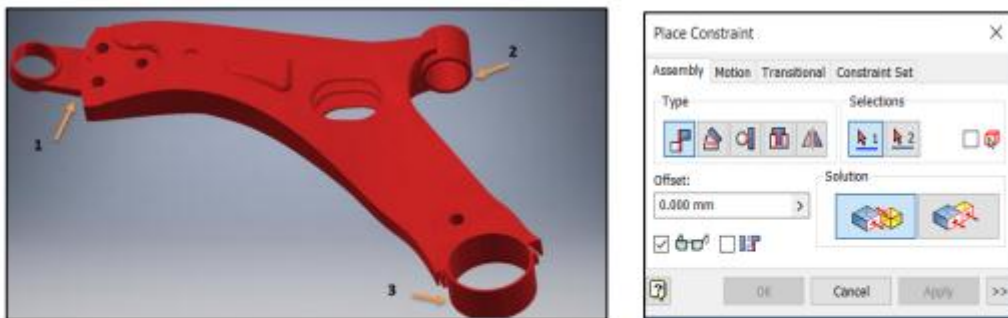
**Tabla 2.1.** Restricciones para ensamble de Muñón de dirección.

#	Restricciones Muñón de Dirección.
1	Restricción de centro para agujeros
1	Restricción de contacto
2	Restricción de centro para agujeros
2	Restricción de contacto
3	Restricción de centro para agujeros
3	Restricción de contacto
4	-----

**Fuente:** Autores.

• **Restricciones de contacto en brazo oscilante de suspensión.**

Este elemento tiene tres conexiones, el porta rótula y la rótula de suspensión (1) que son el lazo de unión entre el muñón de dirección y el brazo oscilante de suspensión, además, existen agujeros de unión (2 y 3) de buje y perno, para unión con el chasis del vehículo mostradas en la figura 2.7.



**Figura 2.7.** Puntos de restricción para ensamble CAD.

**Fuente:** Autores

Las restricciones para el brazo oscilante utilizadas en el modelo CAD se detallan en la tabla 2.2 según la numeración de la figura 2.7 anterior.

**Tabla 2.2.** Restricciones para ensamble de Muñón de dirección.

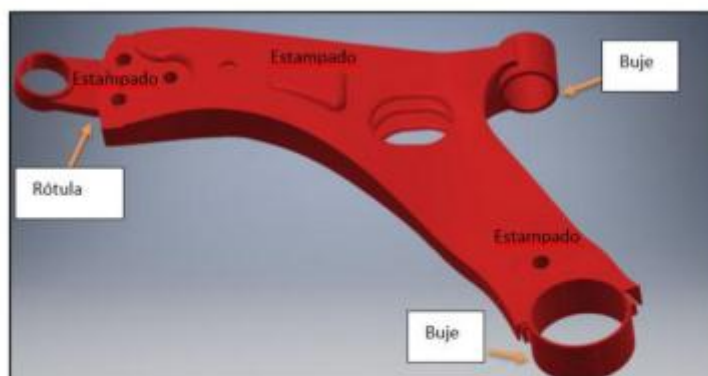
#	Restricciones Brazo oscilante de suspensión.
1	Restricción de centro para agujeros
1	Restricción de contacto
2	Restricción de centro para agujeros
2	Restricción de contacto
3	Restricción de centro para agujeros
3	Restricción de contacto

Fuente: Autores.

### 2.1.1.3 Simplificaciones asumidas para modelo CAD.

#### • Bujes de suspensión.

Las uniones del chasis con el brazo de suspensión en el modelo CAD, por su estructura compleja no se modelan en CAD, pero se reemplazan posteriormente por componentes simplificados en el modelo CAE, para el análisis de esfuerzos del sistema de suspensión, cuya ubicación muestra la figura 2.8.



**Figura 2.8.** Puntos de unión del brazo oscilante.

Fuente: Autores

#### • Rótula.

Al igual que en el caso anterior se incorporará al conjunto de la suspensión como un modelo simplificado, cuando se elabore el análisis con el modelo CAE, su ubicación se muestra en la figura 2.8.

#### • Pernos.

Los pernos de sujeción del brazo oscilante con el chasis son reemplazados por elementos rígidos 1D (una dimensión) cuando se elabora el modelado CAE.

#### • Soldadura.

La soldadura que une el brazo oscilante de la suspensión en diferentes partes se elabora con elementos de fijación de soldadura 1D (Weld o soldadura) en el modelo CAE.

- **Ejes de transmisión.**

Los ejes de transmisión no se utilizan en el ensamble del conjunto de la suspensión.

- **Mordaza de pastillas de freno.**

La mordaza de las pastillas de freno delanteras del sistema de suspensión son despreciados para este análisis.

- **Rodamientos.**

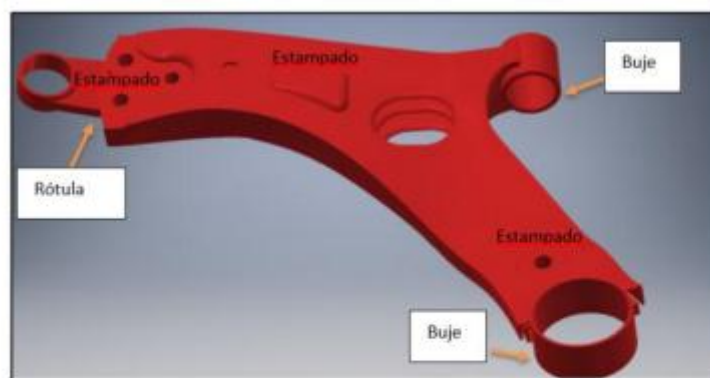
Los rodamientos son incorporados posteriormente al ensamble en el modelo CAE como un modelo simplificado.

- **Muñón de dirección.**

Según (Suhas Kangde, 2014), para elaborar una experimentación en el muñón de dirección se debe utilizar instrumentos y maquinaria especializada, ya que, si la experimentación se realiza en el vehículo, el apriete de los pernos de unión con amortiguador influyen de manera considerable en los esfuerzos de este elemento, es por esto que en este análisis no se utiliza el muñón de dirección del modelo CAE, debido a la complejidad de la instrumentación para la medición de esfuerzos sobre este elemento.

### 2.1.1.5 Forma de la geometría.

En la figura 2.9 se observan partes del brazo oscilante que se elaboraron por medio de un proceso de estampación, y se encuentran situadas en la base de sujeción de la rótula de suspensión, para permitir una mejor sujeción entre la rótula y el brazo oscilante por medio de pernos. Así mismo el estampado está presente en las caras superiores y cerca de los agujeros del brazo oscilante.



**Figura 2.9.** Puntos de restricción para ensamble CAD.

**Fuente:** Autores

### 2.1.1.6 Material y Propiedades físicas.

Según Kumar (2013) actualmente el material utilizado para diseñar, brazos de suspensión es el acero SAE 1020 con propiedad que se muestra en la tabla 2.4.

Propiedades Mecánicas	Valor	Unidades
<b>Módulo Young</b>	207	GPa
<b>Densidad</b>	7870	Kg/m <sup>3</sup>
<b>Esfuerzo máximo tensión elástica</b>	380	MPa

Tabla 2.4

### 2.1.2 Preparación de la geometría.

En esta etapa se desarrolla un conjunto de procedimientos para preparar la geometría del modelo CAD de la suspensión, a través de las herramientas de edición de geometrías de una, dos y tres dimensiones del programa CAE como se muestra en la figura 2.10; para finalmente elaborar el mallado del brazo oscilante y el muñón de dirección.

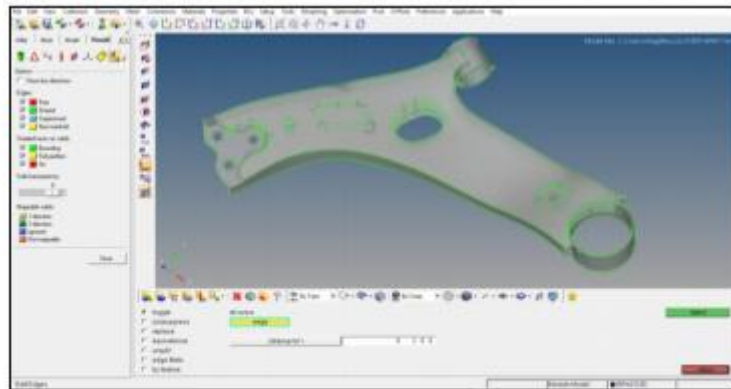


Figura 2.10. Corrección de la geometría del brazo de suspensión.

Fuente: Autores.

### 2.1.3 Parametrización del modelo CAE.

El mallado de los componentes es uno de los aspectos más importantes de este trabajo, pues se deben establecer parámetros para verificación de la calidad de mallado. En la tabla 2.5, se presentan los valores de los parámetros que se utilizaron para la elaboración del mallado de los elementos estudiados.

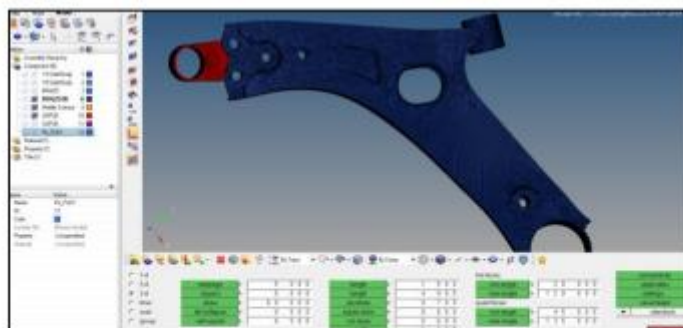
**Tabla 2.5.** Criterios y valores para el mallado de componentes.

CRITERIOS	VALOR
Tamaño de la malla.	4
Forma del elemento en regiones del cuerpo.	5
Tipo de elemento a utilizar.	Triángulos
Dimensiones máximas y mínimas del elemento.	1.5-4
Numero de Jacob.	0.7
Relación de aspecto del elemento.	5
Alabeo del elemento.	60
Distorsión del elemento.	0.5
Longitud del elemento.	1.5
Volumen del elemento.	5
Angulo mínimo y ángulo máximo	20 y 120

Fuente: Autores, en base al manual de uso del programa utilizado.

### 2.1.4 Validación del modelo parametrizado.

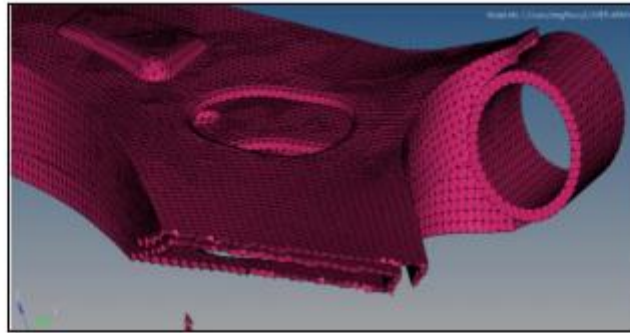
El mallado del brazo oscilante de suspensión y porta rótula se observa en la figura 2.11, la validación del tamaño y tipo de elementos, ha sido desarrollada en función de la correlación existente entre los valores de deformación unitaria estimados en las simulaciones computacionales, con respecto a pruebas físicas elementales, tal cual como se describe posteriormente.



**Figura 2.11.** Mallado de brazo oscilante de suspensión.

Fuente: Autor.

Combinaciones de elementos triangulares (2D) y tetraédricos (3D) fueron utilizados durante el proceso de mallado, debido a su facilidad para acoplarse a geometrías complejas con una calidad aceptable. El tamaño de la malla seleccionado para los elementos tetraédricos (3D) de 4 mm, otro factor importante que se consideró fue el costo computacional asociado a este tipo de simulación en estado transitorio. En la figura 2.12 se muestra el detalle del modelo parametrizado en la zona cercana al punto de unión del brazo oscilante con el chasis.

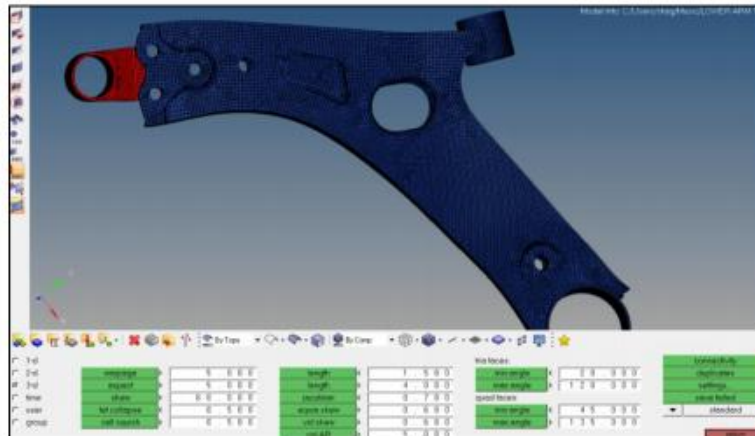


**Figura 2.12.** Mallado de elementos tetraédricos en tres dimensiones en brazos oscilante de suspensión.

**Fuente:** Autores.

El número de nodos utilizados es de 43914, y se generan 133628 elementos tetraédricos en 3 dimensiones, además, se tiene dos componentes diferentes en el ensamble, que se encuentran unidos por medio de elementos rígidos 1D que simulan los pernos de conexión, como se observa en la figura 2.12 y figura 2.13.

Por otro lado la figura 2.14 muestra los valores de revisión de calidad de la malla dentro de los parámetros anteriormente mencionados en la tabla 2.5.



**Figura 2.14.** Parámetros de calidad de malla de brazo oscilante de suspensión.

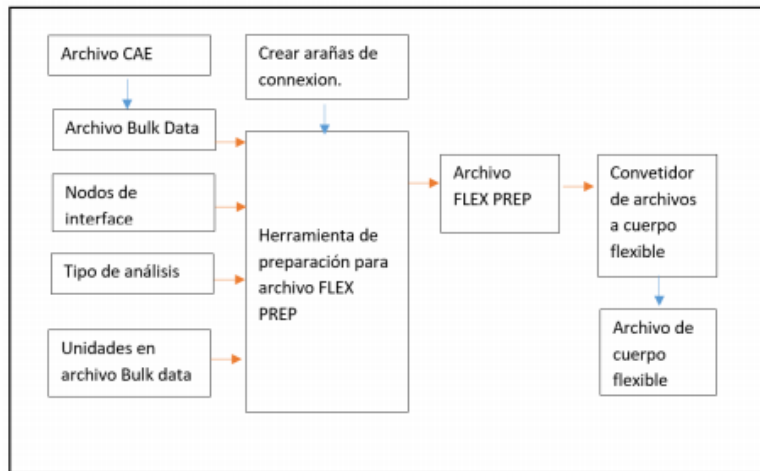
**Fuente:** Autores.

### 2.2.1 Conversión de cuerpos Rígidos a Flexibles en el programa CAE para análisis dinámico.

Para iniciar el proceso de la simulación dinámica del sistema de suspensión, es necesario convertir los cuerpos rígidos y mallados con anterioridad, en cuerpos flexibles, para que puedan



ser utilizados durante la simulación dinámica en el programa CAE. En la figura 2.15 se presenta un diagrama de flujo general sobre este procedimiento.

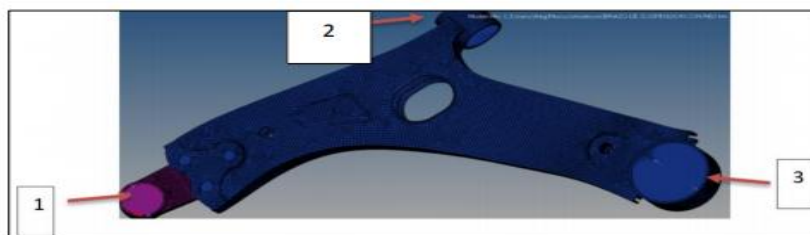


**Figura 2.15.** Diagrama de flujo general sobre este procedimiento para transformar cuerpos rígidos en cuerpos flexibles.

**Fuente:** Autores.

### 2.2.2 Condiciones de frontera.

En la simulación es muy importante configurar los puntos de apoyo del plato de suspensión, de forma que se asemejen a las condiciones reales de operación, en la figura 2.16, se muestra el punto 1, el cual conecta la rótula de suspensión, y es libre de rotar en todas las direcciones. Los puntos 2,3, son aquellos en los se establece la conexión con bujes de suspensión, constan de elementos rígidos creados a partir de la definición de nodos dependientes, acoplados a uno independiente, esta formación forma una red de elementos rígidos que permite la repartición homogénea de cargas hacia cada uno de los nodos independientes, estos elementos poseen 5 grados de libertad y están restringidos solamente para permitir el movimiento de rotación del brazo oscilante de suspensión para que el amortiguador pueda extenderse y comprimirse.



**Figura 2.16.** Puntos de unión para la simulación dinámica del muñón de la dirección.

**Fuente:** Autores.

En este aspecto, la restricción de contacto de la parte superior del amortiguador que restringe al amortiguador en 5 grados de libertad, permite solamente el movimiento de tensión y compresión del mismo, como se observa en la figura 2.17. Así mismo, el movimiento de los levantadores sobre los cuales están apoyados los neumáticos está restringidos en 5 grados de libertad, para solamente moverse en sentido vertical.

Anexo 4

**D. Mesa Fernández**, *Simulación virtual de una suspensión McPherson en entorno VRML*, Bachelor's thesis, Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid 2011.

**ESCUELA POLITÉCNICA  
SUPERIOR DE LA UNIVERSIDAD  
CARLOS III DE MADRID**



**INGENIERÍA TÉCNICA INDUSTRIAL  
MECÁNICA**

**ÁREA DE INGENIERÍA MECÁNICA**

**SIMULACIÓN VIRTUAL DE UNA  
SUSPENSIÓN MCPHERSON EN  
ENTORNO VRML**

Autor: D. Daniel Mesa Fernández  
Tutoras: Dra. Dña. Beatriz López Boada  
Dra. Dña. M<sup>a</sup> Jesús López Boada

Febrero 2011

#### 4.5. DISEÑO DE LAS PIEZAS DE LA SUSPENSIÓN

A continuación se describe el proceso de creación de una de las piezas del presente proyecto, indicando cada uno de los pasos para formar el triángulo de la suspensión, ver figura 4.15:



Figura 4.15. Triángulo

a. En primer lugar se realiza un boceto con el perfil de la “L” que es la forma del trapecio (figura 4.16 izquierda), y se realiza una protrusión para convertirlo en un volumen (figura 4.16 derecha).

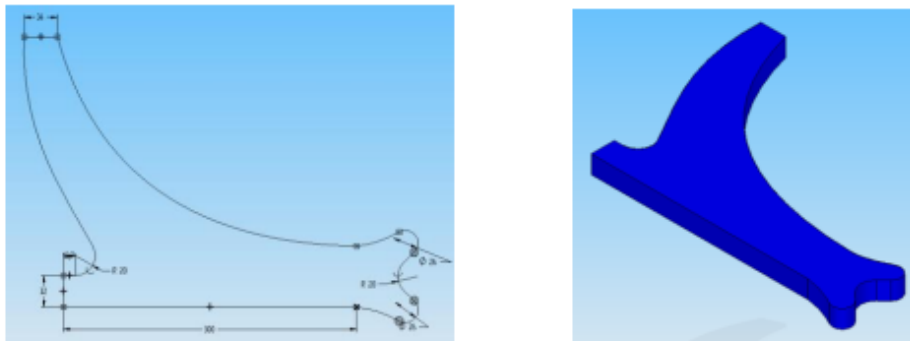
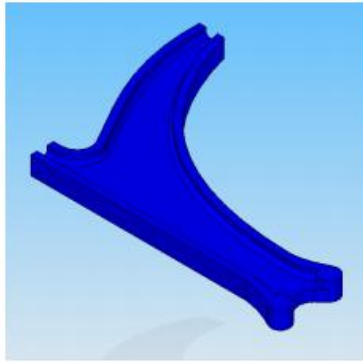


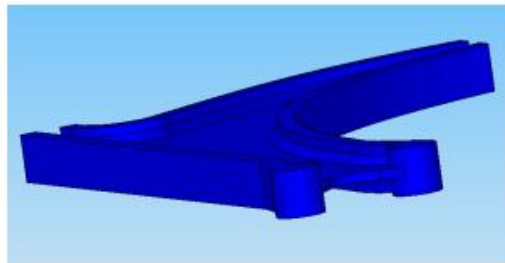
Figura 4.16. Creación del triángulo I

b. A continuación, se realiza un aligeramiento de la pieza mediante un vaciado por proyección en la cara superior, seguido de un redondeo de aristas para eliminar tensiones y para reducir las aristas vivas, ver figura 4.17.



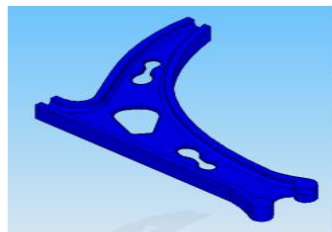
**Figura 4.17. Creación del triángulo II**

c. Ahora se pasa a realizar los mismos pasos que el punto anterior pero en la cara inferior. Para no repetir ambas operaciones, se realiza una simetría por el plano intermedio entre ambas caras, ver figura 4.18.



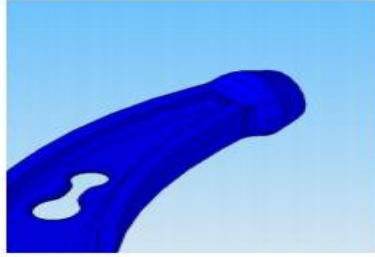
**Figura 4.18. Creación del triángulo III**

El siguiente paso es el de aligerar el triángulo mediante dos vaciados con sus respectivos redondeos de aristas, se muestra en figura 4.19



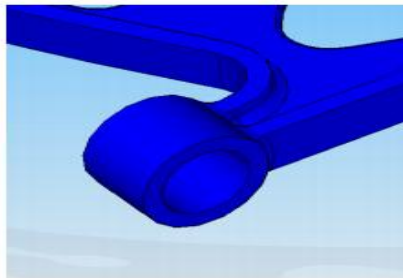
**Figura 4.19. Creación del triángulo IV**

d. Ahora que el cuerpo ya está diseñado, se pasa a diseñar en los siguientes puntos los diferentes sistemas de sujeción que lleva el trapecio con la bancada por un lado y con la mangueta por el otro. Para la primera sujeción, vamos a realizar una protrusión por secciones. Este tipo de operación crea un volumen a partir de dos o más perfiles unidos entre ellos por una trayectoria, como se muestra en la figura 4.20.



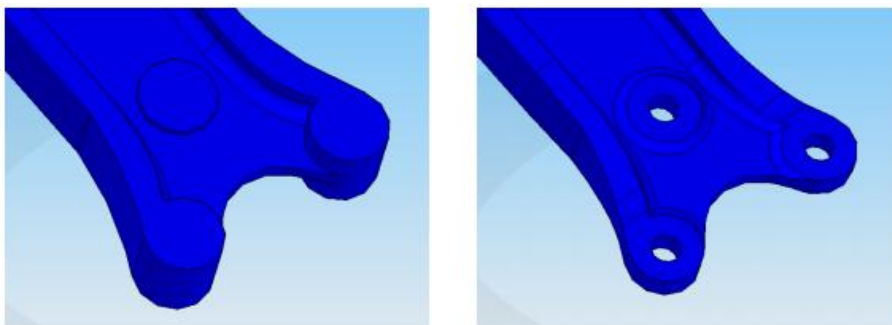
**Figura 4.20. Creación del triángulo V**

e. Para la segunda sujeción a la bancada, se va a realizar una protrusión por revolución para generar un cilindro hueco en el cual se coloca un silentblock, como se muestra en la figura 4.21.



**Figura 4.21. Creación del triángulo VI**

f. Para la unión entre el trapecio y la mangueta, se utiliza una pieza que contiene una rótula, permitiendo el movimiento libre al trapecio. Esta pieza lleva una sujeción con 3 tornillos al trapecio, para su realización se siguen los pasos indicados a continuación. Lo primero que se hace es dar un poco de espesor al trapecio en la parte central para tener donde amarrar el tornillo (figura 4.22 izquierda). Lo siguiente que se hace son 3 taladros, mediante la operación de agujereado, y por último se realizan los redondeos oportunos (figura 4.22 derecha).



**Figura 4.22. Creación del triángulo VII**

Para finalizar este punto, se muestran todas las piezas que se han creado en Solid Edge para la creación de la suspensión McPherson y su posterior simulación en realidad virtual (ver figuras desde la 4.23 hasta la 4.50).

**Anexo 5**

**J. T. C Lizarza.** *Método de los elementos finitos para análisis estructural.* Escuela Superior de Ingenieros Industriales, Universidad de Navarra. Pamplona 2000.

# **Método de los Elementos Finitos para Análisis Estructural**

Juan Tomás Celigüeta Lizarza

*Dr. Ingeniero Industrial*

*Profesor de Análisis Estructural de la Escuela Superior de  
Ingenieros de San Sebastián*

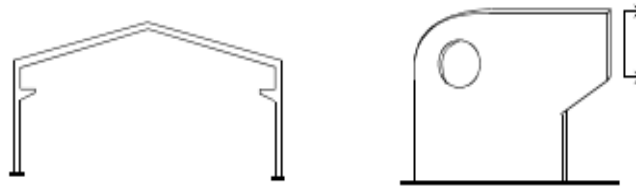
**tecnun**

CAMPUS TECNOLÓGICO DE LA UNIVERSIDAD DE NAVARRA  
NAFARROAKO UNIBERTSITATEKO CAMPUS TEKNOLOGIKOA  
Escuela Superior de Ingenieros • Ingeniarien Goi Mailako Eskola

# Introducción al Método de los Elementos Finitos

## 1.1. SISTEMAS DISCRETOS Y SISTEMAS CONTINUOS

Al efectuar una clasificación de las estructuras, suelen dividirse en discretas o reticulares y continuas. Las primeras son aquellas que están formadas por un ensamblaje de elementos claramente diferenciados unos de otros y unidos en una serie de puntos concretos, de tal manera que el sistema total tiene forma de malla o retícula. La característica fundamental de las estructuras discretas es que su deformación puede definirse de manera exacta mediante un número finito de parámetros, como por ejemplo las deformaciones de los puntos de unión de unos elementos y otros. De esta manera el equilibrio de toda la estructura puede representarse mediante las ecuaciones de equilibrio en las direcciones de dichas deformaciones.



**Figura 1.1** Estructuras discreta y continua

Como contrapartida, en los sistemas continuos no es posible separar, a priori, el sistema en un número finito de elementos discretos. Si se toma una parte cualquiera del sistema, el número de puntos de unión entre dicha parte y el resto de la estructura es infinito, y es por lo tanto imposible utilizar el mismo método que en los sistemas discretos, pues los puntos de unión entre los distintos elementos, que allí aparecían de manera natural, no existen aquí.

Las estructuras continuas son muy frecuentes en ingeniería, como por ejemplo: bastidores de máquinas, carrocerías de vehículos, losas de cimentación de edificios, vasijas de reactores, elementos de máquinas (bielas, poleas, carcasas...), y para su análisis es necesario disponer de un método que tenga en cuenta su naturaleza continua.

Hasta la llegada del Método de los Elementos Finitos (MEF), los sistemas continuos se abordaban analíticamente, pero por esa vía sólo es posible obtener solución para sistemas con geometría muy sencilla, y/o con condiciones de contorno simples. También se han utilizado técnicas de diferencias finitas, pero éstas plantean problemas cuando los contornos son complicados.

Como precursores del MEF debe citarse a Argyris y Kelsey (Stuttgart, 1955) y a Turner, Clough, Martin y Topp (Boeing, 1956), aunque con posterioridad el número de autores en el campo del MEF ha sido enorme, siendo uno de los campos de la ingeniería a los que más esfuerzos de investigación se han dedicado.

## 1.2. HIPÓTESIS DE DISCRETIZACIÓN

En una estructura discreta, su deformación viene definida por un número finito de parámetros (deformaciones y/o giros), que juntos conforman el vector de deformaciones  $\mathbf{\Delta}$ , y la estructura tiene tantas formas de deformarse como términos tenga dicho vector. Un medio continuo tiene infinitas formas posibles de deformarse, independientes unas de otras, ya que cada punto puede desplazarse manteniendo fijos cualquier número finito de los puntos restantes, por grande que sea este último. Por lo tanto la configuración deformada de la estructura no puede venir dada por un vector finito  $\mathbf{\Delta}$  como el anterior, sino que es una función vectorial  $\mathbf{u}$ , que indica cuáles son las deformaciones de cualquier punto, y que tiene tres componentes escalares:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{Bmatrix} \quad (1.1)$$

Esta función es la solución de la ecuación diferencial que gobierna el problema, y si éste está bien planteado, cumplirá las condiciones de contorno impuestas, pero en principio no puede asegurarse que esta función  $\mathbf{u}$  tenga una expresión analítica manejable, ni siquiera que pueda calcularse. Por lo tanto la función  $\mathbf{u}$  no podrá conocerse en general.

Para resolver este problema, el Método de los Elementos Finitos recurre a la hipótesis de discretización, que se basa en lo siguiente:



- El continuo se divide por medio de líneas o superficies imaginarias en una serie de regiones contiguas y disjuntas entre sí, de formas geométricas sencillas y normalizadas, llamadas *elementos finitos*.
- Los elementos finitos se unen entre sí en un número finito de puntos, llamados *nudos*.
- Los desplazamientos de los nudos son las incógnitas básicas del problema, y éstos determinan unívocamente la configuración deformada de la estructura. Sólo estos desplazamientos nodales se consideran independientes.
- El desplazamiento de un punto cualquiera, viene unívocamente determinado por los desplazamientos de los nudos del elemento al que pertenece el punto. Para ello se definen para cada elemento, unas *funciones de interpolación* que permiten calcular el valor de cualquier desplazamiento interior por interpolación de los desplazamientos nodales. Estas funciones de interpolación serán de tal naturaleza que se garantice la compatibilidad de deformaciones necesaria en los contornos de unión entre los elementos.
- Las funciones de interpolación y los desplazamientos nodales definen unívocamente el estado de deformaciones unitarias en el interior del elemento. Éstas, mediante las ecuaciones constitutivas del material definen el estado de tensiones en el elemento y por supuesto en sus bordes.
- Para cada elemento, existe un sistema de fuerzas concentradas en los nudos, que equilibran a las tensiones existentes en el contorno del elemento, y a las fuerzas exteriores sobre él actuantes.

Los dos aspectos más importantes de esta hipótesis, sobre los que hay que hacer hincapié son:

- La función solución del problema  $\mathbf{u}$  es aproximada de forma independiente en cada elemento. Para una estructura discretizada en varios elementos, pueden utilizarse funciones de interpolación distintas para cada uno de ellos, a juicio del analista, aunque deben cumplirse ciertas condiciones de compatibilidad en las fronteras entre los elementos.
- La función solución es aproximada dentro de cada elemento, apoyándose en un número finito (y pequeño) de parámetros, que son los valores de dicha función en los nudos que configuran el elemento y a veces sus derivadas.

Esta hipótesis de discretización es el pilar básico del MEF, por lo que se suele decir de éste, que es un método discretizante, de parámetros distribuidos. La aproximación aquí indicada se conoce como la formulación en desplazamiento.

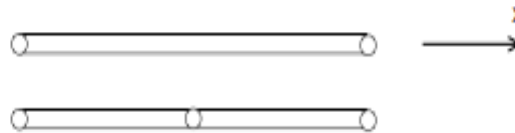
Claramente se han introducido algunas aproximaciones. En primer lugar no es siempre fácil asegurar que las funciones de interpolación elegidas satisfarán al requerimiento de continuidad de desplazamientos entre elementos adyacentes, por lo que puede violarse la condición de compatibilidad en las fronteras entre unos y otros. En segundo

lugar al concentrar las cargas equivalentes en los nudos, las condiciones de equilibrio se satisfarán solamente en ellos, y no se cumplirán usualmente en las fronteras entre elementos.

El proceso de discretización descrito tiene una justificación intuitiva, pero lo que de hecho se sugiere es la minimización de la energía potencial total del sistema, para un campo de deformaciones definido por el tipo de elementos utilizado en la discretización.

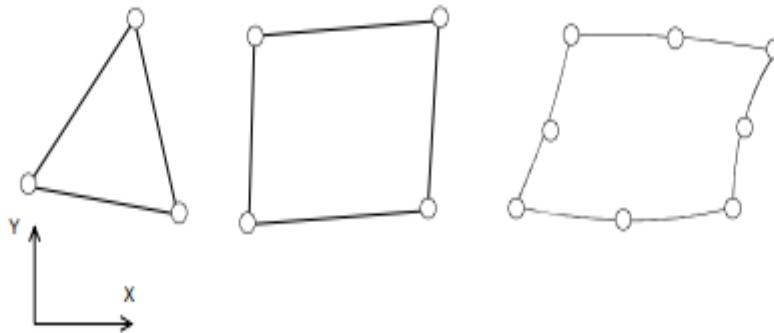
Con independencia de que más adelante se estudien en detalle, se representan a continuación algunos de los elementos más importantes.

- Elasticidad unidimensional



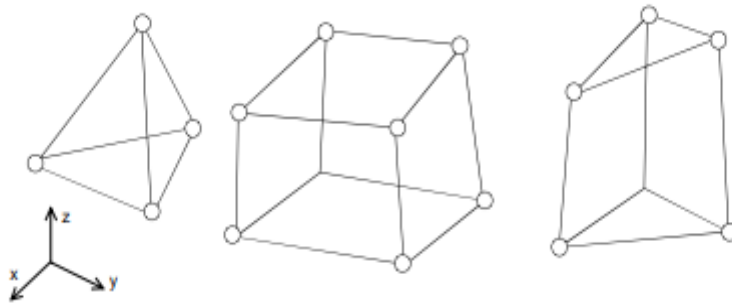
**Figura 1.2** Elementos para elasticidad unidimensional

- Elasticidad bidimensional



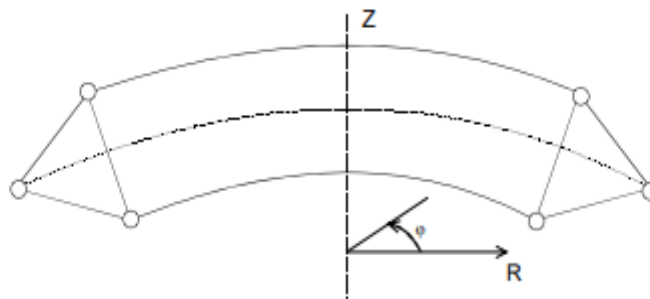
**Figura 1.3** Elementos para elasticidad bidimensional

- Elasticidad tridimensional



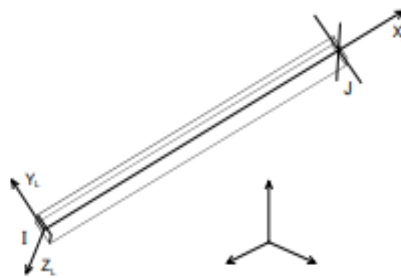
**Figura 1.4** Elementos para elasticidad tridimensional

- Problemas axisiméticos



**Figura 1.5** Elemento axisimétrico

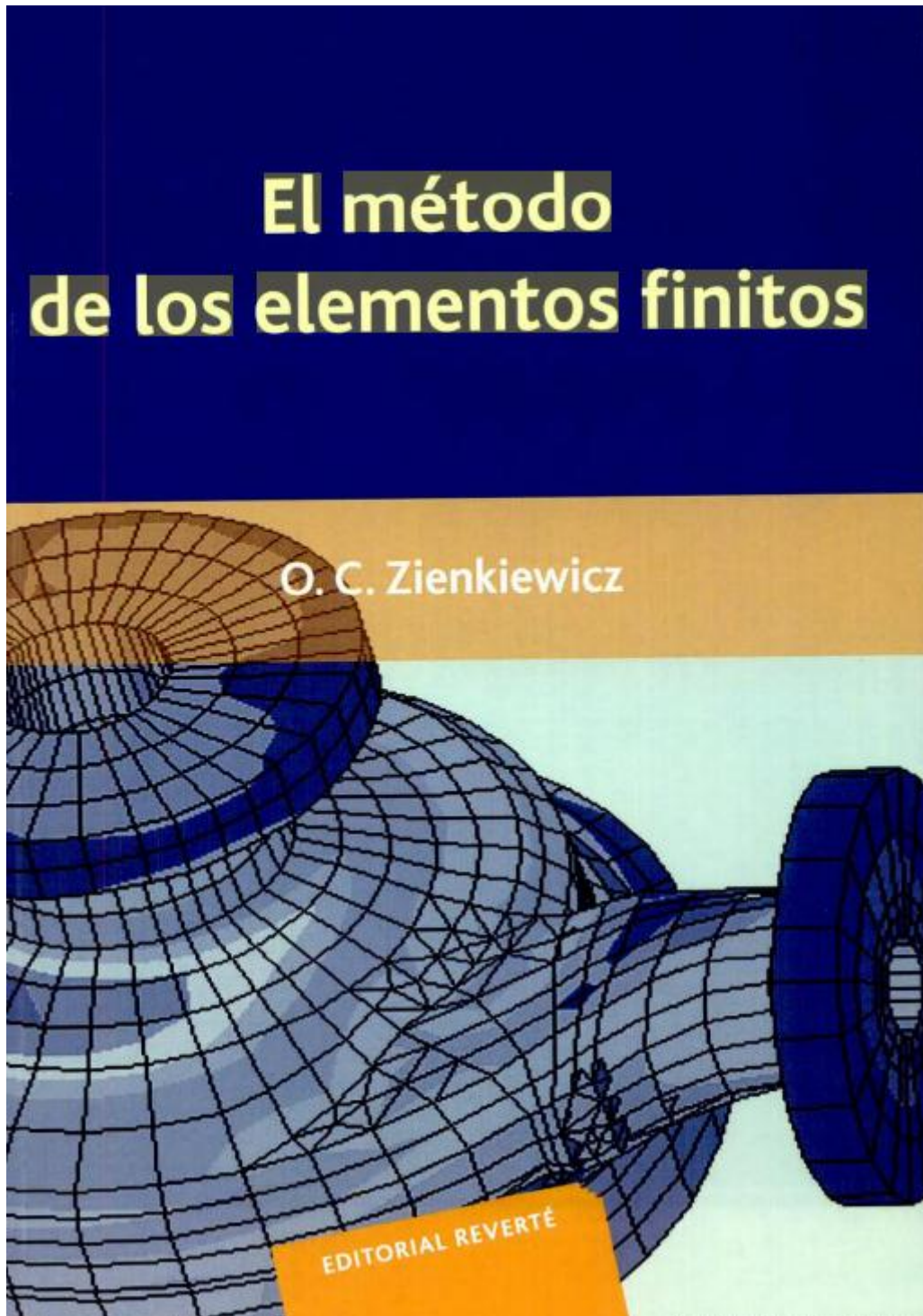
- Vigas



**Figura 1.6** Elemento viga

Anexo 6

O. C. Zienkiewicz, *El método de los elementos finitos*. Reverté (1981).



## Capítulo 2

# Los elementos finitos de un continuo elástico. Método de los desplazamientos

### 2.1. Introducción

Son muchas las facetas de la ingeniería en las que se precisa determinar la distribución de tensiones y deformaciones en un continuo elástico. Los casos particulares de dichos problemas pueden variar desde problemas bidimensionales de tensión o deformación plana, sólidos de revolución y flexión de placas y láminas, hasta el análisis más general de sólidos tridimensionales. En todos los casos, el número de interconexiones entre un «elemento finito» cualquiera rodeado por fronteras imaginarias y los elementos vecinos a él es infinito. Es difícil, por consiguiente, ver a primera vista cómo pueden discretizarse problemas de este tipo de la forma descrita en el capítulo precedente para casos de estructuras más simples. Esta dificultad puede superarse (y efectuarse la aproximación) de la siguiente manera:

- a) El continuo se divide, mediante líneas o superficies imaginarias, en un número de «elementos finitos».
- b) Se supone que los elementos están conectados entre sí mediante un número discreto de puntos, que llamaremos *nodos*, situados en sus contornos. Los desplazamientos de estos nodos serán las incógnitas fundamentales del problema, tal como ocurre en el análisis simple de estructuras.

- c) Se toma un conjunto de funciones que definan de manera única el campo de desplazamientos dentro de cada «elemento finito» en función de los desplazamientos nodales de dicho elemento.
- d) Estas funciones de desplazamientos definirán entonces de manera única el estado de deformación dentro del elemento en función de los desplazamientos nodales. Estas deformaciones, junto con las deformaciones iniciales y las propiedades constitutivas del material, definirán el estado de tensiones en todo el elemento y, por consiguiente, también en sus contornos.
- e) Se determina un sistema de fuerzas concentradas en los nodos, tal que equilibre las tensiones en el contorno y cualesquiera cargas repartidas, resultando así una relación entre fuerzas y desplazamientos de la forma (1.3).

Una vez alcanzado este punto, el procedimiento para encontrar la solución puede seguir el procedimiento general descrito con anterioridad.

Es evidente que hemos introducido una serie de aproximaciones. En primer lugar, no siempre es fácil asegurar que las funciones de desplazamientos escogidas satisfagan las condiciones de continuidad de los desplazamientos entre elementos adyacentes. Por consiguiente, esta condición de compatibilidad puede no cumplirse en el contorno de los elementos (aunque es evidente que dentro de cada elemento sí se cumplirá, a causa de la unicidad de los desplazamientos implicada en el hecho de que los mismos estén representados por funciones continuas). En segundo lugar, al concentrar las fuerzas equivalentes en los nodos, las condiciones de equilibrio sólo se cumplirán para el conjunto del continuo.

Normalmente, ocurrirá que tales condiciones no se cumplirán en zonas localizadas dentro y en el contorno de cada elemento. Será misión del ingeniero escoger la forma de los elementos y de las funciones de desplazamiento para cada caso particular, debiendo usar de su ingenio y habilidad, dependiendo el grado de aproximación que se alcance del uso que haga de esas dos facultades.

El procedimiento que acaba de esbozarse se conoce como método de los desplazamientos.<sup>1,2</sup>

Hasta aquí, el procedimiento descrito se justifica sólo intuitivamente, pero de hecho lo que se ha sugerido es equivalente a la minimización de la energía potencial total del sistema, siendo función ésta de un campo de desplazamientos impuesto. Si este campo de desplazamientos se define adecuadamente, deberá producirse convergencia hacia la solución correcta. El proceso es, por consiguiente, equivalente al conocido método de Ritz. Esta equivalencia se demostrará en una sección posterior de este capítulo, en donde se analizarán también los necesarios criterios de convergencia.

El reconocimiento de equivalencia entre el método de los elementos finitos y un proceso de minimización ha sido reciente<sup>3,2</sup>. Sin embargo, Courant en 1943<sup>4†</sup> y Prager y Synge<sup>5</sup> en 1947, propusieron métodos que son en esencia idénticos.

Esta generalización de las bases del método de los elementos finitos permite su ampliación a problemas continuos donde sea posible la formulación variacional, y lo cierto es que ya se dispone de procedimientos generales para discretizar mediante elementos finitos cualquier problema definido por un sistema de ecuaciones diferenciales adecuadamente constituido. Tales generalizaciones se estudiarán en el capítulo siguiente, y a lo largo del libro se aplicarán a diversos problemas no pertenecientes al campo de las estructuras. Se verá que los métodos descritos en este capítulo se reducen esencialmente a la aplicación de funciones de prueba y aproximaciones de Galerkin a un caso especial de la mecánica de sólidos.

2.2. Formulación directa de las características de un elemento finito

Las «recetas» para deducir las características de un elemento finito de un continuo, que fueron esbozadas en líneas generales, serán presentadas ahora bajo una forma matemática más detallada.

Es conveniente obtener los resultados de una forma general aplicable a cualquier situación pero, para evitar la introducción de conceptos más complicados, se ilustrarán las expresiones generales con un ejemplo muy sencillo de análisis de una rebanada delgada sometida a tensión plana. Para ello se divide la región en elementos triangulares como se muestra en la figura 2.1. Se subrayarán las relaciones que tengan carácter general. De nuevo se empleará notación matricial.

2.2.1. La función de desplazamientos. Un elemento finito típico *e*, se define por sus nodos *i, j, m, etc.*, y por su contorno formado por líneas rectas. Aproximemos los desplazamientos *u* de cualquier punto del elemento mediante un vector columna, *û*

$$u \approx \hat{u} = \sum N_i a_i^e = [N_i, N_j, \dots] \begin{Bmatrix} a_i \\ a_j \\ \vdots \end{Bmatrix} = N a^e \tag{2.1}$$

† Parece que ya Courant en 1923 anticipó la esencia del método de los elementos finitos de una manera general y, en particular para el caso de un elemento triangular, en un artículo con el título «On a convergence principle in calculus of variations». Kön. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Nachrichten. Berlín, 1923.

Afirma «Imaginamos una malla de triángulos cubriendo el dominio... los criterios de convergencia son válidos para cada dominio triangular».

Las funciones  $N_i$ ,  $N_j$ ,  $N_m$  han de escogerse de manera que, al sustituir en la (2.1) las coordenadas de los nodos, se obtengan los correspondientes desplazamientos nodales. Evidentemente, en general

$$N_i(x_i, y_i) = I \text{ (matriz unidad)}$$

mientras que

$$N_i(x_j, y_j) = N_i(x_m, y_m) = 0 \text{ etc.,}$$

condiciones que cumplen funciones lineales de  $x$  e  $y$  apropiadas.

Si las dos componentes de un desplazamiento se interpolan de la misma manera, podremos escribir

$$N_i = N_i I$$

y obtener  $N_i$  de (2.1), teniendo en cuenta que  $N_i = 1$  para  $x_i$  e  $y_i$  y cero en los otros vértices.

La interpolación lineal más evidente en el caso de un triángulo nos dará formas para  $N_i$  como la que se muestra en la figura 2.2. En el capítulo 4 se dan expresiones detalladas de este tipo de interpolaciones lineales, pero en el punto en que nos encontramos pueden ser ya fácilmente deducidas por el lector.

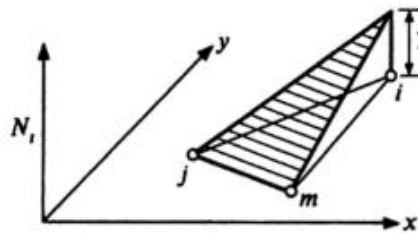


Fig. 2.2

Las funciones de prueba  $N$  se llamarán *funciones de forma* y como se verá más adelante juegan un papel decisivo en el análisis por elementos finitos.



2.2.2. *Deformaciones.* Una vez conocidos los desplazamientos para todos los puntos del elemento, pueden determinarse las «deformaciones» en cualquier punto. Estas darán siempre por resultado una relación que podrá escribirse como sigue en forma matricial

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \mathbf{L}\mathbf{u} \quad (2.2)$$

donde  $\mathbf{L}$  es un operador lineal apropiado. Mediante la ecuación (2.1), la expresión anterior puede aproximarse como

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \mathbf{B}\mathbf{a} \quad (2.3)$$

donde

$$\underline{\underline{\mathbf{B}}} = \mathbf{L}\mathbf{N}. \quad (2.4)$$

En el caso de tensión plana, las deformaciones más importantes son las que se producen en el plano y se expresan en función de los desplazamientos mediante las conocidas relaciones<sup>6</sup> que definen el operador  $\mathbf{L}$ :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$$

Determinadas ya las funciones de forma  $N_u$ ,  $N_v$  y  $N_m$ , es fácil obtener la matriz  $\mathbf{B}$ . Si adoptamos una expresión lineal para dichas funciones, las deformaciones serán constantes en todo el elemento.

2.2.3. *Tensiones.* En general, el material contenido dentro del contorno del elemento puede estar sujeto a deformaciones iniciales, tales como las debidas a cambios de temperatura, retracciones, cristalización, etc. Si representamos dichas deformaciones por  $\boldsymbol{\varepsilon}_0$ , las tensiones se deberán a la diferencia entre las deformaciones reales y las iniciales.

Conviene además suponer que al comienzo del análisis, el cuerpo puede estar sometido a un sistema conocido de tensiones residuales iniciales  $\sigma_0$  que muy bien podrían medirse, pero cuya predicción sería imposible sin un conocimiento completo de la historia del material. Estas tensiones pueden sencillamente añadirse a la ecuación general. Así pues, admitiendo un comportamiento elástico lineal del tipo más general, la relación entre tensiones y deformaciones será lineal y de la forma

$$\underline{\sigma} = \underline{D}(\underline{\varepsilon} - \underline{\varepsilon}_0) + \underline{\sigma}_0 \tag{2.5}$$

donde  $\underline{D}$  es una matriz de elasticidad que contiene las propiedades del material apropiadas.

Por otra parte, para el caso particular de tensión plana, hemos de considerar tres componentes de tensión que se corresponden con las deformaciones definidas anteriormente. Dichas tensiones, en la notación que ya nos es familiar, son

$$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$$

y la matriz  $\underline{D}$  se obtendrá sencillamente de la relación usual entre tensiones y deformaciones para un medio isótropo<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \varepsilon_x - (\varepsilon_x)_0 &= \frac{1}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma_y, \\ \varepsilon_y - (\varepsilon_y)_0 &= -\frac{\nu}{E} \sigma_x + \frac{1}{E} \sigma_y, \\ \gamma_{xy} - (\gamma_{xy})_0 &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}, \end{aligned}$$

y resolviendo el sistema

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}.$$

2.2.4. Fuerzas nodales equivalentes. Definamos

$$\underline{q}^e = \begin{Bmatrix} q_i^e \\ q_j^e \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

$$\delta \mathbf{e}^T \boldsymbol{\sigma} - \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} \quad (2.8)$$

o †

$$\delta \mathbf{a}^T (\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} - \mathbf{N}^T \mathbf{b}) \quad (2.9)$$

Igualando el trabajo externo con el trabajo interno total obtenido al integrar sobre el volumen del elemento  $V^e$ , se obtiene

$$\delta \mathbf{a}^T \mathbf{q}^e = \delta \mathbf{a}^T \left( \int_{V^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d(\text{vol}) - \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d(\text{vol}) \right). \quad (2.10)$$

Como esta relación es válida para cualquier desplazamiento virtual, podemos igualar los multiplicandos. Así pues,

$$\underline{\underline{\mathbf{q}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d(\text{vol}) - \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d(\text{vol})}}. \quad (2.11)$$

Esta expresión es válida con absoluta generalidad cualesquiera que sean las relaciones entre tensiones y deformaciones. En el caso de la ley lineal expresada por (2.5), podemos escribir

$$\underline{\underline{\mathbf{q}^e = \mathbf{K}^e \mathbf{a}^e + \mathbf{f}^e}} \quad (2.12)$$

donde

$$\underline{\underline{\mathbf{K}^e = \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d(\text{vol})}} \quad (2.13a)$$

y

$$\underline{\underline{\mathbf{f}^e = - \int_{V^e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} d(\text{vol}) - \int_{V^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 d(\text{vol}) + \int_{V^e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 d(\text{vol})}}. \quad (2.13b)$$

En la última ecuación, los tres términos representan las fuerzas debidas respectivamente a las fuerzas másicas, las deformaciones iniciales y las tensiones iniciales. Estas relaciones presentan características similares a las que se obtuvieron usando los elementos estructurales discretos que se describen en el capítulo 1.

† Adviértase, que mediante reglas del álgebra matricial, la traspuesta de un producto de matrices verifica:

$$(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^T.$$

Si las tensiones iniciales forman un sistema en equilibrio, como puede ser el caso de tensiones residuales normales, las fuerzas obtenidas del término correspondiente (2.13 b) serán idénticamente nulas tras el ensamblaje. Por consiguiente, con frecuencia se omite la evaluación de dichas fuerzas. Sin embargo, como ejemplo, cuando se fabrica una pieza a partir del material en bruto en el que se encuentran frecuentes tensiones residuales o cuando se excava en rocas donde existen tensiones tectónicas conocidas, la eliminación de material producirá la aparición de fuerzas no compensadas que son resultado del término en cuestión.

Para el caso particular del elemento triangular bajo tensión plana, estas relaciones se obtendrán sustituyendo convenientemente. Ya hemos señalado que la matriz **B**, en este caso, es independiente de las coordenadas, por lo que la integración resultará especialmente sencilla.

La interconexión y solución del conjunto completo de los elementos sigue los sencillos procedimientos de análisis de estructuras, expuestos en el capítulo 1. En general, podrá haber fuerzas externas concentradas actuando en los nodos y habrá de añadirse la matriz

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_n \end{Bmatrix} \quad (2.14)$$

al considerar el equilibrio de los nodos.

Hemos de hacer aquí una observación relativa a los elementos cercanos al contorno. Si se especifican los desplazamientos en el contorno, no se suscita problema particular alguno. Sin embargo, supongamos el contorno sometido a una carga exterior  $\bar{\mathbf{f}}$  distribuida por unidad de superficie. Entonces, tendremos que añadir un término adicional a las fuerzas nodales del elemento cuyo contorno posee una superficie  $A^e$ . Considerando el trabajo virtual, este término será simplemente

$$\underline{\underline{- \int_{A^e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{f}} \, d(\text{sup.})}} \quad (2.15)$$

con la integración extendida a la superficie del contorno del elemento. Se advertirá que  $\bar{\mathbf{f}}$  debe tener el mismo número de componentes que  $\mathbf{u}$  para que la expresión anterior sea válida.

En la figura 2.1 se muestra dicho elemento de contorno siempre para el caso particular de tensión plana. Las integrales de este tipo no se

calculan explícitamente. Con frecuencia, el analista siguiendo su «intuición física», sustituye la carga que actúa en el contorno por cargas concentradas en los nodos, calculando éstas directamente mediante consideraciones de estática. En el caso particular considerado, los resultados son idénticos.

Una vez obtenidos los desplazamientos nodales por resolución de las ecuaciones globales del tipo «estructural», se pueden calcular las tensiones en cualquier punto del elemento utilizando las relaciones (2.2) y (2.3) y obtener

$$\underline{\underline{\sigma = DBa^e - D\varepsilon_0 + \sigma_0}} \tag{2.16}$$

en donde se reconocerán inmeditamente los términos típicos que aparecen en la ecuación (1.4), pág. 6, siendo la matriz de tensiones del elemento

$$S^e = DB. \tag{2.17}$$

A esta expresión hemos de añadir las tensiones

$$\sigma_{\varepsilon_0} = -D\varepsilon_0 \quad \text{y} \quad \sigma_0 \tag{2.18}$$

Es necesario un comentario para aclarar la ausencia del término correspondiente a tensiones originadas por cargas distribuidas  $\sigma_p^e$ . Ello se debe al hecho de que no se ha considerado el equilibrio interno dentro de cada elemento, y sólo se han establecido las condiciones de equilibrio globales.

2.2.5. *Concepto generalizado de desplazamientos, deformaciones y tensiones.* El significado de desplazamientos, deformaciones y tensiones en el caso presentado de tensión plana es obvio. En muchas otras aplicaciones, que en este libro se expondrán más adelante, esta terminología puede aplicarse a otras cantidades menos evidentes. Por ejemplo, si consideramos los elementos de una placa, el «desplazamiento» puede estar caracterizado por la flecha y las componentes del giro en un punto particular de la placa. Las «deformaciones» se definirán entonces como las curvaturas de la superficie media y las «tensiones» como los correspondientes momentos flectores.

Todas las expresiones deducidas aquí tienen validez general con la condición de que la suma de los productos de los desplazamientos y las fuerzas correspondientes represente realmente el trabajo exterior efectuado y la de los productos de las «deformaciones» y las correspondientes «tensiones» sea el trabajo interno total.

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, dV \tag{2.24a}$$

$$\underline{\underline{\mathbf{f}}} = - \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{b} \, dV - \int_A \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} \, dA - \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}_0 \, dV + \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 \, dV \tag{2.24b}$$

Las integraciones se extienden a todo el volumen  $V$  y a toda la superficie  $A$  donde se especifican las fuerzas de superficie.

Es inmediatamente evidente de lo anterior, que

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{ij} = \sum \mathbf{K}_{ij}^e \quad \underline{\underline{\mathbf{f}}}_i = \sum \mathbf{f}_i^e \tag{2.25}$$

en virtud de la propiedad de las integrales definidas, que establece que la integral total es la suma de las integrales de las partes:

$$\int_V ( \ ) \, dV = \sum \int_{V^e} ( \ ) \, dV \tag{2.26}$$

El mismo razonamiento es evidentemente válido para las integrales de superficie expresadas en (2.25). Vemos que el «secreto» para que la aproximación tenga las propiedades del «sistema discreto general del capítulo 1», reside simplemente en escribir la aproximación en forma integral.

Tanto las reglas para el ensamblaje como el resto de las conclusiones alcanzadas, se han obtenido prescindiendo del concepto de «fuerzas entre elementos». En lo que queda de este capítulo se prescindirá del supraíndice de elemento, a menos que se necesite específicamente. Tampoco se hará diferencia entre las funciones de forma para el elemento y para el continuo.

No obstante, se suscita inmediatamente un punto importante. Al considerar el trabajo virtual para el continuo completo (ec.(2.22)) e igualar éste a la suma de las contribuciones de todos los elementos, se supone implícitamente que no se desarrollan discontinuidades entre elementos adyacentes. Si apareciesen tales discontinuidades, habría que añadir una contribución igual al trabajo efectuado por las tensiones en las separaciones entre elementos.

Por consiguiente, el campo de desplazamientos definido por las funciones de forma ha de ser tal que sólo puedan existir deformaciones finitas

en los contornos de separación entre elementos; esto implica que, para que las ecuaciones generales sean válidas, los desplazamientos han de ser continuos. Más adelante añadiremos algo más acerca de esta condición necesaria.

**2.4. El método de los desplazamientos como minimización de la energía potencial total**

El principio de los trabajos virtuales utilizado en las secciones anteriores asegura el cumplimiento de las condiciones de equilibrio dentro de los límites establecidos por la configuración de desplazamientos supuesta. El equilibrio sólo será completo si la igualdad de los trabajos virtuales se cumple para toda variación arbitraria de los desplazamientos (imponiendo sólo condiciones de contorno).

Si el número de parámetros de  $\mathbf{a}$ , que define los desplazamientos, se incrementa ilimitadamente, siempre podremos asegurar entonces una mayor aproximación de todas las condiciones de equilibrio.

El principio de los trabajos virtuales establecido en la ecuación (2.22), puede replantearse de manera diferente si las cantidades virtuales  $\delta\mathbf{a}$ ,  $\delta\mathbf{u}$  y  $\delta\mathbf{e}$  se consideran como variaciones (o diferenciales) de las cantidades reales.

Así por ejemplo, podemos escribir

$$\delta\left(\mathbf{a}^T\mathbf{r} + \int_V \mathbf{u}^T\mathbf{b} \, dV + \int_A \mathbf{u}^T\bar{\mathbf{t}} \, dA\right) = -\delta W \tag{2.27}$$

para los tres primeros términos de la ecuación (2.22), donde  $W$  representa la energía potencial de las cargas externas. La expresión anterior es cierta si  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{b}$  y  $\bar{\mathbf{t}}$  son conservativas (o independientes de los desplazamientos).

Para ciertos materiales, el último término de la ecuación (2.22) puede escribirse

$$\delta U = \int_V \delta\mathbf{e}^T\boldsymbol{\sigma} \, dV \tag{2.28}$$

donde  $U$  es la «energía de deformación» del sistema. Para el material elástico lineal descrito por la ecuación (2.5), el lector puede verificar que

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \, dV - \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 \, dV + \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}_0 \, dV \tag{2.29}$$

que se produzcan deformaciones en algún elemento cuando éste se someta a los desplazamientos propios de un cuerpo rígido. Así pues, el primer criterio que una función de desplazamientos debe satisfacer es el siguiente:

*Criterio 1.º* Toda función de desplazamientos debe elegirse de tal forma que no permita deformaciones de un elemento cuando los desplazamientos nodales se deban a un desplazamiento del conjunto como cuerpo rígido.

Esta condición, evidente por sí misma, puede violarse fácilmente si se emplean ciertos tipos de funciones; por consiguiente ha de ponerse cuidado al elegir las funciones de desplazamientos.

Un segundo criterio se deriva de los mismos razonamientos anteriores. Es evidente que a medida que los elementos se hagan más pequeños tanto más prevalecerán en ellos condiciones de deformación constante. Si de hecho existen dichas condiciones, será pues conveniente escoger el tamaño de los elementos que las reproduzcan exactamente, para conseguir un buen grado de aproximación. Se pueden encontrar funciones que satisfagan el primer criterio, pero que requieran al mismo tiempo que las deformaciones varíen dentro del elemento, aun cuando los desplazamientos nodales sean compatibles con un estado de deformación constante. Dichas funciones no convergen bien en general, hacia la solución exacta y no pueden, ni en el límite, representar la distribución verdadera de deformaciones. Así pues, el segundo criterio se puede formular como sigue:

*Criterio 2.º* Toda función de desplazamientos tiene que ser tal que si los desplazamientos nodales son compatibles con un estado de deformación constante, se obtenga realmente dicho estado de deformación constante. (El término «deformación» se emplea además en su sentido general.)

Se habrá observado que el Criterio 2 incorpora de hecho las condiciones exigidas por el Criterio 1 ya que los desplazamientos de un cuerpo rígido son casos particulares de deformación constante nula. Este criterio fue establecido originalmente por Bazeley y otros<sup>10</sup> en 1965. Estrictamente, ambos criterios sólo necesitan ser satisfechos en el límite cuando el tamaño del elemento tiende a cero. Sin embargo, al imponer estos criterios a elementos de tamaño finito se alcanza mayor grado de precisión.

Finalmente, como ya hemos mencionado en la sección 2.3, en todos estos razonamientos se ha supuesto que la contribución del trabajo realizado en los contornos de separación entre elementos al trabajo virtual total es nulo. Por consiguiente, para asegurarnos que se cumple esta condición es necesario incluir el criterio siguiente:



**Criterio 3.º** Las funciones de desplazamientos deben elegirse de manera que las deformaciones que se producen en los límites de separación entre elementos sean finitas (aunque puedan ser indeterminadas).

Este criterio implica la continuidad de los desplazamientos entre elementos. Si las deformaciones se definen mediante las derivadas primeras, como en el ejemplo de elasticidad plana citado aquí, sólo deberán ser continuos los desplazamientos. No obstante, si como ocurre en los problemas de placas y láminas, las «deformaciones» se definen mediante las derivadas segundas de las flechas, deberán ser también continuas las derivadas primeras de éstas.<sup>2</sup>

Matemáticamente, los criterios anteriores forman parte del enunciado de «funcional completo»; la discusión matemática debe buscarse en otros lugares.<sup>11-16</sup> La demostración «heurística» de las condiciones de convergencia ofrecida aquí es suficiente a efectos prácticos, con excepción de los casos más patológicos. En el capítulo 3, se generalizarán todos estos criterios.

## 2.6. Error de discretización e índice de convergencia

### 2.6. Error de discretización e índice de convergencia

En la sección anterior hemos admitido que la aproximación a los desplazamientos representada por la ecuación (2.1) nos proporcionará la solución exacta en el límite, si el tamaño  $h$  de los elementos se va haciendo cada vez más pequeño. Los argumentos para ello son sencillos: puesto que el desarrollo es capaz de reproducir en el límite cualquier distribución de desplazamientos concebible dentro del continuo, y además como la solución de cada aproximación es única, aquél debe proporcionar en el límite, cuando  $h \rightarrow 0$ , la solución exacta. Y lo cierto es que en algunos casos, dicha solución exacta puede alcanzarse con un número finito de subdivisiones (o incluso con un sólo elemento) si el desarrollo polinómico utilizado para ese elemento puede ajustarse exactamente a la solución correcta. Así, por ejemplo, si la solución exacta es un polinomio de segundo grado y las funciones de forma incluyen todos los polinomios de ese grado, la aproximación nos proporcionará la solución exacta.

Este último argumento puede ayudarnos a determinar el grado de convergencia del método de los elementos finitos, puesto que la solución exacta puede siempre desarrollarse en serie polinómica en las proximidades de cualquier punto (o nodo)  $i$ ,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_i + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}\right)_i x + \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y}\right)_i y + \dots \quad (2.32)$$

problemas de condicionamiento de la matriz y cuando se emplee el método de los elementos finitos se deberá ser consciente en todo momento de las limitaciones de precisión que impiden alcanzar la solución exacta. Afortunadamente, con los computadores modernos, que admiten un gran número de cifras significativas, estos errores con frecuencia son pequeños.

### 2.7. Funciones de desplazamientos discontinuas entre elementos. Elementos no conformes y el criterio de la parcela

En algunos casos es bastante difícil encontrar funciones de desplazamientos para un elemento que sean automáticamente continuas en todos los puntos del contorno de separación entre elementos adyacentes.

Como ya se ha señalado, la discontinuidad de los desplazamientos originará deformaciones infinitas en los contornos de separación, factor ignorado en la formulación presentada, ya que sólo hemos considerado las contribuciones de energía debidas a los elementos en sí.

Sin embargo, si, en el límite, al disminuir el tamaño de las subdivisiones se restaura la continuidad, la formulación ya desarrollada seguirá tendiendo hacia la solución correcta. Esta situación se alcanza siempre si

- a) un estado de deformación constante asegura automáticamente la continuidad de los desplazamientos;
- b) se satisface el criterio de deformación constante de la sección precedente.

Para comprobar que dicha continuidad se consigue para cualquier configuración de malla, cuando se emplean elementos no conformes es necesario imponer a un número arbitrario de elementos, desplazamientos nodales que correspondan con un estado de deformación constante determinado. Si alcanzamos simultáneamente el equilibrio en todos los nodos sin necesidad de introducir ninguna fuerza nodal exterior, y se obtiene un estado de tensiones constante, es evidente que no se habrá perdido trabajo exterior a través de las discontinuidades entre elementos.

Los elementos que cumplan este criterio de la parcela, convergerán a la solución exacta, e incluso a veces presentarán un comportamiento superior a los elementos conformes.

El criterio de la parcela fue introducido originalmente por Irons,<sup>10</sup> y desde entonces ha demostrado ser una condición suficiente de convergencia.<sup>16,18,19</sup>

Volveremos al tema de los elementos no conformes en el capítulo 11. Estas funciones de desplazamientos «discontinuas» serán utilizadas con

En este ejemplo, las deformaciones se expresan como derivadas segundas de los desplazamientos y es necesario asegurar que tanto  $w$  como la derivada primera

$$w_x \equiv \frac{dw}{dx} = \theta$$

son continuas entre elementos. Esto se cumple fácilmente si como parámetros nodales se toman los valores de  $w$  y del giro  $w_x$ . Así

$$a_i = \left\{ \begin{matrix} w \\ w_x \end{matrix} \right\}_i = \left\{ \begin{matrix} w_i \\ \theta_i \end{matrix} \right\}.$$

Se deducirán a continuación las funciones de forma. Si para definir la deformada tomamos dos nodos por elemento (o sea, cuatro variables), podemos suponer que ésta viene dada por un polinomio de tercer grado

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3.$$

Éste nos definirá las funciones de forma correspondientes a  $w_i$  y  $w_x$  tomando para cada una, un polinomio de tercer grado que valga uno en los puntos apropiados ( $x = 0; L$ ) y cero en cualquier otro punto, tal como se muestra en la figura 2.3.

Las expresiones de las funciones de forma para el elemento representado pueden escribirse

$$\begin{aligned} N_i &= [1 - 3(x/L)^2 + 2(x/L)^3, \quad L(x/L - 2(x/L)^2 + (x/L)^3)] \\ N_j &= [3(x/L)^2 - 2(x/L)^3, \quad L(-(x/L)^2 + (x/L)^3)] \end{aligned}$$

Inmediatamente podemos escribir

$$\begin{aligned} B_i &= -\frac{d^2}{dx^2} N_i = [6 - 12(x/L), (4 - 6(x/L))L]/L^2 \\ B_j &= -\frac{d^2}{dx^2} N_j = [-6 + 12(x/L), (2 - 6(x/L))L]/L^2 \end{aligned}$$

y las matrices de rigidez para el elemento pueden escribirse

$$K_{ij}^e = \int_0^L B_i EI B_j dx$$

Dejaremos para el lector el cálculo detallado de ésta y de las «fuerzas» correspondientes a una carga uniformemente distribuida  $p$  (supuesta constante), nula salvo en  $ij$ . Se observará que las ecuaciones finales para un nodo  $i$ , una vez ensambladas, relacionan entre sí tres desplazamientos nodales  $i, j, k$ . Explícitamente estas ecuaciones son para elementos de la misma longitud  $L$ .

$$EI \begin{bmatrix} -12/L^3, & -6/L^2 \\ 6/L^2, & 2/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_k \\ \theta_k \end{Bmatrix} + EI \begin{bmatrix} 24/L^3, & 0 \\ 0, & 8/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \end{Bmatrix} + EI \begin{bmatrix} -12/L^3, & +6/L^2 \\ -6/L^2, & 2/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} pL/2 \\ -pL^2/12 \end{Bmatrix} = 0$$

Es interesante comparar éstas con la forma *exacta* representada por las llamadas ecuaciones de «giros y traslaciones de los nudos» que pueden encontrarse en los textos generales.

En este caso, se hallará que la aproximación por elementos finitos consigue la solución exacta porque ésta se halla representada por un polinomio de tercer grado para una carga uniforme. Para cualquier otra carga distribuida es fácil ver que la diferencia entre la solución exacta y la aproximada decrece a medida que la longitud de los elementos tiende a cero.

### 2.11. Observaciones finales

El estudio de sólidos elásticos por el método de «los desplazamientos» sigue siendo, sin duda, el procedimiento más extendido y fácilmente comprensible. En muchos de los capítulos que siguen emplearemos las fórmulas generales desarrolladas en éste, en relación a problemas de elasticidad lineal (capítulos 4, 5, 6, 10, 13 y 14) o análisis no lineal (capítulos 18 y 19) residiendo las principales diferencias en las definiciones de las tensiones, deformaciones generalizadas y demás cantidades asociadas a ellas. Es por ello conveniente resumir las fórmulas esenciales, lo que se hace en el apéndice 2.

En el capítulo siguiente mostraremos que los procedimientos desarrollados en éste no son sino un caso especial de discretización por elementos finitos, aplicado a las ecuaciones de equilibrio que gobiernan un sistema, expresadas en función de los desplazamientos. Obviamente, es posible enfocar el problema desde diferentes puntos de partida, algunos de los cuales se comentarán en el capítulo 12.

## Anexo 7

**Del Ecuador,** Venta de vehículos SUV subió un 58% este año A. D. E. A. AEADE. *Anuario 2017* (2017).

**EL UNIVERSO**

NOTICIAS OPINIÓN GUAYAQUIL MARCADOR VIDA Y ESTILO LA REVISTA VIDEOS MÁS

Noticias Política Economía Internacional Ecuador Intercultural Seguridad Ecología Más

### Venta de vehículos SUV subió un 58% este año

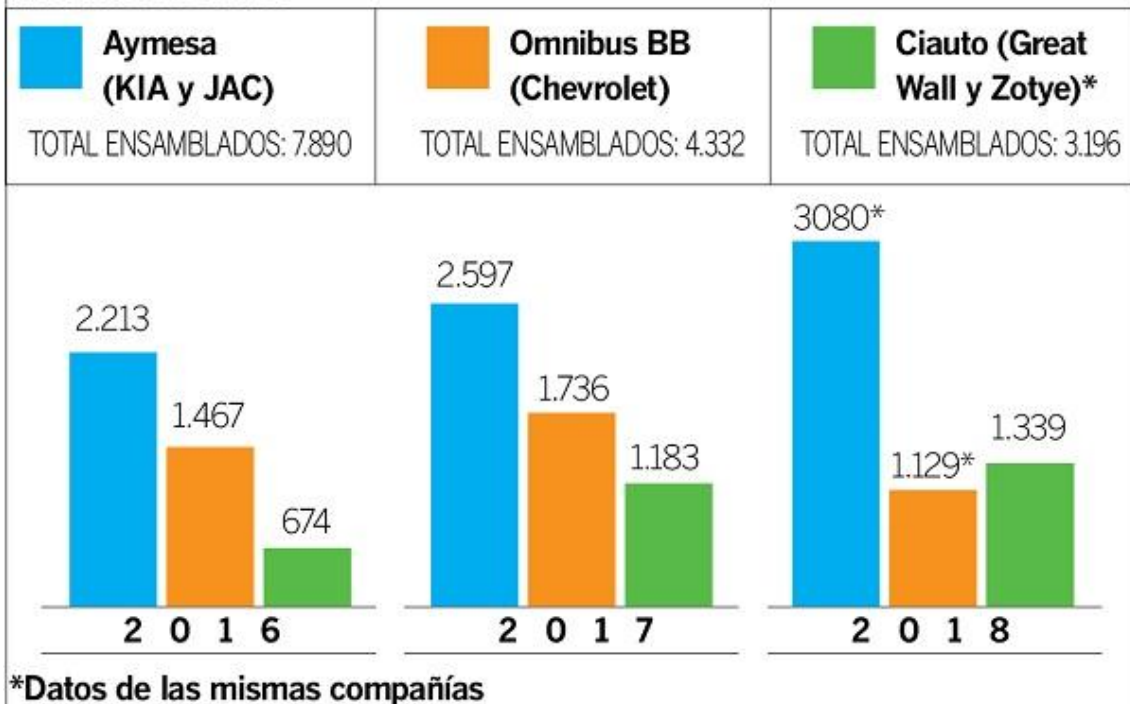


La compra de autos **SUV** (vehículo utilitario deportivo por sus siglas en inglés) está en auge en **Ecuador**. En el 2017 se vendieron 33.736 de ese tipo, casi el doble de los comercializados en 2016. La del año pasado es la cifra récord de ventas de ese segmento desde el 2000, según la Asociación de Empresas Automotrices del Ecuador. La tendencia se mantiene. De enero a julio de este año subieron un 58% con respecto al mismo periodo del 2017.

# Número de vehículos SUV ensamblados en Ecuador

DE ENERO HASTA JULIO DE 2016, 2017 Y 2018

## ENSAMBLADORAS



Fuente: Aeade

EL UNIVERSO

La firma coreana KIA lidera el mercado de ensamblaje y venta de estos vehículos en el país. Solo desde enero del 2016 y julio pasado ha armado 13.143 autos de este tipo y vendido 12.012 unidades.

La empresa asegura que los ensamblados localmente, al igual que los importados cumplen con la normativa internacional. “La carrocería... está hecha con acero de alta resistencia, lo que da como resultado una mejor eficiencia de combustible y mayor seguridad contra impactos”. Y que contrario a lo que se piensa, un vehículo SUV puede usar el tipo de combustible extra/ecopaís. “Los motores están contruidos y su tecnología diseñada para operar en óptimas condiciones” con ese tipo de gasolina, señala la firma.

A los SUV de KIA les siguen los de Chevrolet (EE.UU.), Hyundai (Corea del Sur), Great Wall (China) y Nissan (Japón).

Las ensambladoras Aymesa, que arma los de las marcas KIA y JAC, Omnibus BB (Chevrolet) y Ciauto (Zotye y Great Wall) son las que producen vehículos tipo SUV en el país.

Para Chevrolet, el auge se da porque un SUV responde a las condiciones geográficas del país “mejor que (los) vehículos sedanes, sin perder características de comodidad, espacio y precios competitivos”.

Esta marca tiene “un departamento de ingeniería enfocado en cumplir con los requerimientos técnicos y comerciales”, señala la firma.

Pietro Pilo, representante de Ciauto en Ecuador, cuya planta está en la provincia de Tungurahua, asevera que el auge de los SUV es a nivel mundial y responde a que estos son útiles en las ciudades y en el campo. “Tienen un punto de manejo alto, lo que da un sentido de seguridad... La venta de vehículos SUV sube más que la tendencia de crecimiento general del mercado de autos en el país”.

Tras la eliminación de cupos de importación el precio promedio de los vehículos SUV bajó de \$ 45.543 en el 2016 a \$43.167 en el 2017. Esto, según la Aeade, alentó el mercado y aumentó el número de modelos disponibles que por oferta y demanda bajó los precios.

El gremio informa que a partir del 2017 hay 67 nuevos modelos, la mayoría SUV.

La venta de este tipo de carros representó el 35,7% del mercado nacional después de los automóviles durante el primer semestre de este año casi diez puntos más que en 2000. Desde ese año este segmento escaló un puesto entre los livianos más vendidos, superando a las camionetas. (I)



### Autos ‘estrella’ se venden 59% más en primer semestre en Ecuador



Las ventas de vehículos en Ecuador tuvieron un importante crecimiento, dentro del cual, el producto estrella ha sido el auto SUV (deportivo utilitario por sus siglas en inglés). Es que la

venta de vehículos en el primer semestre de 2018 se incrementó en 27% con respecto al mismo periodo del año pasado. Es decir pasaron de 43.605 unidades en 2017 a 68.280 este año. Los SUV tuvieron una mayor demanda, al pasar de 13.375 a 21.990, es decir tuvieron un crecimiento de 59%.

Entre los SUV más vendidos está el Kia Sportage R, que es un modelo ensamblado en Ecuador. Además, entre los vehículos livianos más vendidos también está el nuevo Chevrolet Sail. Las cifras fueron reveladas por Genaro Baldeón, presidente ejecutivo de la Asociación de Empresas Automotrices del Ecuador (Aeade), quien además explicó que dentro de las ventas de acuerdo a la procedencia del vehículo, Ecuador sigue a la cabeza con un 30%. Sin embargo, la cifra revela una caída en la presencia del mercado, pues años atrás la industria ecuatoriana ocupaba al menos un 50% en el mercado.

Entre tanto, Baldeón se mostró partidario de que el régimen focalice el subsidio a los combustibles, pues tanto la calidad de estos, como dicho subsidio, indica, impiden el acceso a mejores tecnologías para los vehículos, lo que justamente haría más eficiente el consumo de estos.

Está en contra del veto presidencial sobre la Ley de Fomento Productivo en el tema de los vehículos híbridos. En primera instancia este tipo de automotores habían sido exonerados del IVA, pero en el veto se retira esa exoneración. Para Baldeón es un error, pues los híbridos, además de contribuir a la baja del subsidio, también son una tecnología de transición necesaria para que los consumidores se vayan relacionando con autos eléctricos.

También criticó que se haya utilizado como argumento del veto, que la eficiencia energética de los híbridos es apenas del 5% en comparación con los de combustión. La cifra real sería 80%, dijo. (I)



## Anexo 8

**L. Navarro Torrado** Consideraciones cinemáticas y dinámicas para el desarrollo de control a un sistema de suspensión. *Revista colombiana de tecnologías de avanzada (rcta)*. vol11, no31 Julio 2018

ISSN: 1692-7257 - Volumen 1 – Número 31 - 2018

Revista Colombiana de  
Tecnologías de Avanzada

DOI: <https://doi.org/10.24054/16927257.v31.n31.2018.2761>

Recibido: 21 de mayo de 2017  
Aceptado: 22 de octubre de 2017

### CONSIDERACIONES CINEMATICAS Y DINAMICAS PARA EL DESARROLLO DE CONTROL A UN SISTEMA DE SUSPENSION

#### CINEMATIC AND DYNAMIC CONSIDERATIONS FOR THE DEVELOPMENT OF CONTROL A UN SUSPENSION SYSTEM

Ing. Leonardo Navarro Torrado<sup>\*</sup>, Ing. Juan Guillermo Garcia Rincon<sup>\*\*</sup>  
Ing. Hulber Rodrigo Rodriguez Pinzon<sup>\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup> SERVICIO NACIONAL DE APRENDIZAJE SENA Tecnoparque nodo Ocaña.  
Transversal 30, # 7-110 La primavera, Ocaña norte de Santander, Colombia  
(+57) (7) 5611035  
E-mail: leo\_navarro\_11@hotmail.com

<sup>\*\*</sup> SERVICIO NACIONAL DE APRENDIZAJE SENA Tecnoparque nodo Ocaña.  
Transversal 30, # 7-110 La primavera, Ocaña norte de Santander, Colombia  
(+57) (7) 5611035  
E-mail: jggarcia87@misena.edu.co

<sup>\*\*\*</sup> SERVICIO NACIONAL DE APRENDIZAJE SENA Tecnoparque nodo Ocaña.  
Transversal 30, # 7-110 La primavera, Ocaña norte de Santander, Colombia  
(+57) (7) 5611035  
E-mail: hrrodriguepi@misena.edu.co

**Resumen:** Este artículo está enfocado en el diseño de un controlador para un sistema de suspensión pasiva, partiendo de las correctas posiciones que debe adoptar un vehículo automotor y generando el modelo matemático que rija el sistema, el controlador diseñado permitirá mejorar las condiciones de confort, seguridad y maniobrabilidad del vehículo, como lo hace actualmente los sistemas de suspensión activa. Se evidenciará los resultados por medio de simulaciones.

**Palabras clave:** Suspensión pasiva, Suspensión activa, vehículo, automotor, controlador.

**Abstract:** This research is focuses on the design of a controller for a passive suspension system, based on the correct positions that an automotive vehicle should adopt and generating the mathematical model that governs the system. The designed driver will improve the conditions of comfort, safety and maneuverability of the vehicle. As active suspension systems currently do. The results will be evidenced by means of simulations.

**Keywords:** Passive suspension, active suspension, vehicle, motor, controller.

**CONSIDERACIONES CINEMATICAS Y DINAMICAS PARA EL DESARROLLO DE CONTROL A UN SISTEMA DE SUSPENSION**  
**CINEMATIC AND DYNAMIC CONSIDERATIONS FOR THE DEVELOPMENT OF CONTROL A UN SUSPENSION SYSTEM**

**Ing. Leonardo Navarro Torrado\* , Ing. Juan Guillermo García Rincón\*\* Ing. Hulber Rodrigo Rodriguez Pinzón \*\*\***

**\* SERVICIO NACIONAL DE APRENDIZAJE SENA Tecnoparque nodo Ocaña. Transversal 30, # 7-110 La primavera, Ocaña norte de Santander, Colombia (+57) (7) 5611035 E-mail: [leo\\_navarro\\_11@hotmail.com](mailto:leo_navarro_11@hotmail.com)**

**\*\* SERVICIO NACIONAL DE APRENDIZAJE SENA Tecnoparque nodo Ocaña. Transversal 30, # 7-110 La primavera, Ocaña norte de Santander, Colombia (+57) (7) 5611035 E-mail: [jggarciar87@misena.edu.co](mailto:jggarciar87@misena.edu.co)**

**\*\*\* SERVICIO NACIONAL DE APRENDIZAJE SENA Tecnoparque nodo Ocaña. Transversal 30, # 7-110 La primavera, Ocaña norte de Santander, Colombia (+57) (7) 5611035 E-mail: [hrrodriguepi@misena.edu.co](mailto:hrrodriguepi@misena.edu.co)**

**Resumen:** Este artículo está enfocado en el diseño de un controlador para un sistema de suspensión pasiva, partiendo de las correctas posiciones que debe adoptar un vehículo automotor y generando el modelo matemático que rija el sistema, el controlador diseñado permitirá mejorar las condiciones de confort, seguridad y maniobrabilidad del vehículo, como lo hace actualmente los sistemas de suspensión activa. Se evidenciará los resultados por medio de simulaciones.

**Palabras clave:** Suspensión pasiva, Suspensión activa, vehículo, automotor, controlador.

**Abstract:** This research is focuses on the design of a controller for a passive suspension system, based on the correct positions that an automotive vehicle should adopt and generating the mathematical model that governs the system. The designed driver will improve the conditions of comfort, safety and maneuverability of the vehicle. As active suspension systems currently do. The results will be evidenced by means of simulations.

**Keywords:** Passive suspension, active suspension, vehicle, motor, controller.

## **1. INTRODUCCIÓN**

Los sistemas de suspensión de los vehículos automotores permiten controlar de forma directa la seguridad y el confort. La suspensión tiene como función mantener en todo momento la llanta pegada al terreno, aislar las perturbaciones del camino, soportar el peso estático del vehículo y brindarle al conductor unas condiciones de maniobrabilidad buenas al momento de acelerar,

frenar y girar. Los sistemas de suspensión pueden ser dependientes o independientes, las de tipo independiente se clasifican en tres, suspensión pasiva, suspensión semi activa y suspensión activa.

La suspensión pasiva no es regulable, los parámetros que rigen la dinámica de cada elemento de la amortiguación son constantes. La suspensión semi-activa emplea sistemas regulados que permiten variar elementos de la amortiguación. La suspensión activa se compone de una serie de sensores y actuadores que necesitan de un canal externo de energía, para actuar de manera más rápida y constante sobre cada rueda (Parra Ortega C, Herrera Vergara J.2013). Los vehículos automotores mantienen una posición inicial cuando están en reposo ósea cuando no están en movimiento ni sometidos a fuerzas externas, esta posición está definida por el conjunto de elementos que componen la suspensión, en el caso de la McPherson está constituida por el brazo de control, el puntal McPherson y el conjunto de rueda, todo esto anclado al chasis del automóvil, estos elementos mantienen un comportamiento estático que definen la posición inicial o en reposo del vehículo.

## 2. sistema de suspensión independiente McPherson

Es uno de los diseños de suspensión más sencillos y más utilizados en los automóviles tipo livianos, por su sencillez de fabricación y mantenimiento, el costo de producción y el poco espacio que ocupa, puede ser usado tanto en el tren delantero como en el tren trasero. Su mecanismo forma un triángulo articulado formado por el brazo inferior, bastidor (chasis) y el muelle-amortiguador.

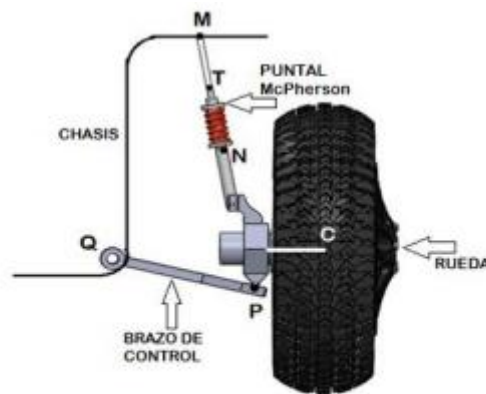


Figura 1. Componentes de la suspensión McPherson.

### 2.1 Comportamiento cinemático

La cinemática estudia los movimientos de los cuerpos independientemente de las causas que lo producen y solo estudia la trayectoria en función del tiempo, todo esto referenciado por un sistema de coordenadas (Torres Clayton J et al., 2013). En el caso de la suspensión McPherson está representado por un mecanismo de cuatro barras, este mecanismo representa el modelo planar de la suspensión, para el caso de nuestro estudio las coordenadas del mecanismo nos

definen los grados de libertad del sistema los cuales determinan el estado del mismo. Se plantea un modelo bidimensional que representa la geometría no lineal de la suspensión McPherson, ya que un modelo tridimensional es un análisis muy complejo. El modelo planar también tiene en consideración el amortiguamiento del neumático y la deflexión lateral del mismo, que nos permite tener un análisis más simple, que ofrece la información necesaria para obtener el modelo matemático que rige el sistema y para el diseño del controlador.

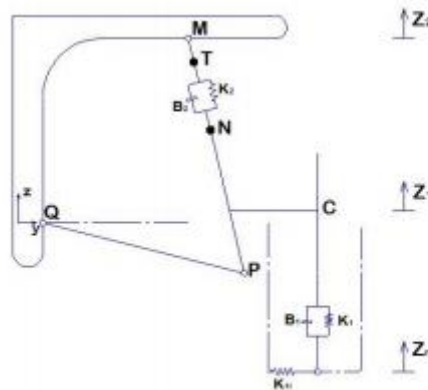


Figura 2. Modelo cinemático del sistema de suspensión McPherson

Un sistema dinámico es un modo de describir el recorrido a lo largo del tiempo de todos los puntos de un espacio dado. El espacio puede imaginarse, por ejemplo, como el espacio de estados de cierto sistema físico (Sandoval G. et al 2011). El análisis del comportamiento dinámico del sistema se hace teniendo en cuenta la energía cinética  $T$ , la energía potencial elástica  $V$  y el amortiguamiento viscoso que es una fuerza no conservativa y se puede considerar utilizando la función de disipación de Rayleigh  $D$ .

$$T = \frac{1}{2} M_2 \dot{Z}_2^2 + \frac{1}{2} M_1 (\dot{Y}_C^2 + \dot{Z}_1^2) + \frac{1}{2} I_C \dot{\phi}^2$$

$$V = \frac{1}{2} K_2 (\delta l)^2 + \frac{1}{2} K_1 (\delta Z_1)^2 + \frac{1}{2} K_{11} (\delta Y_{11})^2$$

$$D = \frac{1}{2} B_2 (\delta \dot{l})^2 + \frac{1}{2} B_1 (\delta \dot{Z}_1)^2$$

### 3. Modelamiento matemático

Al analizar el comportamiento del vehículo se puede ver como un sistema dinámico que depende en gran medida del funcionamiento de la suspensión, se considera que el chasis (masa suspendida) y el conjunto conformado por la llanta (masa no suspendida) tiene un movimiento de cuerpo rígido, este modelo de suspensión se representa como un sistema dual de masa-resorte y amortiguador.

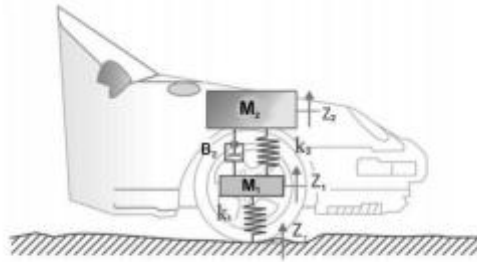


Figura 3. Esquema de un sistema de suspensión pasiva

En la figura 3 se aprecia la dinámica de un sistema de suspensión independiente representada a un cuarto de un vehículo es decir a una sola rueda,  $M_2$  es el chasis o masa suspendida la cual está conectada con  $M_1$  o masa no suspendida por medio del resorte  $K_2$  y el amortiguado  $B_2$ . Todo el sistema entra en contacto con la superficie de rodadura (camino) por medio de un resorte  $K_1$  ya que este actúa de la misma forma que un neumático y facilita el análisis.

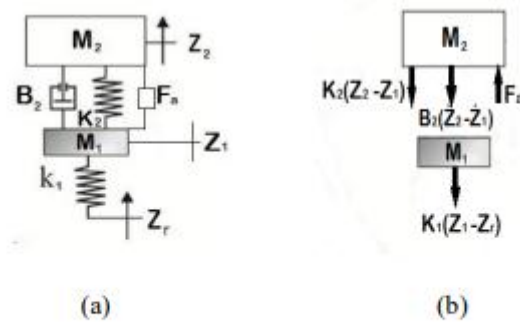


Figura 4. Modelo lineal de la suspensión, (a) esquema suspensión (b) diagrama de fuerzas

La figura 4. (a) muestra el modelo lineal de la suspensión McPherson para un sistema dual masaresorte-amortiguador,  $M_2$  y  $M_1$  son la masa suspendida y no suspendida respectivamente y entre ellas  $F_a$  el actuador. En la figura 6. (b) se ve el diagrama de fuerzas del modelo planteado, aplicadas desde las leyes de Newton, lo cual no genera un sistema de ecuaciones de segundo orden. Modelado de la suspensión lineal en espacio de estados.

$$\ddot{Z}_2 = -\frac{B_2}{M_2}(\dot{Z}_2 - \dot{Z}_1) - \frac{K_2}{M_2}(Z_2 - Z_1) + \frac{1}{M_2}F_a$$

$$\ddot{Z}_1 = -\frac{K_1}{M_1}(Z_1 - Z_r) + \frac{B_2}{M_1}(\dot{Z}_2 - \dot{Z}_1) - \frac{K_2}{M_1}(Z_2 - Z_1) - \frac{1}{M_1}F_a$$

Haciendo el modelado en espacio de estados obtenemos la ecuación.

$$y = c_x [1 \ 0 \ 0 \ 0]x$$

4. Diseño del sistema de control que permita estabilizar el sistema dinámico de manera autónoma El controlador PID propuesto para el sistema, de la ecuación matricial es



la simulación es ideal para entender la dinámica vehicular y el diseño de los controladores. Por medio de las simulaciones podemos obtener valiosa información de la respuesta del sistema a las perturbaciones del terreno. De igual forma trabajando con diferentes tipos de controladores podemos concluir cuál de ellos es más adecuado al sistema planteado, en el campo del control el modelo matemático juega un papel muy importante ya que define la estrategia de control a trabajar. El desarrollo de sistemas de control para suspensiones vehiculares es un campo muy extenso y de mucha aplicación actualmente (Gelvez L F 2012). Crear modelos matemáticos más precisos y que tengan muchas más variables a consideración son líneas de investigación que están abiertas para el trabajo de suspensiones activas.

## **REFERENCIAS**

Fallah, M., Bhat, R., Xie, W. (2008). New Nonlinear Model of MacPherson Suspension Systems for Ride Control Applications.

Ogata, K. (2004) Ingeniería de Control Moderna, Prentice Hall, Cuarta edición, Madrid.

Hurel E, J. (2012) Nonlinear Two Dimensional Modeling of a MacPherson Suspension for Kinematics and Dynamics Simulation. IEEE

Parra Ortega C, Herrera Vergara J. (2013). Aplicación de los sistemas de detección de intrusos y la tecnología de agentes en el monitoreo inteligente de redes de datos. Revista Colombiana de Tecnologías de Avanzada ISSN: 1692-7257 - Volumen 2 – Número 22.

Torres Clayton J et al., (2013). Estudio cinemático de una plataforma robótica para agricultura. Revista colombiana de Tecnologías de Avanzada ISSN: 1692-7257 - Volumen 2 – Número 22.

Giovanny Sandoval, Jacobo Tobar Molano, Víctor Hugo Mosquera, Luis Jorge González (2011). Pluviógrafo electrónico con transmisión de datos inalámbrica. Revista Colombiana de Tecnologías de Avanzada ISSN: 1692-7257 - Volumen 1 – Número 17.

Cristhian M Durán Acevedo, Ali Xavier Iturriago (2012). Automatización de un sistema de suministro de agua potable a través de la tecnología ZigBee. Revista Colombiana de Tecnologías de Avanzada ISSN: 1692-7257 - Volumen 2 – Número 20.

Luis Fernando Gévez R (2012). Aplicación de redes neuronales morfológicas al reconocimiento de vocablos simples. Revista Colombiana de Tecnologías de Avanzada ISSN: 1692-7257 - Volumen 1 – Número 19.

**Anexo 9**

**J. Orejuela de Cáceres**, *Diseño y construcción del sistema de suspensión de un vehículo monoplaza para la competición Fórmula Student*, Tesis de grado, Universidad Politécnica Salesiana Sede Cuenca 2016

**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA SALESIANA  
SEDE CUENCA**

**CARRERA DE INGENIERÍA MECÁNICA AUTOMOTRIZ**

**“DISEÑO Y CONSTRUCCIÓN DEL SISTEMA DE SUSPENSIÓN DE  
UN VEHÍCULO MONOPLAZA PARA LA COMPETENCIA  
FORMULA STUDENT”**

**TESIS DE GRADO PREVIA A  
LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO  
DE: INGENIERO MECÁNICO  
AUTOMOTRIZ**

**AUTORES:**

**CHRISTIAN ANDRES CARAGUAY CORREA**

**SANTIAGO JAVIER CARAGUAY CORREA**

**DIRECTOR:**

**ING. JÓNATAN POZO PALACIOS**

**CUENCA, FEBRERO 2015**



## **2.5 Análisis de cargas en el sistema de suspensión**

Debido a las fuerzas presentes en el sistema de suspensión, este puede llegar a fallar, debido a esto se debe analizar cuidadosamente las fuerzas que se generan dentro de la pista como son: transferencia de masas, antivuelco, fuerzas lateral y obstáculo. Determinar estas fuerzas servirá para el análisis por medio de elementos finitos para el diseño de los elementos.

### **2.5.1 Ubicación del centro de gravedad**

Para determinar la ubicación del centro de gravedad, se trabajó conjuntamente con el equipo de chasis [22] y se determina que la ubicación del centro de gravedad es la siguiente:

Altura del centro de gravedad:

$$h = 317.4 \text{ mm}$$

Ubicación longitudinal del centro de gravedad:

$$dx = 38.65 \text{ mm}$$

Con base en datos obtenidos de la ubicación del centro de gravedad, se calcula la repartición de masas en los ejes del vehículo. Para ello se utiliza solo la coordenada en el eje x, considerando el diagrama de cuerpo libre del vehículo como se muestra en la figura:

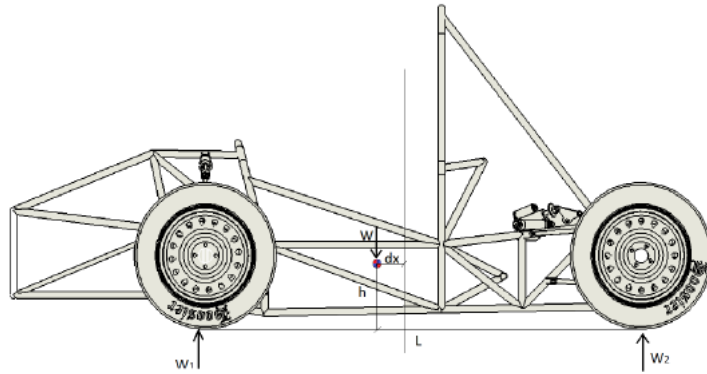


Figura 2.25 Distribución de masas del vehículo

$$\sum MA = 0 \quad \curvearrow +$$

$$W_2 * b - W \left( \frac{l}{2} - dx \right) = 0$$

$$\sum MB = 0 \quad \curvearrow +$$

$$-W_1 * b + W \left( \frac{l}{2} + dx \right) = 0$$

Despejando  $W_1$  y  $W_2$  obtenemos:

$$W_1 = \frac{W}{2} + \frac{W * dx}{l}$$

$$W_2 = \frac{W}{2} - \frac{W * dx}{l}$$

En donde:

$W_1$ : Distribución de masas en el eje delantero

$W_2$ : Distribución de masas en el eje posterior

$W$ : Peso del vehículo = 100%

$l$ : Distancia entre ejes = 1600 mm

$dx$ : Ubicación longitudinal del CG desde el eje neutro = 38.65mm

Reemplazando en las ecuaciones:

$$W_1 = \frac{100\%}{2} + \frac{100\% * 38.65mm}{1600mm} = 52.4\%$$

$$W_2 = \frac{100\%}{2} - \frac{100\% * 38.65mm}{1600mm} = 47.6\%$$

La distribución de masas en el eje delantero es de 52,4% y en el eje posterior es de 47,6%, es importante recalcar que esta distribución es el porcentaje de masa en cada eje partiendo desde las masas principales del vehículo.

Para un valor establecido de peso del vehículo de 370 kg obtenemos que 193.88 kg se ubican en el eje delantero y 176.12 kg en el eje posterior.

### **2.5.2 Cálculo antivuelco**

Una vez ubicada la altura del centro de gravedad, se procede a realizar los cálculos para verificar que el vehículo pueda cumplir con la prueba de inclinación establecida por el Reglamento FSAE.

Para la prueba de inclinación se coloca el vehículo sobre una plataforma y se lo inclina a 60 grados con respecto al piso, con lo cual se simula una aceleración lateral de 1,75g.

La prueba de inclinación permite garantizar la estabilidad del vehículo en curva, además permite realizar una nueva distribución de masas en caso del fallo de la misma, para ello se realiza un diagrama de cuerpo libre seguido de un cálculo estático como se observa en la figura:

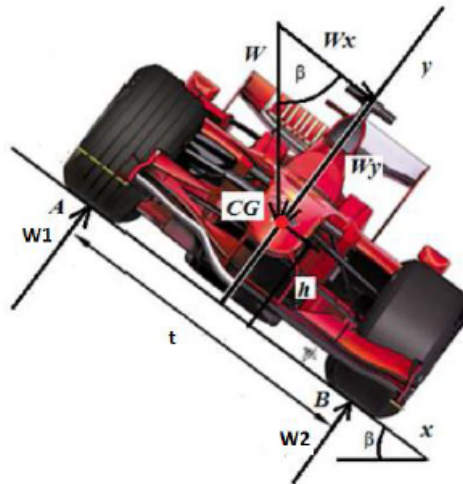


Figura 2.26 Análisis de cargas en la prueba de inclinación

$$\sum MB = 0 \quad \curvearrow +$$

$$W_y * \frac{t}{2} - W_x * h - W_1 * t = 0$$

$$W * \cos\beta * \frac{t}{2} - W * \sin\beta * h - W_1 * t = 0$$

Para que exista vuelco, se necesita que  $W_1$  sea 0, despejando  $\beta$  tenemos:

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{t}{2 * h}\right)$$

En donde:

$t$ : Ancho de vía = 1400 mm

$h$ : Altura del CG = 317 mm

$\beta$ : Inclinación máxima

Reemplazando en la ecuación se tiene:

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{1400\text{mm}}{2 * 317\text{mm}}\right) = 62.63^\circ$$

Se verifica que el vehículo resiste los 62,63 grados antes de volcar, por lo cual con la distribución de masas obtenidas se establece que el vehículo pasa la prueba satisfactoriamente.

### 2.5.3 Transferencia de masa lateral

Cuando el vehículo pasa por una curva, se presenta una fuerza centrífuga que hace que la masa del monoplaza se transfiera del lado interno de la curva al exterior, es importante saber qué cantidad de masa se transfiere para poder determinar los materiales para la construcción de los elementos.

Se realizan los cálculos asumiendo un peso del vehículo y piloto (W) de 370 Kg, y la distribución se la realiza para el eje delantero con un valor de  $W_d$  193.88kg:

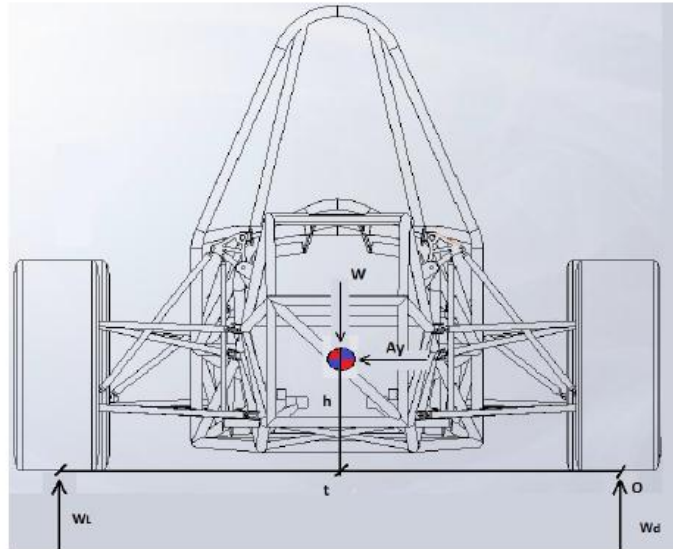


Figura 2.27 Transferencia de masa lateral

$$\sum M_o = 0 \quad \curvearrow +$$

$$W_L * t = W_d \frac{t}{2} + W_d * A_y * h = 0$$

$$W_L = \frac{W_d}{2} + \frac{W_d * A_y * h}{t}$$

Figura 2.27 Transferencia de masa lateral

$$\sum M_o = 0 \quad \curvearrow +$$

$$W_L * t = W_d \frac{t}{2} + W_d * A_y * h = 0$$

$$W_L = \frac{W_d}{2} + \frac{W_d * A_y * h}{t}$$

En donde:

$t$ : Ancho de vía = 1400 mm

$h$ : Altura del CG = 317 mm

$W_L$ : Peso en el eje exterior

$A_y$ : Aceleración Lateral = 1.75g

Reemplazando:

$$W_L = \frac{193.88}{2} + \frac{193.88 * 1.75 * 317}{1400}$$
$$W_L = 103.85 \text{ kg}$$

El total de peso en la rueda exterior de la curva es de 103,85 kg para una aceleración de 1.75 g.

#### 2.5.4 Transferencia de masa longitudinal

Cuando el monoplaza se somete a una gran aceleración se crea una fuerza que hace que la masa del monoplaza se transfiera de un eje al otro, esta aceleración se produce al momento de frenar y acelerar el vehículo, es importante saber la cantidad de masa transferida para determinar los materiales para la construcción de los elementos.

Se realiza los cálculos asumiendo un peso del vehículo W de 370 Kg, y la distribución se la realiza para el eje delantero con un valor de Wd 193.88kg y el eje posterior de Wt 176,12 kg. Para realizar el cálculo se toman los valores de una aceleración negativa la cual equivale al detener un vehículo de 100 Km/h en 3s:

$$-a = \frac{v_f - v_o}{t}$$

En donde:

*a = desaceleracion.*

$$V_o = \text{Velocidad inicial} = \frac{100\text{Km}}{\text{h}} = 27,77 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$V_f = \text{Velocidad final} = 0\text{m/s}$$

$$t = \text{tiempo} = 3 \text{ s}$$

Reemplazando se obtiene:

$$-a = \frac{0 - 27,77}{3} = 9,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$-a = 0,94g$$

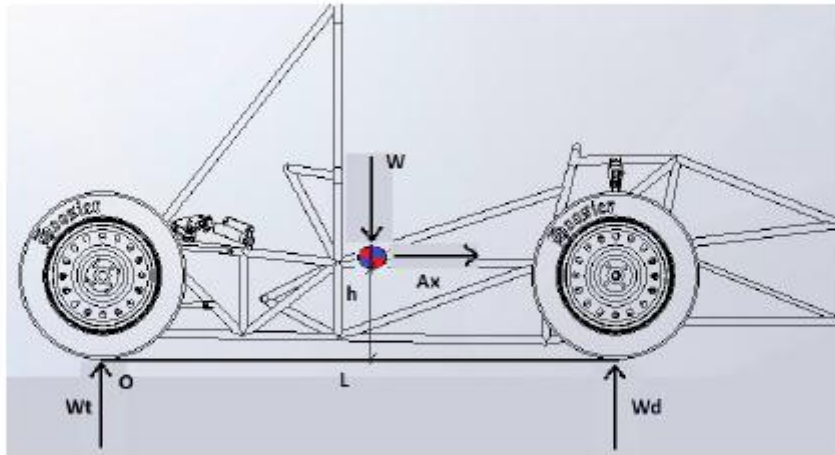


Figura 2.28 Transferencia de masa longitudinal

$$\sum M_o = 0 \quad \curvearrow +$$

$$dW_d * l = W * Ax * h$$

$$dW_d = \frac{W * Ax * h}{l}$$

En donde:

$l$ : Distancia entre ejes = 1600 mm

$h$ : Altura del CG = 317 mm

$dW_d$ : Incremento de peso en el eje delantero

$A_x$ : Aceleración Lateral = 0,94g

Reemplazando:

$$dW_L = \frac{370kg * 0.94 * 317mm}{1600mm}$$

$$dW_L = 68,90 \text{ kg}$$

Por lo tanto se determina que el peso transferido del eje posterior al delantero al momento del frenado es de 68,90kg, lo cual da un total de 262,78 kg en el eje delantero, es decir 131,39 kg en cada rueda.

### 2.5.5 Aceleración lateral

La fuerza centrífuga generada por el paso del vehículo en curva genera una fuerza lateral en la rueda del vehículo que debe ser calculada para realizar el análisis de las cargas en el sistema.

Para encontrar la fuerza centrífuga del vehículo se considera una velocidad de 50 Km/h y un radio de curva de 13,5 metros.

$$F_{lateral} = m \frac{v^2}{r}$$

En donde:

$$\begin{aligned} F_{lateral} &= \text{Fuerza Lateral} \\ v &= \text{velocidad del vehículo} = 50 \text{ Km/h} \\ r &= \text{radio de la curva} = 13 \text{ m} \\ m &= \text{masa del vehículo} = 370 \text{ kg} \end{aligned}$$

Reemplazando:

$$\begin{aligned} F_{lateral} &= 370 \text{ kg} \frac{(13,88 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{13 \text{ m}} \\ F_{lateral} &= 5483 \text{ N} \end{aligned}$$

Se obtiene una fuerza lateral en la rueda de 5483N, por lo tanto la fuerza lateral generada entre la calzada y cada neumático sería de 1370 N.

### **2.5.7 Distribución de fuerzas en los brazos de suspensión**

Se determina el valor de los esfuerzos en los brazos de suspensión en el caso crítico, es decir se simula un vehículo frenando en curva sobre un obstáculo, con lo cual se obtiene una fuerza lateral de 1370N, un valor de la rueda de 131,39 kg (1288,93N) de transferencia de masas longitudinal más 103kg (1010 N) de transferencia de masa transversal y más 6176N de fuerza generada por el obstáculo.



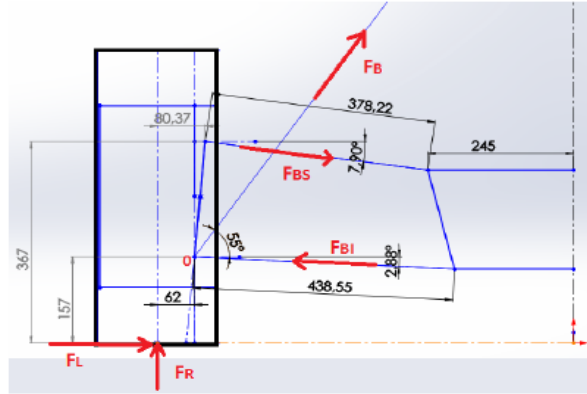


Figura 2.30 Fuerzas en los brazos de suspensión

$$\begin{aligned}
 & +\uparrow \sum F_z = 0 \\
 & +\uparrow \sum F_z = F_R - F_{BI}\text{sen}(-2,88) + F_B\text{sen}(55) - F_{BS}\text{sen}(7,9) \\
 & +\uparrow \sum F_y = 0 \\
 & +\uparrow \sum F_y = F_L - F_{BI}\text{cos}(-2,88) + F_B\text{cos}(55) + F_{BS}\text{cos}(7,9) \\
 & +\cup \sum M_O = 0 \\
 & +\cup \sum M_O = -F_R(0,062) + F_L(0,157) - F_{BS}\text{cos}(7,9) * (0,367 - 0,157)
 \end{aligned}$$

En donde:

$F_R$  = Fuerza de la rueda = 8476 N

$F_L$  = Fuerza lateral = 1370 N

$F_B$  = Fuerza en el balancín

$F_{BS}$  = Fuerza en el brazo superior

$F_{BI}$  = Fuerza en el brazo inferior

Resolviendo se obtiene:

$F_B$  = Fuerza en el balancín = 9969N

$F_{BS}$  = Fuerza en el brazo superior = 3400 N

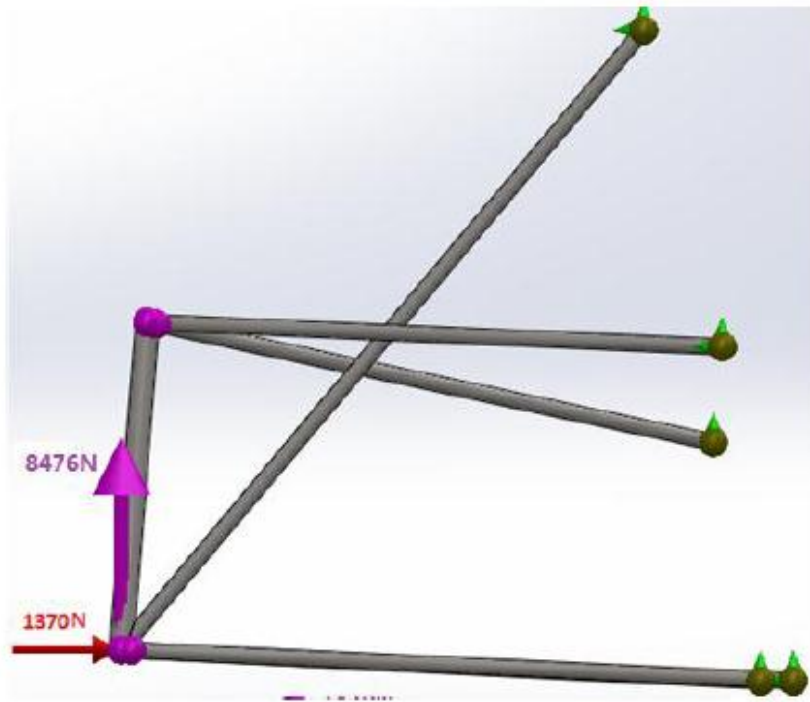
$F_{BI}$  = Fuerza en el brazo inferior = 1956N

Debido a que la suspensión posterior tiene una geometría complicada para el análisis de fuerzas, se ha optado por la utilización del programa SolidWorks para determinar las cargas presentes en el sistema.

### 2.5.8 Determinación de fuerzas en los brazos de suspensión por medio de SolidWorks

Una vez realizado el cálculo se verifica que el valor de las fuerzas obtenidas es el correcto, para ello se utiliza el programa Solidworks y se realiza un análisis estático en la estructura formada

por los brazos de suspensión y el push rod, aplicando las fuerzas presentes en el neumático como se puede observar en la siguiente figura:



*Figura 2.31 Análisis de fuerzas en la suspensión delantera derecha*



ScienceDirect  
 Disponible en [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)



Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial 13 (2016) 56-66

[www.elsevier.es/RIAI](http://www.elsevier.es/RIAI)

## Control Tolerante a Fallas en una Suspensión Automotriz Semi-Activa

Juan C. Tudón-Martínez<sup>a,\*</sup>, Sébastien Varrier<sup>b</sup>, Ruben Morales-Menendez<sup>a</sup>, Olivier Sename<sup>b</sup>

<sup>a</sup>Tecnológico de Monterrey, Escuela de Ingeniería y Ciencias, Av. E. Garza Sada 2501, 64849 Monterrey N.L., México  
<sup>b</sup>GIPSA-lab, INPG, Université Grenoble Alpes, 11 rue des mathématiques, 38402 Grenoble, Francia

### Resumen

Un nuevo controlador tolerante a fallas (*FTC* por sus siglas en inglés, *Fault Tolerant Controller*) activo es propuesto para una suspensión automotriz semi-activa, considerando un modelo de un cuarto de vehículo. El diseño está compuesto por: (1) un controlador no-lineal robusto utilizado para aislar las vibraciones en el vehículo causadas por perturbaciones externas y (2) un mecanismo de compensación usado para acomodar fallas aditivas en la fuerza de amortiguamiento. El mecanismo de compensación utiliza un módulo de detección y estimación de fallas robusto, basado en ecuaciones de paridad, para reconstruir la falla; esta información permite calcular la señal de compensación por medio de un modelo inverso del amortiguador para reducir el efecto de la falla en la dinámica vertical de la suspensión. Mientras que el controlador no-lineal, basado en la técnica de control de parámetros variantes lineales (*LPV* por sus siglas en inglés, *Linear Parameter-Varying*) está diseñado para aumentar el confort del pasajero y mantener el contacto llanta-suelo. Ante una falla en la fuerza de amortiguamiento, el *FTC* activo debe asegurar los desempeños de confort y seguridad utilizando la interacción entre el controlador *LPV* y el compensador. Resultados de simulación en *CarSim*<sup>TM</sup> muestran la efectividad del *FTC* activo respecto a un *FTC* pasivo y un amortiguador no controlado; el *FTC* pasivo depende del diseño para su capacidad tolerante, mientras que el *FTC* activo propuesto mejoró un 50.4 % en confort y un 42.4 % en agarre de superficie cuando ocurre una falla, en contraste con el amortiguador no-controlado que pierde totalmente su efectividad.

### Palabras Clave:

Control tolerante a fallas, detección de fallas, suspensión semi-activa automotriz, espacio de paridad, control *LPV*.

### 1. Introducción

Constantemente, la industria automotriz es mas sofisticada y compleja por la demanda creciente de producción de vehículos mas seguros y con mayor confort. Dentro de este crecimiento de innovación tecnológica automotriz, el desarrollo de sistemas de suspensión inteligente ha sido de gran interés para la comunidad científica en ingeniería de control con el fin de mejorar el compromiso entre confort y estabilidad del vehículo. Dos tecnologías de amortiguamiento han sido estudiadas, las suspensiones activas tienen mejor rendimiento pero son excesivamente caras para su implementación, mientras que las semi-activas ofrecen un buen balance entre costo y desempeño (Hurel-Ezeta et al., 2013).

Con la adición de nuevos sensores, la coordinación con otros sistemas (por ejemplo, el frenado, la dirección, etc.) y/o la im-

plementación de amortiguadores variables, el monitoreo y control de un sistema de suspensión inteligente es de mayor complejidad, pero permite desarrollar nuevas técnicas con tolerancia a fallas para asegurar en todo momento la confiabilidad del proceso ante situaciones anormales, por ejemplo, en suspensiones automotrices las situaciones anómalas pueden ser: fallas en acelerómetros, fallas en el regulador de corriente del amortiguador inteligente o fugas de aceite en el amortiguador.

Un controlador tolerante a fallas (*FTC* por sus siglas en inglés, *Fault Tolerant Controller*) está diseñado para mantener el desempeño deseado del sistema de control por un cierto periodo de tiempo ante la presencia de fallas, es decir, cuando una falla ha sido detectada y desplegada al conductor se asume que éste puede continuar conduciendo con ayuda del *FTC* (Manzone et al., 2001). Existen dos grandes grupos de *FTC* (Zhang y Jiang, 2008): los sistemas pasivos cuya tolerancia a fallas es robusta y diseñada fuera de línea, y los sistemas activos que cuentan con un mecanismo de reconfiguración del algoritmo de control en forma automática.

La principal limitante de un *FTC* pasivo es que puede resultar conservador cuando se contemplan numerosos escenarios de

\*Autor en correspondencia.  
 Correos electrónicos: [jc.tudon.phd.mty@iteam.mx](mailto:jc.tudon.phd.mty@iteam.mx) (Juan C. Tudón-Martínez), [sebastien.varrier@gipsa-lab.grenoble-inp.fr](mailto:sebastien.varrier@gipsa-lab.grenoble-inp.fr) (Sébastien Varrier), [rm@iteam.mx](mailto:rm@iteam.mx) (Ruben Morales-Menendez), [olivier.sename@gipsa-lab.grenoble-inp.fr](mailto:olivier.sename@gipsa-lab.grenoble-inp.fr) (Olivier Sename)

falla en el diseño del controlador; mientras que el *FTC* activo utiliza información de la falla en línea para compensar su efecto a lo largo del proceso. La información de la falla es obtenida por un módulo de detección y diagnóstico de fallas (*FDD* por sus siglas en inglés, *Fault Detection and Diagnosis*), el cual puede estar basado en un modelo matemático o utilizar datos históricos para generar una redundancia analítica.

Existen diferentes mecanismos de reconfiguración en un controlador *FTC* activo: compensación, conmutación, optimización, etc. Los sistemas de compensación son útiles cuando la magnitud de la falla puede ser estimada en línea (Zhang y Jiang, 2008); por ejemplo, utilizando un módulo *FDD* de generación residual.

El método de *espacio de paridad* propuesto por Chow y Willsky (1984) es considerado como uno de los métodos *FDD* de generación residual más importantes en la comunidad internacional de control automático, íntimamente relacionado con la estimación paramétrica y observadores (Zhang y Jiang, 2008). Las principales ventajas del método de espacio de paridad son (Ding, 2008): (a) fácil diseño en el marco de álgebra lineal, sin necesidad de tener un conocimiento avanzado en teoría de control; (b) baja complejidad computacional, una serie de algoritmos matemáticos facilita su implementación en un sistema de control embebido; (c) plataforma de nuevas ideas por su relación con la estimación paramétrica; (d) diseños *FDD* robustos y (e) alta velocidad de detección y/o estimación de falla. Una de las principales limitantes es el requisito de un estructura de modelo en espacio de estados con alta fiabilidad, cuya tarea puede llegar a ser complicada en una suspensión automotriz dependiendo de los grados de libertad que se consideren.

En suspensiones automotrices, el trabajo publicado de *FDD* se ha centralizado en generación residual con espacios de paridad. Börner et al. (2002) y Fischer e Isermann (2004) presentan una metodología de estimación paramétrica de un modelo de amortiguador semi-activo para crear una firma de fallas utilizando ecuaciones de paridad. Los residuos junto con la desviación paramétrica pueden ser utilizados en un sistema de reconfiguración de compensación usando métodos de inteligencia artificial (Fischer et al., 2007). Similarmente, Kim (2011) utiliza ecuaciones de paridad en la dinámica vertical del chasis para detectar fallas de sensor (acelerómetro) en un vehículo.

Durante los últimos años, la modelación y control de sistemas de parámetros variantes lineales (*LPV* por sus siglas en inglés, *Linear Parameter-Varying*) ha ganado importancia como una solución para extender la teoría de control robusto en el control de sistemas complejos no-lineales, como lo es la dinámica vertical no-lineal del vehículo (Poussot-Vassal et al., 2012). Desde su introducción (Shamma, 1988), el método *LPV* se ha adaptado para manejar las no-linealidades del sistema utilizando un conjunto de parámetros no estacionarios exógenos y hacer el desempeño del controlador adaptable a través de la variación lineal delimitada de estos parámetros. Shamma (2012) resalta las propiedades de los sistemas *LPV* para el diseño y síntesis del controlador, asumiendo que los parámetros pueden ser medidos o estimados en tiempo real, en contraste con los sistemas lineales de tiempo variable (*LTV* por sus siglas en inglés, *Linear Time-Varying*) cuyos valores de control dependen de los

valores de los parámetros futuros, violando así la restricción de causalidad en el control. El *conservadurismo* y complejidad de cómputo pueden llegar a ser desventajas del control *LPV* cuando el número de parámetros variantes es muy grande.

Cuando la técnica de control *LPV* se extiende al diseño de un *FTC* donde el parámetro variante asociado a la falla proviene de un módulo *FDD*, el sistema de lazo-cerrado sólo es robusto al tipo y magnitud de fallas consideradas en el diseño del controlador, es decir, el *FTC* activo y robusto está limitado a las fallas englobadas por el conjunto variante tal como se propone en (Gáspár et al., 2012) para asegurar la estabilidad del vehículo utilizando un sistema de suspensión activa. Recientemente, se han propuesto interesantes sistemas *LPV-FTC* para compensar la pérdida de efectividad de un amortiguador semi-activo (a causa de una fuga de aceite del amortiguador), utilizando el resto de los amortiguadores para equilibrar la transferencia de carga en el chasis (Tudón-Martínez et al., 2013b; Fergani et al., 2014). Este tipo de control tolerante, basado en *LPV*, utiliza el método de reconfiguración por conmutación (Zhang y Jiang, 2008).

Otros diseños de *FTC* activos que utilizan el método de reconfiguración por conmutación han sido propuestos para suspensiones activas; por ejemplo, en (Chamseddine y Noura, 2008; Noura et al., 2009), el *FTC* está basado en la técnica de control de modo deslizante (*SMFTC* por sus siglas en inglés, *Sliding Mode Fault-Tolerant Controller*) donde la falla es estimada por un observador de modo deslizante. En (Kim y Lee, 2011) se propone también un *SMFTC* con un módulo *FDD* basado en un modelo matemático del sensor y actuador para la generación residual. Por otro lado, en (Qiu et al., 2011) se propone un *FTC* activo con reconfiguración por optimización, es decir, una desigualdad matricial lineal (*LMI* por sus siglas en inglés, *Linear Matrix Inequality*) se utiliza para diseñar un observador y controlador  $\mathcal{H}_\infty$  que asegure la estabilidad del sistema de control ante una falla en el actuador. Las propuestas antes mencionadas muestran resultados prometedores para una implementación; sin embargo, el sistema de reconfiguración por conmutación u optimización puede limitar la capacidad tolerante del controlador, es decir, el desempeño está sujeto al signo, la magnitud y el comportamiento de la falla aditiva y/o multiplicativa que se utilizó en el diseño del controlador.

En este artículo se propone un *FTC* activo con reconfiguración por compensación que permite eliminar el efecto de una falla aditiva en el sistema de actuación, sin limitar el desempeño a la forma de la falla. El sistema *FTC* propuesto es implementado en una suspensión semi-activa de un modelo de cuarto de vehículo (*QoV* por sus siglas en inglés, *Quarter of Vehicle*), cuyo diseño está compuesto por tres módulos: (1) un módulo *FDD* basado en ecuaciones de paridad para estimar la falla en línea con robustez a dinámicas no modeladas, (2) un controlador *LPV* con desempeño robusto a incertidumbres del modelo y perturbaciones de camino y, (3) el sistema de reconfiguración por compensación que utiliza la falla estimada para calcular la corriente eléctrica necesaria para mitigar el efecto de la falla en la dinámica vertical del modelo *QoV*. Este trabajo es una extensión de (Tudón-Martínez et al., 2013a), resaltando el beneficio de implementar un *FTC* activo en comparación con su versión

Tabla 1: Definición de Variables.

Variable	Descripción
$\rho_1$	Histéresis en el modelo de amortiguador
$\rho_1^*$	Parámetro variante para representar la histéresis de $F_{MR}$ utilizando un filtro en la entrada de control
$\rho_2^*$	Parámetro asociado a la saturación del actuador
$a_i$	Parámetros en zona <i>pre-esfuerzo</i> del modelo de $F_{MR}$
$b_i$	Parámetros en zona <i>post-esfuerzo</i> del modelo de $F_{MR}$
$f_c$	Fuerza dinámica en el modelo de amortiguador $MR$
$F_{MR}$	Fuerza del amortiguador $MR$
$F_\delta, \hat{F}_\delta$	Falla aditiva en la fuerza $MR$ , Estimación de $F_\delta$
$I, I_0$	Corriente eléctrica, Promedio de $I$
$I_{LPV}$	Corriente eléctrica derivada del controlador $LPV$
$I_{FTC}$	Corriente eléctrica derivada del $FTC$ activo
$I_{FDD}$	Corriente eléctrica derivada del módulo $FDD$
$\mathcal{K}_{LPV}$	Estructura del controlador $LPV$ politópico
$k_s, k_t$	Coefficiente de rigidez del resorte y de la llanta
$m_s, m_{ns}$	Masa suspendida y no suspendida en el $QoV$
$r, \bar{r}$	Residuos del espacio de paridad
$W_i$	Funciones de peso en diseño de controlador $LPV/H_\infty$
$z_{def}, \dot{z}_{def}$	Posición, velocidad del pistón del amortiguador $MR$
$z_r$	Perfil de camino (elevación vertical)
$z_s, z_{ns}$	Desplazamiento vertical de $m_s, m_{ns}$
$\dot{z}_s, \dot{z}_{ns}$	Velocidad vertical de $m_s, m_{ns}$
$\ddot{z}_s, \ddot{z}_{ns}$	Aceleración vertical de $m_s, m_{ns}$

pasiva a través de diversas pruebas de evaluación en *CarSim*<sup>TM</sup>.

La estructura de este artículo es la siguiente: a continuación se presenta el planteamiento del problema. Las secciones 3 y 4 describen la metodología del módulo  $FDD$  para estimar la falla y el diseño del controlador  $LPV$  con su mecanismo de reconfiguración, respectivamente. Los resultados son discutidos en la sección 5 y las conclusiones se presentan en la sección 6. Todas las variables utilizadas en el artículo se definen en la Tabla 1.

## 2. Planteamiento del Problema

Un modelo clásico de un cuarto de automóvil es utilizado como sistema de análisis, el cual corresponde a la esquina frontal izquierda de una camioneta de carga ligera. Un modelo experimental de amortiguador *Magneto-Reológico* ( $MR$ ) junto con la rigidez del resorte  $k_s$  representan el sistema de suspensión semi-activa entre la masa suspendida ( $m_s$ ) y no-suspendida ( $m_{ns}$ ), cuya dinámica está dada por:

$$\begin{aligned} m_s \ddot{z}_s &= -k_s(z_s - z_{ns}) - F_{MR}; \\ m_{ns} \ddot{z}_{ns} &= k_s(z_s - z_{ns}) - k_t(z_{ns} - z_r) + F_{MR}. \end{aligned} \quad (1)$$

La fuerza de amortiguamiento semi-activa ( $F_{MR}$ ) se utiliza para controlar las vibraciones en la masa suspendida (control de confort) y al mismo tiempo asegurar en todo momento el contacto entre la llanta y el camino (control de agarre de superficie). Utilizando una extensión del modelo paramétrico de (Guo et al., 2006), con inclusión de la señal de manipulación (corriente eléctrica), la dinámica no-lineal de un amortiguador  $MR$  puede ser representada como:

$$F_{MR}(t) = I f_c \rho_1(t) + b_1 \dot{z}_{def}(t) + b_2 z_{def}(t) + F_\delta(t), \quad (2)$$

donde  $F_\delta(t)$  representa una falla aditiva en la fuerza de amortiguamiento y  $\rho_1(t)$  es la parte no-lineal utilizada para representar la histéresis de la fuerza (Do et al., 2012), la cual está dada por:

$$\rho_1(t) = \tanh(a_1 \dot{z}_{def} + a_2 z_{def}). \quad (3)$$

Sustituyendo (2) en (1) y considerando  $z_{def} = z_s - z_{ns}$  así como  $\dot{z}_{def} = \dot{z}_s - \dot{z}_{ns}$ , la dinámica vertical de un cuarto de vehículo, en una representación de espacio de estados, se puede expresar como:

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{z}_s \\ \dot{z}_{ns} \\ z_{def} \end{bmatrix}}_x &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{b_1}{m_s} & -\frac{c_1}{m_s} & \frac{b_1}{m_s} & \frac{c_1}{m_s} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{b_1}{m_{ns}} & \frac{c_1}{m_{ns}} & -\frac{b_1}{m_{ns}} & -\frac{c_1+k_t}{m_{ns}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} z_s \\ z_{ns} \\ z_{def} \end{bmatrix}}_x \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{f_c \rho_1}{m_s} \\ 0 \\ \frac{f_c \rho_1}{m_{ns}} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_1} I + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{m_s} \\ 0 \\ \frac{1}{m_{ns}} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_2} F_\delta + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{b_1}{m_{ns}} \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_3} z_r; \\ \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{z}_s \\ \dot{z}_{ns} \\ z_{def} \end{bmatrix}}_y &= \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{b_1}{m_s} & -\frac{c_1}{m_s} & \frac{b_1}{m_s} & \frac{c_1}{m_s} \\ \frac{b_1}{m_{ns}} & \frac{c_1}{m_{ns}} & -\frac{b_1}{m_{ns}} & -\frac{c_1+k_t}{m_{ns}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} z_s \\ z_{ns} \\ z_{def} \end{bmatrix}}_y \\ &+ \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{f_c \rho_1}{m_s} \\ \frac{f_c \rho_1}{m_{ns}} \\ 0 \end{bmatrix}}_{D_1} I + \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{1}{m_s} \\ \frac{1}{m_{ns}} \\ 0 \end{bmatrix}}_{D_2} F_\delta + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{b_1}{m_{ns}} \\ 0 \end{bmatrix}}_{D_3} z_r, \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $c_1 = b_2 + k_s$ , con  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u \in \mathbb{R}^p$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ .

Cuando ocurre una falla aditiva en la fuerza de amortiguamiento, las propiedades para disipar/absorber movimiento del amortiguador cambian alterando el desempeño deseado del controlador. En un vehículo completo, una falla en la fuerza de amortiguamiento en una de las esquinas modifica la transferencia de carga desbalanceando el chasis y con ello aumentando el movimiento de cabeceo (*pitch* en inglés) y bamboleo (*roll* en inglés) del automóvil. Estos movimientos en situaciones de conducción crítica pueden llevar a una volcadura, por ello la importancia de su detección y corrección oportuna.

**Definición del problema.** El objetivo principal es diseñar un  $FTC$  activo para el sistema de suspensión representado en (4) capaz de eliminar los efectos de una falla aditiva  $F_\delta$  en la fuerza de amortiguamiento. El módulo  $FDD$  propuesto estima la magnitud y comportamiento de la falla sin importar la forma de la misma; esta información se utiliza para calcular la corriente eléctrica necesaria para acomodar la falla en el amortiguador  $MR$  añadiendo una señal compensatoria a la salida de un controlador  $LPV$ . Basado en la teoría de control  $H_\infty$ , el controlador  $LPV$  está enfocado a confort y agarre de superficie. Ambos módulos (controlador  $LPV$  y  $FDD$ ) deben ser diseñados para ser robustos a perturbaciones del camino e incertidumbres en el modelo, e incluir las no-linealidades del amortiguador semi-

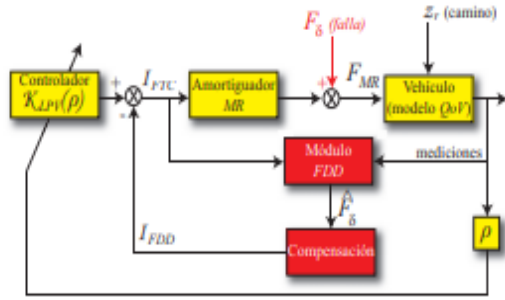


Figura 1: Propuesta de solución del sistema de control tolerante a fallas.

activo en su diseño, tal que:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mathcal{A}(\rho) \cdot x + \mathcal{B} \cdot [I_{FTC} \ F_{\delta} \ z_r]^T; \\ y &= \mathcal{C} \cdot x + \mathcal{D} \cdot [I_{FTC} \ F_{\delta} \ z_r]^T; \\ I_{FTC} &= \mathcal{K}_{LPV}(\rho) \cdot x - I_{FDD}(\hat{F}_{\delta}), \end{aligned} \quad (5)$$

donde  $\mathcal{A}(\rho)$ ,  $\mathcal{B}$ ,  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son matrices reales de dimensiones apropiadas del sistema de lazo cerrado, siendo la matriz de transición de estados paramétricamente dependiente por el vector de coeficientes variantes  $\rho$ , el cual se puede medir o estimar. La entrada de control  $I_{FTC}$  está compuesta por (a) una señal de compensación  $I_{FDD}$  que permite eliminar el efecto de la falla usando una relación no-lineal corriente eléctrica - fuerza, tal que, de las sub-matrices de  $\mathcal{B}$  se tenga  $B_F \cdot F_{\delta} - B_I \cdot I_{FDD} \approx 0$ , y (b) por la salida del controlador LPV con  $\mathcal{K}_{LPV}(\rho) = \sum_{i=1}^N \xi_i(\rho) \mathcal{K}_i$ . Donde las ganancias  $\mathcal{K}_i = \begin{bmatrix} A_{c_i} & B_{c_i} \\ C_{c_i} & D_{c_i} \end{bmatrix}$  con  $i = 1, \dots, N$ , son seleccionadas apropiadamente tal que el sistema de lazo cerrado presentado en (5) sea asintóticamente estable para todas las variaciones paramétricas de  $\rho$  y cumpla con los objetivos de control cuando  $B_F \cdot F_{\delta} \approx B_I \cdot I_{FDD}$ . La Figura 1 muestra en forma esquemática la definición del problema a resolver.

Es importante señalar que la falla aditiva estudiada en este artículo definida por (2), considerada como un sesgo de referencia en el sistema de control interno del amortiguador inteligente, puede modelarse también como una falla multiplicativa de acuerdo a:

$$\begin{aligned} F_{MR} &= F_{MR_0} + F_{\delta} = F_{MR_0} (1 + \beta), \quad \text{para una falla negativa :} \\ F_{MR} &= F_{MR_0} (1 - \beta) = \alpha F_{MR_0}, \end{aligned} \quad (6)$$

donde  $F_{MR_0}$  es la fuerza del amortiguador MR libre de fallas y en este caso el parámetro de falla  $\alpha \in [0, 1]$  representa el grado de fuga de aceite en el amortiguador, es decir,  $\alpha = 1$  significa que el amortiguador está libre de fugas. Note que ahora la falla es multiplicativa y físicamente tiene otra causa; sin embargo, dado que la definición de la falla es re-escribible como un caso aditivo o multiplicativo usando (6), la propuesta de solución FTC es aplicable para ambos casos de falla.

### 3. Diseño del Detector y Estimador de Fallas

El método de detección de fallas propuesto está basado en la técnica de espacio de paridad por sus propiedades de diseño

y buenos resultados discutidos en (Zhang y Jiang, 2008). El objetivo es sintetizar un residuo que sea sensible a la falla pero insensible a las entradas exógenas; por ejemplo, perturbaciones en el camino o la transferencia de carga en el vehículo. Estas entradas desconocidas están limitadas a la elevación de la superficie (rugosidad) y a la capacidad de carga del vehículo.

Considerando un horizonte  $s$  asociado a la  $s$ -ésima derivada en el tiempo, la salida  $y(t)$  puede ser expresada en una relación de paridad como:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ y^{(s)} \end{bmatrix}}_{\mathcal{Y}} - \underbrace{\begin{bmatrix} I \\ I \\ I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix}}_{\mathcal{I}} = \underbrace{\mathcal{H}x + \mathcal{G}_F \begin{bmatrix} F_{\delta} \\ \dot{F}_{\delta} \\ \ddot{F}_{\delta} \\ \vdots \\ F_{\delta}^{(s)} \end{bmatrix}}_{\mathcal{F}} + \underbrace{\mathcal{G}_r \begin{bmatrix} z_r \\ \dot{z}_r \\ \ddot{z}_r \\ \vdots \\ z_r^{(s)} \end{bmatrix}}_{\mathcal{R}}, \quad (7)$$

donde las matrices  $\mathcal{G}_I$ ,  $\mathcal{G}_F$  y  $\mathcal{G}_r$  están formadas por las matrices del sistema (4), tal que en forma general:

$$\mathcal{G}_x = \begin{bmatrix} D_x & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ CB_x & D_x & 0 & \dots & \dots & 0 \\ CAB_x & CB_x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ CA^2B_x & CAB_x & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ CA^{s-1}B_x & CA^{s-2}B_x & \dots & CAB_x & CB_x & D_x \end{bmatrix}$$

y  $\mathcal{H} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^s \end{bmatrix}$  asegura la condición de observabilidad, es decir,

el rango de  $\mathcal{H}$  debe ser igual al rango del sistema. La matriz  $\mathcal{H}$  de dimensión  $m \cdot (s + 1) \times n$ , determina la condición de orden del espacio de paridad (Ding, 2008), tal que:

$$\begin{aligned} m \cdot (s + 1) &> n; \\ s &\geq \lfloor \frac{n}{m} \rfloor \equiv \sigma_{min}, \end{aligned} \quad (8)$$

donde  $\lfloor \cdot \rfloor$  representa el operador de parte entera superior o función suelo, y  $\sigma_{min}$  es el orden mínimo del espacio de paridad. Generalmente, el espacio de paridad utiliza el orden mínimo admisible para reducir computacionalmente el tamaño de las matrices.

Para cumplir con el requisito de sensibilidad a la falla  $F_{\delta}$  e insensibilidad a las perturbaciones de camino, en la relación de paridad (7) debe existir al menos una matriz de paridad  $\mathcal{W} \neq 0$  de dimensión  $[(s + 1)m - n \times (s + 1)m]$ , donde  $m$  es el rango de  $C$ , que pertenece al espacio de paridad de orden  $s$ -ésimo tal que:

$$\mathcal{W} \cdot [\mathcal{H} \ | \ \mathcal{G}_r] = 0. \quad (9)$$

La ecuación (9) garantiza el perfecto desacoplamiento de los residuos respecto a los estados del sistema y respecto a las perturbaciones del camino  $z_r$ . El generador de residuos, basado en relaciones de paridad, está dado por:

$$r(t) = \mathcal{W}(\mathcal{Y} - \mathcal{G}_I \mathcal{I}) = \mathcal{W} \mathcal{G}_F F_{\delta}(t), \quad (10)$$

el cual es perfectamente sensible a la falla  $F_\delta$ . De igual forma, la matriz de espacio nulo  $\mathcal{W}$  permite la detección de cualquier falla aditiva en la fuerza de amortiguamiento sin importar su magnitud y/o comportamiento (abrupto, interrumpido, gradual, etc.) sin considerar el nivel de manipulación (valor de corriente eléctrica) en el amortiguador  $MR$ .

Puesto que el modelo clásico de suspensión para un cuarto de automóvil no incluye dinámicas no-lineales presentes en un modelo de vehículo completo y mucho menos de un vehículo real; por ejemplo, juntas mecánicas, barras estabilizadoras, distribución de carga, etc., se requiere añadir robustez a los residuos dado que mucha de esta dinámica no modelada afecta al modelo  $QoV$  descrito en (4) de acuerdo a:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B_1I(t) + B_F F_\delta(t) + B_r z_r(t) + B_\delta \delta(t); \\ y(t) &= Cx(t) + D_1I(t) + D_F F_\delta(t) + D_r z_r(t) + D_\delta \delta(t), \end{aligned} \quad (11)$$

donde  $\delta(t)$  representa entradas desconocidas exógenas que alteran la dinámica vertical del vehículo (por ejemplo, una fuerza externa por transferencia de carga) con dinámica:

$$B_\delta = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m_s} & 0 & \frac{1}{m_{sa}} & 0 \end{bmatrix}^T \text{ y } D_\delta = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m_s} & \frac{1}{m_{sa}} & 0 \end{bmatrix}^T.$$

La expresión de los residuos en (10) puede ser modificada como:

$$r(t) = \mathcal{W} \mathcal{G}_F F_\delta(t) + \mathcal{W} \mathcal{G}_\delta \delta(t), \quad (12)$$

donde  $\mathcal{G}_\delta$  es la dinámica de la distribución de  $\delta(t)$  en el sistema.

El perfecto desacoplamiento entre los residuos y las entradas exógenas no-modeladas puede llegar a ser muy complicado debido a que el valor de  $\delta(t)$  puede ser muy grande y la condición en el horizonte  $s$  lleva a dificultades computacionales y un largo tiempo de detección de falla. Recientemente, Varrier et al. (2012) proponen un método de optimización para lograr este tipo de desacoplamiento. El objetivo es encontrar una nueva matriz de espacio nulo  $\mathcal{W}_2$  tal que el nuevo generador de residuos  $\tilde{r}(t)$  sea:

$$\tilde{r}(t) \triangleq \mathcal{W}_2 r(t), \quad (13)$$

el cual es sensible a la falla  $F_\delta(t)$  pero insensible a  $\delta(t)$ ; en términos de un problema de optimización  $\mathcal{P}$ , esto es:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \max_{\mathcal{W}_2} \|\mathcal{W}_2 \mathcal{W} \mathcal{G}_F\|^2 \\ \min_{\mathcal{W}_2} \|\mathcal{W}_2 \mathcal{W} \mathcal{G}_\delta\|^2 \end{cases} \quad (14)$$

y desarrollando se tiene que:

$$\mathcal{P} : \begin{cases} \max_{\mathcal{W}_2} \mathcal{W}_2 \mathcal{W} \mathcal{G}_F \mathcal{G}_F^T \mathcal{W}^T \mathcal{W}_2^T \\ \min_{\mathcal{W}_2} \mathcal{W}_2 \mathcal{W} \mathcal{G}_\delta \mathcal{G}_\delta^T \mathcal{W}^T \mathcal{W}_2^T \end{cases} \quad (15)$$

El problema de optimización min/max en (15) puede ser replanteado en un problema de optimización más simple como:

$$\mathcal{P} : \min_{\mathcal{W}_2} \frac{\mathcal{W}_2 \Gamma_1 \mathcal{W}_2^T}{\mathcal{W}_2 \Gamma_2 \mathcal{W}_2^T}, \quad (16)$$

donde  $\Gamma_1 = \mathcal{W} \mathcal{G}_F \mathcal{G}_F^T \mathcal{W}^T$  y  $\Gamma_2 = \mathcal{W} \mathcal{G}_\delta \mathcal{G}_\delta^T \mathcal{W}^T$ , cuya solución (Ding, 2008; Varrier et al., 2012) será:

$$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{W}_2 = \theta_-(\Gamma_1, \Gamma_2), \quad (17)$$

donde  $\theta_-(\Gamma_1, \Gamma_2)$  representa el *vector propio* generalizado del par  $(\Gamma_1, \Gamma_2)$  que está asociado al *valor propio* más pequeño  $\lambda_-$ . De este modo, el generador de residuos con robustez a la dinámica no modelada, vía la matriz  $\mathcal{G}_\delta$ , tiene la siguiente estructura:

$$\tilde{r}(t) = \mathcal{W} \mathcal{G}_F F_\delta(t) + \mathcal{W} \mathcal{G}_\delta \delta(t), \quad (18)$$

donde  $\mathcal{W} = \mathcal{W}_2 \mathcal{W}$ .

Asumiendo un buen desacoplamiento respecto a las incertidumbres del modelo ( $\mathcal{W} \mathcal{G}_\delta \delta(t) \sim 0$ ), el generador de residuos en (18) puede ser obtenido por  $\tilde{r}(t) \approx \mathcal{W} \mathcal{G}_F F$ . De este modo, se puede estimar la falla  $F_\delta$  invirtiendo la relación entre el residuo y la falla. De hecho, esto puede ser obtenido gracias al formalismo de la transformada de Laplace, como:

$$\begin{aligned} \tilde{r}(s) &= \mathcal{W} \mathcal{G}_F \begin{bmatrix} 1 & s & s^2 & \dots & s^{(n)} \end{bmatrix}^T F_\delta(s), \\ &= (\mathcal{W} \mathcal{G}_F)(s) F_\delta(s). \end{aligned} \quad (19)$$

Invirtiendo (19),  $F_\delta$  pueda ser estimada por:

$$\hat{F}_\delta(s) = [\mathcal{W} \mathcal{G}_F(s)]^{-1} \tilde{r}(s). \quad (20)$$

#### 4. Diseño del Controlador Tolerante a Fallas

El controlador tolerante a fallas de la suspensión semi-activa está compuesto por dos secciones:

1. Un controlador  $LPV$  robusto a perturbaciones del camino diseñado para reducir la vibración vertical del vehículo.
2. Un mecanismo de reconfiguración por compensación que utiliza la estimación en línea de la falla usando el  $FDD$ , para eliminar el efecto de la misma.

Cuando el sistema de suspensión está libre de fallas, el controlador  $LPV$  se orienta para mejorar confort y/o agarre de superficie de acuerdo con las especificaciones de diseño en el dominio de la frecuencia. Sin embargo, cuando ocurre una falla aditiva en  $F_{MR}$ , el sistema de compensación y el controlador  $\mathcal{K}_{LPV}$  interactúan de acuerdo a la Figura 2, tal que:

- El módulo  $FDD$  estima la falla de acuerdo a la expresión en (20), utilizando las mediciones y la entrada de control en el amortiguador del sistema de lazo cerrado.
- Una vez estimada la falla, el objetivo es determinar la cantidad de corriente eléctrica  $I_{FDD}$  que contrarresta  $\hat{F}_\delta$ , tal que  $I_{FDD} = [(B_I)^+ B_F] \hat{F}_\delta$ , donde el operador  $(\cdot)^+$  representa la pseudo-inversa de Moore-Penrose.
- En el sistema de control, la variable de manipulación  $I_{FTC}$  sobre el amortiguador  $MR$  está compuesta por la salida del controlador  $LPV$  ( $I_{LPV}$ ) para tener un desempeño deseado de movimiento vertical y por la señal de compensación  $I_{FDD}$  para reducir el efecto de la falla. Dado que no hay una retroalimentación de  $I_{FDD}$  por el controlador  $\mathcal{K}_{LPV}$ , se tiene que la suma algebraica de  $I_{FDD}$  e  $I_{LPV}$  está saturada por el mínimo/máximo valor de corriente eléctrica permisible por el amortiguador  $MR$ .

El controlador  $LPV$  utiliza dos parámetros variantes para representar las no-linealidades en el amortiguador  $MR$ :  $\rho_1^*$  para la histéresis y  $\rho_2^*$  para la saturación.

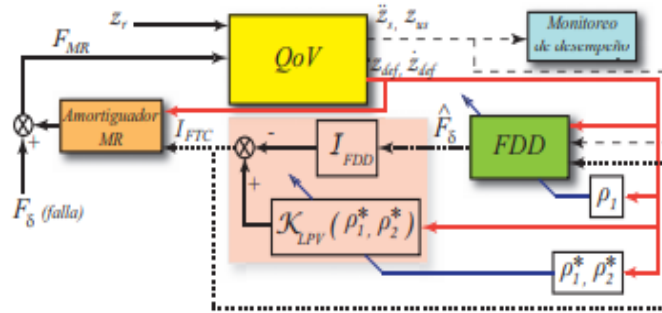


Figura 2: Sistema de control tolerante a fallas. La falla corresponde a una señal aditiva en la fuerza de amortiguamiento de una suspensión semi-activa. La salida del controlador FTC está compuesta por la salida del controlador nominal LPV y la señal de reconfiguración ( $I_{FDD}$ ).

4.1. Controlador LPV Robusto

La primer tarea en el diseño del controlador LPV, es generar un modelo de parámetros variantes, el cual posteriormente se toma como base para construir una planta generalizada de acuerdo a la síntesis clásica de control  $H_{\infty}$ .

**Modelación LPV.** Puesto que el parámetro variante  $\rho_1$  que representa la histéresis en el amortiguador MR está contenido en la matriz  $B_f$  en (4); se requiere añadir un filtro en la entrada de control para construir una estructura propia de un modelo LPV con matriz de entrada  $B$  paramétricamente independiente (Poussot-Vassal et al., 2008), adicionando un estado más al sistema. Como una extensión de (Do et al., 2012), el modelo LPV incorpora un nuevo parámetro variante  $\rho_2^*$  para asegurar la saturación a la salida del controlador, es decir, limitar la corriente eléctrica deseada en el rango de actuación del amortiguador MR (0 a 2.5 A), tal que el modelo LPV de un cuarto de vehículo esta dado por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_p &= A_p(\rho_1^*, \rho_2^*) \cdot x_p + B_{p1} \cdot u_1 + B_{p2} \cdot u_2; \\ y &= C_p \cdot x_p + D_{p1} \cdot u_1 + D_{p2} \cdot u_2, \end{aligned} \quad (21)$$

donde:

$$x_p = \begin{bmatrix} z_a \\ z_x \\ z_w \\ z_{ax} \\ x_f \end{bmatrix}, \quad A_p(\rho_1^*, \rho_2^*) = \begin{bmatrix} A + \rho_2^* B_{f0} C_{f0} & B_f(\rho_1^*) C_f \\ 0_{1 \times 4} & A_f \end{bmatrix},$$

$$B_{p1} = \begin{bmatrix} 0_{4 \times 1} \\ B_f \end{bmatrix}, \quad B_{p2} = \begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{p1} = [0_{3 \times 1}],$$

$$D_{p2} = D_r, \quad C_p = \begin{bmatrix} C & D_f(\rho_1^*) C_f \end{bmatrix},$$

$$u_1 = I_f, \quad u_2 = z_r, \quad B_{f0} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{m_c} & 0 & \frac{1}{m_c} & 0 \end{bmatrix}^T,$$

$$I_0 = \text{promedio}(I) \quad \text{y} \quad C_{f0} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix}.$$

Los parámetros variantes están definidos como:

$$\begin{aligned} \rho_1^* &= \rho_1 \cdot \frac{\tanh(C_f x_f / I_0)}{C_f x_f / I_0} \in [-1, 1]; \\ \rho_2^* &= \frac{\rho_2}{C_{f0} x} \in [0, 1]. \end{aligned} \quad (22)$$

Las Figuras 3(a) y 3(b) muestran la región de operación de ambos parámetros variantes en un modelo de cuarto de vehículo sujeto a dos perfiles de camino diferentes: (a) una serie de 5 topes consecutivos y (b) una señal de frecuencia barrida (*chirp*). En ambos casos, las regiones de operación son similares a la mitad de un elipse; además, es notorio que existen algunas áreas donde la variación paramétrica no está contenida (cerca de los vértices del polígono  $\mathcal{P}_1$  y  $\mathcal{P}_2$ ), las cuales podrían no ser consideradas en el diseño para reducir el *conservadurismo* del controlador.

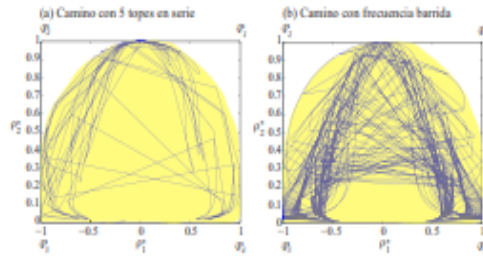


Figura 3: Región de operación de los parámetros variantes  $\rho_1^*$  y  $\rho_2^*$ .

El diseño del filtro con matrices  $[A_f, B_f, C_f, D_f]$  y mas detalles de la modelación LPV con restricciones en el actuador semi-activo se pueden revisar en (Poussot-Vassal et al., 2008; Do et al., 2012).

**Síntesis del controlador LPV/ $H_{\infty}$ .** La metodología de diseño de control LPV politópico permite acotar la no-linealidad del sistema de lazo cerrado en un problema de dimensión finita; considerando 2 parámetros variantes, un politopo de 4 controladores lineales e invariantes en el tiempo es diseñado usando la teoría de control robusto  $H_{\infty}$ . Las funciones de peso para especificar desempeño robusto son:



- $W_{z_1} = \frac{k_1(x^2 + 2\xi_1\omega_{n1}x + \omega_{n1}^2)}{x^2 + 2\xi_1\omega_{n1}x + \omega_{n1}^2}$ , reduce la aceleración vertical de  $m_s$ , especialmente en su frecuencia natural de excitación,
- $W_{z_{ms}} = \frac{k_2(x^2 + 2\xi_2\omega_{n2}x + \omega_{n2}^2)}{x^2 + 2\xi_2\omega_{n2}x + \omega_{n2}^2}$ , reduce el desplazamiento de la masa no suspendida a altas frecuencias,
- $W_{z_c} = \frac{k_3x}{x+1}$ , aumenta la sensibilidad al camino en una banda de frecuencias.

Los parámetros de  $W_{z_1}$  y  $W_{z_{ms}}$  determinan la forma de las funciones de peso en las señales controladas para cumplir con las especificaciones de diseño y robustez del controlador  $\mathcal{H}_\infty$  en el dominio de la frecuencia, sus valores se pueden obtener a través del estudio de las funciones de sensibilidad y sensibilidad complementaria. En (Do et al., 2012) se propone un procedimiento de búsqueda optimizado de dichos parámetros, de acuerdo a las especificaciones deseadas, utilizando algoritmos genéticos. Un conjunto de parámetros incorrectos puede afectar la estabilidad interna del controlador y/o su desempeño robusto.

Considerando las especificaciones de diseño anteriores, la planta generalizada  $\mathcal{P}(\rho_1^*, \rho_2^*)$  utilizada para la síntesis del controlador LPV está dada por:

$$\mathcal{P}(\rho_1^*, \rho_2^*) := \begin{bmatrix} \dot{\xi} \\ z_{co} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{A}(\rho_1^*, \rho_2^*) & \mathcal{B}_1 & \mathcal{B}_2 \\ C_{co} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ C & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi \\ w \\ u_c \end{bmatrix}, \quad (23)$$

con  $\mathcal{A}(\rho_1^*, \rho_2^*) = \begin{bmatrix} A_p(\rho_1^*, \rho_2^*) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_w \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} B_{p2}W_{z_c} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$ ,  $\mathcal{B}_2 = \begin{bmatrix} B_{p1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$  y  $C = \begin{bmatrix} C_x & \mathbf{0} \end{bmatrix}$ , donde  $\xi = [x_p \ x_w]^T$  tal que  $x_p$  es el vector de estados de la dinámica vertical del modelo QoV en (21) y  $x_w$  representa el vector de estados de las funciones de ponderación en el movimiento vertical del vehículo, con dinámica  $A_w$ . Es decir,  $(A_w)_{5 \times 5}$  es la matriz de transición de estados al convertir las funciones de peso  $W_{z_c}$ ,  $W_{z_1}$  y  $W_{z_{ms}}$  en una representación de espacio de estados. La salida controlada es  $z_{co} = [z_1 \ z_2]^T$  con dinámica  $C_{co}$ , es decir  $(C_{co})_{2 \times 10}$  contiene los parámetros de las funciones de peso  $W_{z_1}$  y  $W_{z_{ms}}$ , tal que  $z_1$  es la aceleración de la masa suspendida controlada ( $\ddot{z}_{ms}$ ) y  $z_2$  es la posición de la masa no suspendida controlada ( $z_{ms}$ ). La salida medida es  $y = [z_{def} \ \dot{z}_{def}]^T$  con dinámica  $C_x$  utilizada como retroalimentación de estados,  $w$  es la perturbación de camino sin filtrar ( $\xi_r$ ) y  $u_c = u^{H_\infty}$  es la salida del controlador. Usando la metodología de diseño de control LPV/ $\mathcal{H}_\infty$  (Scherer et al., 1997), el controlador politópico obtenido  $\mathcal{K}_{LPV}(\rho)$  dado por:

$$\mathcal{K}_{LPV}(\rho) : \begin{bmatrix} A_c(\rho) & B_c(\rho) \\ C_c(\rho) & D_c(\rho) \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{2^2} \xi_i(\rho) \begin{bmatrix} A_{c_i} & B_{c_i} \\ C_{c_i} & D_{c_i} \end{bmatrix} \quad (24)$$

es cuadráticamente estable para todas las trayectorias de los parámetros variantes contenidos en el vector  $\rho = [\rho_1^* \ \rho_2^*]$  al resolver un problema LMI en cada vértice del polítopo, expresado por el Bounded Real Lemma como (Apkarian y Gahinet, 1995; Scherer et al., 1997):

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}(\rho)^T \mathcal{K}_{LPV}(\rho) + \mathcal{K}_{LPV}(\rho) \mathcal{A}(\rho) & \mathcal{K}_{LPV}(\rho) \mathcal{B} & C_{co}^T \\ \mathcal{B}^T \mathcal{K}_{LPV}(\rho) & -\gamma_\infty^2 I & \mathbf{0} \\ C_{co} & \mathbf{0} & -I \end{bmatrix} < 0. \quad (25)$$

Así,  $[A_{c_i}, B_{c_i}, C_{c_i}, D_{c_i}]$  son las matrices que representan el controlador sintetizado en cada vértice del polítopo, donde:

$$\sum_{i=1}^{2^2} \xi_i(\rho) = 1, \quad \xi_i(\rho) > 0.$$

Dado que la planta generalizada (23) utilizada en el diseño del controlador LPV/ $\mathcal{H}_\infty$  no incorpora a la falla para dar robustez ante esta entrada desconocida, se requiere de un algoritmo de reconfiguración externo que acomode la desviación en la fuerza de amortiguamiento. Paralelamente, se busca comparar el desempeño de esta estrategia FTC activa con un FTC pasivo, cuya planta generalizada es similar que en (23) pero con:

$$\mathcal{B}_1 = \begin{bmatrix} B_{p2}W_{z_c} & B_{p3}W_{F_\delta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \text{ y } B_{p3} = \begin{bmatrix} B_F \\ 0 \end{bmatrix},$$

donde  $w = [\xi_r \ \hat{F}_\delta]$  es el vector de perturbaciones desconocidas,  $B_F$  es la matriz de falla en (4) y  $W_{F_\delta} = k_{F_\delta} \frac{w}{s+w}$  es un filtro pasa banda utilizado para contener una falla abrupta aditiva en  $F_{MR}$  de ganancia  $k_{F_\delta}$ . Es importante señalar que el orden del controlador aumentará por los estados añadidos en  $W_{F_\delta}$ . La Figura 4 muestra la estructura de diseño del controlador  $\mathcal{K}_{LPV}(\rho)$  con robustez a la falla (FTC pasivo) y sin robustez a la falla en la fuerza de amortiguamiento (i.e. el FTC activo requiere de un sistema de reconfiguración).

Por simplicidad, en el diseño del controlador LPV/ $\mathcal{H}_\infty$  no se estudió el caso de la presencia de una perturbación de fuerza  $\delta(t)$ , pero su manejo sería similar al de la perturbación  $\xi_r$ .

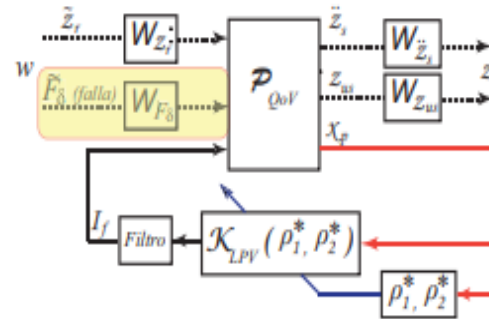


Figura 4: Diseño del controlador LPV robusto. El bloque sombreado muestra la adición de la falla en el diseño del controlador, para generar un FTC pasivo.

#### 4.2. Reconfiguración por compensación

El mecanismo de compensación propuesto utiliza la falla estimada  $\hat{F}_\delta$  para calcular la corriente eléctrica requerida para corregir el mal funcionamiento. Esta relación no-lineal está dada por la dinámica inversa del modelo de amortiguador MR en (2), tal que:

$$I_{FDD} = I_0 \cdot \tanh\left(\frac{F_\delta - b_1 \dot{z}_{def} - b_2 z_{def}}{I_0 \rho_1}\right) \in [-I_0, I_0], \quad (26)$$

donde la función tanh restringe la relación no-lineal (corriente eléctrica - fuerza  $F_{MR}$ ) alrededor de la corriente eléctrica promedio ( $I_0$ ), considerando los parámetros  $f_c = f_0$ ,  $b_1 = b_{10}$  y  $b_2 = b_{20}$  identificados de un experimento a condiciones de amortiguamiento pasivo (nominal).

La ecuación (26) representa la corriente eléctrica necesaria para eliminar la propagación de la falla en la dinámica vertical del vehículo; puesto que la falla considerada es de forma aditiva,  $I_{FDD}$  debe sustraer el efecto de la falla estimada  $\hat{F}_\delta$  (como una compensación negativa) en el sistema de lazo cerrado del cuarto de vehículo dado por (4). Puesto que la actuación sobre el amortiguador MR está saturada, la magnitud de la falla afecta directamente el ancho de banda de control, es decir, existe un límite de desviación en la fuerza de amortiguamiento que puede ser compensado.

La salida del controlador tolerante a fallas está compuesta por la salida del controlador robusto LPV ( $I_{LPV}$ ) y la compensación ( $I_{FDD}$ ) como:

$$I_{FTC} = I_{LPV} - I_{FDD}, \quad (27)$$

tal que  $B_F \cdot F_\delta - B_I \cdot I_{FDD} \sim 0$  para eliminar el efecto de la falla en el sistema de lazo cerrado, cuya dinámica está dada por:

$$\dot{x} = Ax + B_I \left[ \mathcal{K}_{LPV}(\rho)x - I_{FDD}(\hat{F}_\delta) \right] + B_F F_\delta + B_r z_r. \quad (28)$$

### 5. Resultados y Discusión

El sistema de suspensión de un cuarto de vehículo que se utilizó para analizar el desempeño del controlador propuesto, corresponde a la esquina frontal-izquierda de una camioneta comercial. Los parámetros de la suspensión se obtuvieron por una prueba experimental de cinemática sobre el vehículo, cuyo modelo fue generado en el simulador CarSim™. Los parámetros concentrados del cuarto de vehículo considerado son:  $m_s = 470$  Kg,  $m_{un} = 110$  Kg,  $k_s = 86,378$  N/m y  $k_t = 270,000$  N/m.

Utilizando la metodología de caracterización de amortiguadores MR propuesta en (Lozoya-Santos et al., 2012), se obtuvo un modelo experimental de la fuerza de amortiguamiento de acuerdo a (2) con  $F_\delta = 0$ , cuyos parámetros obtenidos son:  $f_c = 600.95$  N/A,  $a_1 = 37.85$  (N · s)/m,  $a_2 = 22.15$  N/m,  $b_1 = 2,830.86$  (N · s)/m y  $b_2 = -7,897.21$  N/m.

La Figura 5 muestra un diagrama de bloques del sistema de control tolerante a fallas evaluado en Matlab/Simulink™ usando CarSim™ como software-in-the-loop. Las señales de CarSim™ se utilizan para la estimación de la falla en línea de acuerdo a la metodología propuesta en la sección 3. La falla aditiva en la fuerza de amortiguamiento se puede interpretar como un sesgo de referencia en el sistema de control interno del amortiguador inteligente, por ejemplo, en un regulador PWM para un amortiguador MR. Dado que las señales del QoV de CarSim™ contemplan el efecto de acomplamiento con las fuerzas verticales de las otras tres esquinas (transferencia de carga), estas señales añaden un grado de incertidumbre de modelación y ruido durante la evaluación de desempeño del detector/estimador de fallas y del controlador tolerante a fallas.

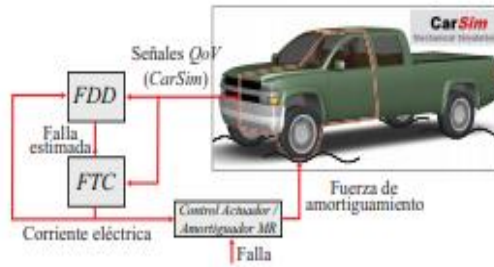


Figura 5: Diagrama de bloques del sistema de control propuesto, usando CarSim™ como software-in-the-loop.

#### 5.1. Desempeño del Detector y Estimador de Fallas

Dos escenarios de simulación han sido utilizados para evaluar el desempeño del módulo FDD:

1. Conducción del vehículo en línea recta a 30 Km/h. Perfil de camino compuesto por dos topes sucesivos de 0.1 m de altura a  $t = 0.6$  s y  $t = 3.7$  s, considerados como perturbaciones para el FDD, Figura 6(a). La falla implementada es un sesgo negativo abrupto en la fuerza de amortiguamiento a  $t = 1$  s, es decir,  $F_\delta = -1,000$  N que corresponde alrededor del 10% del rango de operación del amortiguador.
2. Conducción del vehículo en camino curvilíneo a 50 Km/h. Perfil de camino estándar ISO 8608 correspondiente a una autopista (tipo A), Figura 6(b). La falla implementada es un sesgo negativo gradual en  $F_{MR}$  a  $t = 1$  s con una pendiente de  $-50$  N/s.

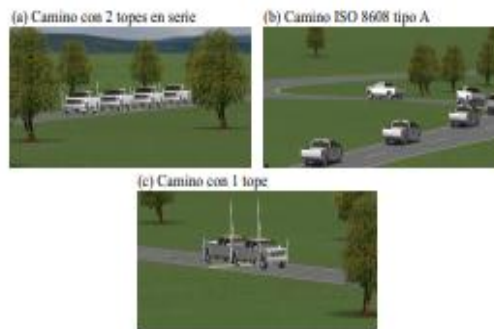


Figura 6: Pruebas de simulación en CarSim™ utilizadas en la evaluación del sistema FDD y FTC.

La Figura 7 muestra que la estimación de la falla es correcta; aunque es ligeramente sensible a la perturbación del camino, el estimador converge a la falla implementada sin importar el comportamiento de la misma. Considerando  $n = 4$  y  $m = 3$  de acuerdo a (8), se utilizó un horizonte  $s = 1$  (orden mínimo) para definir las relaciones de paridad en el módulo FDD. Puesto que las matrices  $\mathcal{H}$  y  $\mathcal{G}$ , son conocidas y dependen sólo de parámetros de un sistema mecánico, siempre se puede calcular

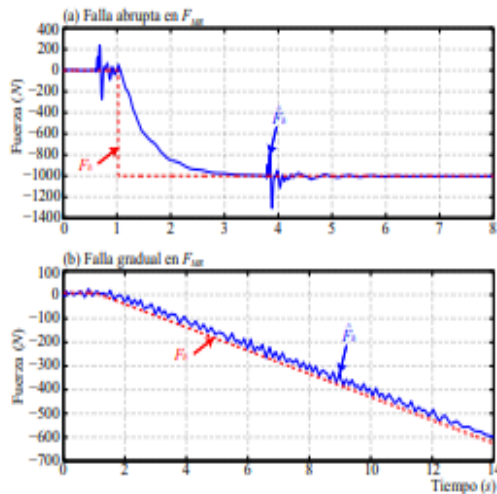


Figura 7: Estimación de una falla abrupta (a) y una falla gradual (b) en la fuerza de amortiguamiento.

la matriz de espacio nulo  $W$  y posteriormente  $W_2$  a través de la descomposición de valores singulares. No se garantiza un desacople perfecto sino el mejor desacople posible dado que  $W$  resulta de un problema de optimización. En este caso,

$$W = \begin{bmatrix} -22 & -6 & -4629 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 28 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } W_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para la falla abrupta, Figura 7(a), el detector toma alrededor de dos segundos en llegar a la estimación correcta, mientras que para la falla gradual, Figura 7(b), se observa un tiempo muerto menor de 1 segundo. La información obtenida por el FDD puede ser comparada con un umbral pre-definido para alertar al conductor sobre una falla en algún amortiguador. Mas aún, un sistema de control de la suspensión podría considerar esta estimación de falla para mantener el desempeño deseado en confort y/o agarre de superficie.

### 5.2. Desempeño del Controlador Tolerante a Fallas

Para evaluar el desempeño del FTC activo que se ha propuesto en la sección 4, respecto a un FTC pasivo y un amortiguador no-controlado, se implementaron dos escenarios de falla abrupta a  $t = 1$  s, cuando el vehículo viaja en línea recta a 30 Km/h y pasa por un bordo de 0.1 m de altura a  $t = 0.6$  s, Figura 6(c). La magnitud de los sesgos negativos abruptos fue de 300 N y 4,000 N.

Puesto que la ganancia del filtro  $W_{F_s}$  es  $k_{F_s} = 1,000$  N para el FTC pasivo, toda falla con magnitud mayor a  $k_{F_s}$  no podrá ser acomodada por el controlador robusto. La Figura 8(a) (acercamiento) muestra como ambos controladores tolerantes a fallas (pasivo y activo) pueden compensar el sesgo negativo abrupto de 300 N en la fuerza de amortiguamiento ocurrido en  $t = 1$  s, especialmente con mayor facilidad el FTC activo; mientras que el amortiguador no-controlado mantiene la falla de fuerza en toda la prueba. Sin embargo, cuando la falla en  $F_{MR}$  es mayor en magnitud a  $k_{F_s}$ , por ejemplo un sesgo negativo de 4,000 N,

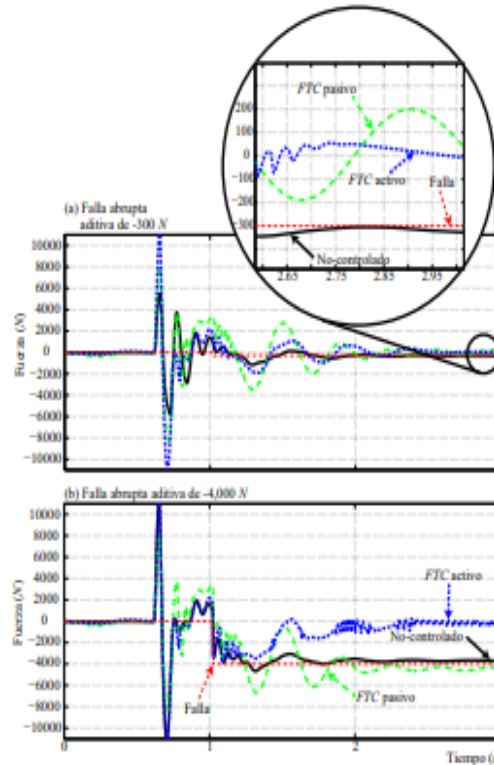


Figura 8: Desempeño del controlador FTC pasivo y FTC activo ante un sesgo negativo abrupto de: (a) 300 y (b) 4,000 N en la fuerza de amortiguamiento.

el FTC pasivo pierde insensibilidad ante la falla y por lo tanto la propagación de ésta tiene lugar. La Figura 8(b) muestra que el sistema FTC pasivo no logra compensar el sesgo de la fuerza de amortiguamiento, mientras que el controlador tolerante activo logra la compensación después de 1.3 s.

La Figura 9 muestra el efecto que tiene la falla de sesgo negativo abrupto de 4,000 N en  $F_{MR}$  sobre la dinámica vertical del QoV, cuando éste tiene un amortiguador MR no-controlado respecto a un amortiguador MR con tolerancia a fallos utilizando un FTC activo. Antes de que la falla sea implementada, los sistemas de suspensión con amortiguador controlado y no-controlado muestran el mismo movimiento vertical. Cuando la falla ocurre a  $t = 1$  s, la aceleración de la masa suspendida es reducida cuando se utiliza el FTC activo en el amortiguador semi-activo, Figura 9(a); las oscilaciones provocadas por el bordo en el camino son mayormente atenuadas. El confort de los pasajeros se incrementa en contraste con el amortiguador no-controlado, que pierde capacidad de amortiguamiento cuando ocurre la falla. Utilizando el valor cuadrático medio (RMS por sus siglas en inglés, *Root Mean Square*) de la aceleración vertical de la masa suspendida ( $\ddot{z}_s$ ), el sistema de suspensión tolerante a fallas presenta  $3.31$  m/s<sup>2</sup> respecto a  $6.68$  m/s<sup>2</sup> que presenta la suspensión con el amortiguador no-controlado, es decir, una mejora del 50.4 % en confort.

Similarmente, la Figura 9(b) muestra que la aceleración de

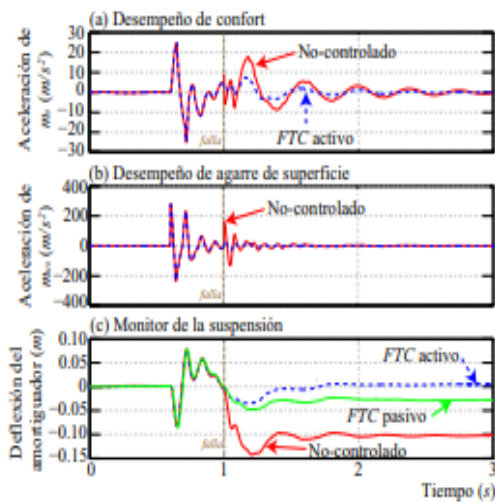


Figura 9: Comparación de desempeño del controlador *FTC* activo respecto a un amortiguador no-controlado. Respuesta transitoria del modelo de cuarto de vehículo.

la masa no suspendida es reducida cuando se acomoda la falla con el *FTC* activo. La disminución de las oscilaciones causa menor  $z_{ms}$  y consecuentemente menor deflexión entre la llanta y la superficie del suelo, es decir, se obtiene una mejora del 42.4 % en el índice de agarre de superficie (utilizando el *RMS* de  $z_{ms}$ ).

La Figura 9(c) muestra la deflexión entre las masas (suspendida y no suspendida), es decir, es un monitor del desplazamiento del pistón del amortiguador. El sistema de suspensión tolerante a fallas activo compensa el efecto del sesgo en menos de un segundo, mientras que el amortiguador no-controlado es claramente afectado por la falla, la posición de equilibrio del pistón del amortiguador disminuye cerca de 10 cm de su posición normal. Este cambio permanente de la posición de equilibrio del pistón del amortiguador no sólo afecta la capacidad de disipación de movimiento, sino que también pudiera afectar la vida del amortiguador puesto que ante perturbaciones de camino muy rugosas, el pistón del amortiguador está más propenso a llegar a sus límites de extensión y compresión. Por lo tanto, el *FTC* activo compensa la pérdida de efectividad del amortiguador *MR* y le permite comportarse como un actuador seguro.

Adicionalmente, la Figura 9(c) muestra el efecto que tiene la falta de compensación de la falla por parte del *FTC* pasivo. Puesto que la magnitud de la falla sobrepasa la ganancia del filtro de diseño del controlador robusto, el *FTC* pasivo no logra que el pistón del amortiguador llegue a su posición de equilibrio mostrando un sesgo de 4 cm. Para reducir este efecto, el filtro  $W_{F_s}$  de diseño debe contener la falla negativa abrupta de 4,000 N, lo que lo hace un diseño tolerante para un número de fallas en particular que se encuentren englobadas por  $W_{F_s}$ . La inclusión de todos los posibles escenarios de falla en el diseño del controlador es una limitante de un *FTC* pasivo.

Cabe señalar que aún el controlador *FTC* activo está limitado a la magnitud de la falla por la saturación inherente de

actuación del amortiguador semi-activo, es decir, una falla superior al 50 % del rango de operación podría limitar el ancho de banda del controlador.

## 6. Conclusiones

Un nuevo sistema de control tolerante a fallas se ha propuesto para una suspensión automotriz semi-activa. El diseño del controlador tolerante a fallas (*FTC* por sus siglas en inglés, *Fault Tolerant Controller*) está compuesto por dos módulos: (1) un detector y estimador de fallas en el amortiguador y (2) un controlador no-lineal orientado al confort y seguridad del pasajero. El *FTC* se considera activo porque utiliza la estimación de la falla en línea en un mecanismo de reconfiguración por compensación.

El estimador de fallas está diseñado para ser robusto a incertidumbres de modelación basándose en la teoría de ecuaciones de paridad. Mientras que el controlador no-lineal está basado en la teoría de control de sistemas de parámetros variantes lineales (*LPV* por sus siglas en inglés, *Linear Parameter-Varying*) con robustez  $\mathcal{H}_\infty$  a perturbaciones del camino e incertidumbres. Dos parámetros variantes se utilizan para representar la no-linealidad y saturación del amortiguador semi-activo. Ante una falla aditiva en la fuerza de amortiguamiento, el *FTC* propuesto calcula la corriente eléctrica necesaria para reducir el efecto de la falla adicionando esta señal de compensación a la salida del controlador *LPV*.

El *FTC* propuesto se validó en un modelo de cuarto de vehículo de una camioneta comercial, usando el simulador de *CarSim*<sup>TM</sup>. Resultados de simulación muestran la robustez del detector/estimador de fallas para representar una falla abrupta o gradual con insensibilidad a la perturbación del camino. Un amortiguador no-controlado se utilizó como referencia para analizar el desempeño del *FTC*, al implementar una falla abrupta de sesgo negativo de 4,000 N. Una vez que la falla es estimada, el *FTC* compensa el sesgo aditivo en la fuerza del amortiguador e incrementa el confort 50.4 % y el agarre de superficie un 42.4 %; además, el *FTC* propuesto mantiene la posición de equilibrio del pistón del amortiguador en su condición normal, lo que salvaguarda al amortiguador de llegar a sus límites de rebote y compresión.

Para resaltar el beneficio de implementar un *FTC* activo, se diseñó un *LPV-FTC* pasivo con robustez a la falla. Cuando la magnitud de la falla está contemplada en el diseño del controlador robusto, el *FTC* pasivo es insensible a ésta. Sin embargo, cuando la magnitud de la falla está fuera de diseño, el controlador *FTC* pasivo no puede compensar la propagación de la malfunción. Mientras que el *FTC* activo que se ha propuesto puede compensar cualquier falla aditiva en la fuerza de amortiguamiento, utilizando la estimación y mecanismo de compensación en línea. Una validación experimental del controlador propuesto se plantea como trabajo futuro.

Por diseño, el sistema *FTC* propuesto puede ser implementado en una suspensión automotriz con control de esquinas independientes, es decir, cada esquina actúa para objetivos particulares. Aunque este diseño de control ha demostrado resultados satisfactorios a lo largo de los años respecto a suspensio-

nes pasivas, se asume que la distribución de carga es simétrica. Una estrategia *FTC* que considera el efecto de la falla en la distribución de carga del vehículo, asegura el equilibrio de los movimientos del chasis en el centro de gravedad y consecuentemente en cada esquina como se plantea en (Tudón-Martínez et al., 2013b), sin embargo la complejidad de diseño es mayor al utilizar un modelo de vehículo completo.

### English Summary

#### Fault Tolerant Control in a Semi-Active Automotive Suspension

#### Abstract

A new active Fault Tolerant Controller (*FTC*) is proposed for an automotive semi-active suspension, by considering a quarter of vehicle model. The design is composed by: (1) a robust non-linear controller used to isolate vibrations into the vehicle caused by external disturbances and (2) a mechanism of compensation used to accommodate additive faults in the damping force. The compensation mechanism uses a robust fault detector, based on parity space, to estimate the fault; this information allows the computation of the compensation signal by using the inverse dynamics of a damper model to reduce the fault effect into the vertical dynamics of the suspension. The non-linear controller, based on the Linear Parameter-Varying (*LPV*) control theory, is designed to increase the passengers comfort and ensure the wheel-road contact. When a fault occurs in the damping force, the active *FTC* must hold the performances of comfort and road holding by using the interaction between the *LPV* controller and the compensatory module. Simulation results in *CarSim*<sup>TM</sup> show the effectiveness of the proposed active *FTC* versus a passive *FTC* and an uncontrolled damper; the passive *FTC* needs to include all faults into its design for having a good fault-tolerant capability, while the proposed active *FTC* improves a 50.4 % in comfort and 42.4 % in road holding when a fault occurs, in contrast with the uncontrolled damper that loses completely its effectiveness.

#### Keywords:

Fault tolerant control, fault detection, semi-active automotive suspension, parity space, *LPV* control.

#### Agradecimientos

Este trabajo fue parcialmente apoyado por el proyecto bilateral México-Francia CONACyT PCP 03/10 y el proyecto Francés INOVE ANR 2010 BLAN 0308.

#### Referencias

Apkarian, P., Gahinet, P., 1995. A convex characterization of gain scheduled  $H_2$  controllers. *IEEE Trans. on Automatic Control* 40 (5), 853–864.  
 Börner, M., Isermann, R., Schmitt, M., 2002. A sensor and process fault detection system for vehicle suspension systems. In: *SAE 2002 World Congress & Exhibition, USA*, technical paper: 2002-01-0135.

Chamseddine, A., Noura, H., 2008. Control and sensor fault tolerance of vehicle active suspension. *IEEE Trans. on Control Systems Tech.* 16, 416–433.  
 Chow, E., Willsky, A., 1984. Analytical redundancy and the design of robust failure detection systems. *IEEE Trans. on Automatic Control* 29 (7), 603–614.  
 Ding, S., 2008. *Model-based fault diagnosis techniques*. Springer, Berlin.  
 Do, A., Sename, O., Dugard, L., 2012. Ch.5 *LPV* modelling and control of semi-active dampers in automotive systems. *Control of linear parameter varying systems with applications* by Mohammadpour and Scherer. Springer.  
 Fergani, S., Sename, O., Dugard, L., 2014. A *LPV/Hinf* fault tolerant control of vehicle roll dynamics under semi-active damper malfunction. In: *Proc. of the American Control Conf. USA*, pp. 4482–4487.  
 Fischer, D., Börner, M., Schmitt, J., Isermann, R., 2007. Fault detection for lateral and vertical vehicle dynamics. *Control Eng. Practice* 15, 315–324.  
 Fischer, D., Isermann, R., 2004. Mechatronic semi-active and active vehicle suspensions. *Control Eng. Practice* 12, 1353–1367.  
 Gáspár, P., Szabó, Z., Bokor, J., 2012. *LPV* design of fault-tolerant control for road vehicles. *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.* 22, 173–182.  
 Guo, S., Yang, S., Pan, C., 2006. Dynamical modeling of magneto-rheological damper behaviors. *J. of Intell. Mater. Syst. and Struct.* 17, 3–14.  
 Hurel-Ezeta, J., Mandow, A., García-Cerezo, A., 2013. Los sistemas de suspensión activa y semi-activa: Una revisión. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial (RIAI)* 10, 121–132.  
 Kim, H., Lee, H., 2011. Fault-tolerant control algorithm for a four-corner closed-loop air suspension system. *IEEE Trans. on Ind. Electronics* 58, 4866–4879.  
 Kim, J., 2011. Sensor fault detection and isolation algorithm for a continuous damping control system. *J. of Automobile Eng.* 225, 1347–1364.  
 Lozoya-Santos, J., Morales-Menendez, R., Ramírez-Mendoza, R., Tudón-Martínez, J., Sename, O., Dugard, L., 2012. Magneto-rheological damper - an experimental study. *J. of Intell. Mater. Syst. and Struct.* 23, 1213–1232.  
 Manzone, A., Pincetti, A., Costantini, D., 2001. Fault tolerant automotive systems: An overview. In: *Proc. of the 7<sup>th</sup> Inter. On-Line Testing Workshop, Italy*, pp. 117–121.  
 Noura, H., Theilliol, D., Ponsart, J., Chamseddine, A., 2009. *Fault-tolerant control systems – Design and practical applications*. Springer.  
 Poussot-Vassal, C., Sename, O., Dugard, L., Gáspár, P., Szabó, Z., Bokor, J., 2008. A new semi-active suspension control strategy through *LPV* technique. *Control Eng. Practice* 16, 1519–1534.  
 Poussot-Vassal, C., Spelta, C., Sename, O., Savaresi, S., Dugard, L., 2012. Survey and performance evaluation on some automotive semi-active suspension control methods: A comparative study on a single-corner model. *Annual Reviews in Control* 36, 148–160.  
 Qiu, J., Ren, M., Zhao, Y., Guo, Y., 2011. Active fault-tolerant control for vehicle active suspension systems in finite-frequency domain. *IET Control Theory and Applications* 5, 1544–1550.  
 Scherer, C., Gahinet, P., Chilali, M., 1997. Multiobjective output-feedback control via *LMI* optimization. *IEEE Trans. on Automatic Control* 42, 896–911.  
 Shamma, J., 1988. *Analysis and design of gain scheduled control systems*. Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, Department of Mechanical Eng.  
 Shamma, J., 2012. Ch.1 An overview of *LPV* systems. *Control of linear parameter varying systems with applications* by Mohammadpour and Scherer, Springer.  
 Tudón-Martínez, J., Varrier, S., Morales-Menendez, R., Ramírez-Mendoza, R., Koenig, D., Martínez, J.-J., Sename, O., 2013a. Fault tolerant control with additive compensation for faults in an automotive damper. In: *Proc. of the 10<sup>th</sup> IEEE Int. Conf. on Networking, Sensing and Control, France*, pp. 810–814.  
 Tudón-Martínez, J., Varrier, S., Sename, O., Morales-Menendez, R., Martínez, J., Dugard, L., 2013b. Fault tolerant strategy for semi-active suspensions with *LPV* accommodation. In: *Proc. of 2<sup>nd</sup> Int. Conf. on Control and Fault Tolerant Systems, France*, pp. 631–636.  
 Varrier, S., Koenig, D., Martínez, J.-J., 2012. Robust fault detection for vehicle lateral dynamics. In: *Proc. of the 51<sup>st</sup> IEEE Conf. on Decision and Control, USA*, pp. 4366–4371.  
 Zhang, Y., Jiang, J., 2008. Bibliographical review on reconfigurable fault-tolerant control systems. *Annual Reviews in Control* 32, 229–252.

**Anexo 11**

**C. Polanco & J. Peña.** *Ensayo de Fatiga en Flexión Rotativa del Acero AISI-SAE 1018 por el Método Esfuerzo-Vida.* Tesis de grado, Escuela Politécnica Superior del Litoral 2011

**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL**

**Facultad de Ingeniería en Mecánica y Ciencias de la  
Producción**

“Ensayo de Fatiga en Flexión Rotativa del Acero AISI-SAE 1018 por  
el Método Esfuerzo-Vida”

**TESIS DE GRADO**

Previo a la obtención del Título de:

**INGENIERO MECÁNICO**

Presentada por:

Christian Andrés Polanco Pacheco

GUAYAQUIL-ECUADOR

Año: 2011

## **1.6. Ensayo de fatiga.**

Los primeros ensayos de fatiga los realizó Albert, en Alemania, y desde 1852 a 1869, Wöhler efectuó experimentos sobre esta propiedad construyendo los primeros dispositivos de ensayo y estableció lo que hoy se conoce como “zona límite de sollicitación de fatiga” o simplemente “zona de fatiga”.

Hacia el año 1900, Edwing, Rosenhain y Humfrey iniciaron el estudio del mecanismo de la fatiga con ayuda del microscopio metalográfico y demostraron que en los cristales de hierro que se habían sometido a sollicitaciones repetidas se formaban bandas de deslizamiento y grietas de fatiga.

Casi simultáneamente, Gilchrist sugirió la hipótesis de que la grieta de fatiga empieza como consecuencia de la localización de tensiones que sobrepasan la resistencia de rotura del material.[7]

### **1.6.1. Consideraciones sobre las probetas de ensayo.**

#### **Selección del material.**

Para la comprobación del funcionamiento correcto del dispositivo de ensayo se realizarán ensayos de laboratorio con probetas estandarizadas fabricadas en acero AISI 1018 (Apéndice 1) debido a que es un acero de bajo contenido de carbono llamado comercialmente “acero de transmisión” siendo este el acero más utilizado dentro del mercado ecuatoriano y que es muy utilizado en aplicaciones donde las cargas mecánicas no son muy severas pero con ciertos grados de tenacidad importantes como por ejemplo: pernos, tuercas, piezas de dispositivos pequeñas, ejes, bujes, pasadores, grapas, piñones, catarinas, tornillos sin fin, etc. Las propiedades mecánicas y el análisis químico típico según el fabricante se las puede observar en la Tabla 2 y 3 respectivamente mostrada a continuación:

TABLA 2

PROPIEDADES MECÁNICAS COMERCIALES

Esfuerzo de cedencia, $S_y$	Kg/mm <sup>2</sup>	Mínimo 31
Resistencia a la tracción, $S_{ut}$	Kg/mm <sup>2</sup>	51 - 71
Elongación	%	20
Reducción de área	%	57
Dureza	HB	163

TABLA 3

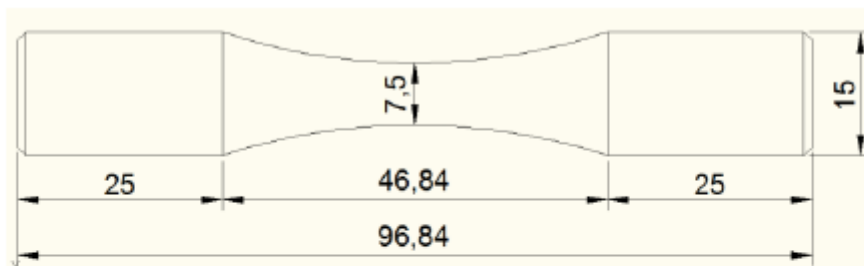
COMPOSICIÓN QUÍMICA COMERCIAL

C	Mn	P	S
0.15-0.20%	0.60-0.90%	0.040%	0.050%

**Geometría de las probetas de ensayo [8].**

Para obtener resultados válidos los ensayos de laboratorio se realizan con probetas estandarizadas según la norma ASTM E466 (Apéndice 2); los resultados obtenidos se podrán extrapolar a piezas reales empleando los coeficientes de corrección apropiados.

Las dimensiones de la probeta estandarizada se encuentran en la Figura 1.3, la cual tiene un diámetro de 7,5 mm en su parte central y un radio continuo mínimo de 75 mm entre los extremos; la probeta es simétrica tanto en sentido transversal como longitudinal y se obtiene mediante el proceso de torneado, la superficie de la probeta debe ser pulida para disminuir la presencia de imperfecciones superficiales para que de esta manera la probeta falle en su parte central.



**FIG. 1.12 DIMENSIONES DE LA PROBETA ESTANDARIZADA**



### **1.6.2. Planificación del ensayo [9].**

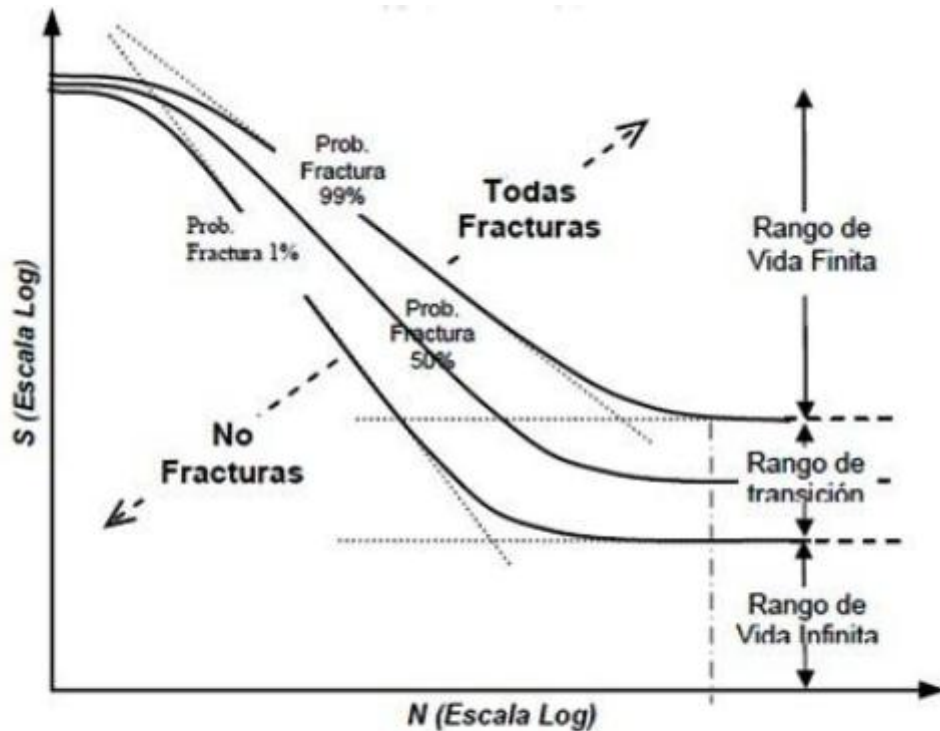
El paso clave en la planificación de un ensayo de fatiga especialmente en aquellos que involucran pocas probetas de ensayo, es definir claramente antes de las pruebas el objetivo que se quiere alcanzar. Ya que si se necesita que los resultados experimentales sean sólo preliminares, exploratorios o de alta confianza, cambian los objetivos y la metodología a seguir. De acuerdo con el “Manual on Statistical Planning and Analysis for Fatigue Experiments” se puede clasificar el tamaño de la muestra del ensayo en dos casos muy diferenciados entre sí, que se describen a continuación:

□ Caso 1, Forma “conocida” de la curva S-N: en la mayoría de las situaciones la forma básica de la curva S-N es conocida gracias a la información técnica disponible, libros, catálogos de materiales, etc. Por lo tanto es innecesario trazar punto a punto, espécimen a espécimen la gráfica S-N, por lo tanto utilizar cuatro a seis niveles de esfuerzo para realizar los ensayos es suficiente como se muestra en la Figura 1.13. El resto de las probetas deben utilizarse para asegurar la replicación de los niveles de esfuerzo previamente ensayados.

#### **Tamaño de la muestra.**

El mínimo número de probetas requeridas para elaborar la gráfica S-N depende del tipo de prueba conducida, según el “Manual on Statistical Planning and Analysis for Fatigue Experiments” las siguientes recomendaciones mostradas en la Tabla 4 son razonables.

Por lo tanto el número de ciclos hasta la rotura es una variables por lo tanto sería incorrecto hablar de una sola curva S-N, es más preciso considerar una familia de curvas percentiles S-N o curvas isoprobables S-N-P, que dividen la gráfica S-N en tres regiones diferenciadas, como se muestra en la Figura 1.15, y se describen a continuación.



**FIG. 1.15 CURVAS S-N-P [11].**

- Rango de vida finita. Región definida por encima de la curva del 99% de probabilidad de fractura. Los niveles de tensión asociados a esta zona corresponden a valores para los que siempre se produce la rotura de las probetas.
- Rango de vida infinita. La curva de 1% de probabilidad de fractura determina el llamado rango de vida infinita, ya que las probetas con niveles de tensión por debajo de éste valor de tensión no se rompen.
- Rango de Transición. Es la región entre los rangos de vida finita e infinita. En esta región se calcula el límite de resistencia a la fatiga, que se define como el valor de la tensión que lleva a un número de ciclos hasta la rotura de  $N_g$  ciclos (número de ciclos tecnológico), para la curva percentil mediana  $P_f = 0,5$ .

#### **Metodología de Maennig**

Para el análisis estadístico de los datos experimentales se ha seguido el método de Maennig aceptado internacionalmente y respaldado por muchos investigadores. Mediante esta metodología estadística se obtienen curvas S-N, incluyendo la probabilidad de fractura como un tercer parámetro y se evalúa en forma independiente el rango de transición y el rango de vida finita. [2, 12,13]

#### **Rango de transición [11].**

La evaluación del rango de transición necesita que se determine el número de ciclos  $N_g$  y se estudie cómo varía la probabilidad de fractura con respecto al esfuerzo aplicado. En la práctica,

se trata de evaluar de forma independiente SFL1 y SFL99, que representan los límites de resistencia a la fatiga del 1% y del 99%. Estos valores demarcan el rango de vida infinita y el rango de vida finita en la gráfica S-N-P.

Para encontrar estos límites de resistencia a la fatiga, SFL1 y SFL99, se aplican dos niveles de esfuerzo  $S_a$  y  $S_b$ , elegidos de tal manera que en el nivel de esfuerzo más bajo  $S_a$ , todas las probetas superen el nivel de ciclos  $N_g$  sin romperse mientras que en el nivel de carga mayor  $S_b$  se produzca el caso contrario, es decir que las probetas se rompan antes de alcanzar  $N_g$ . En este último nivel de esfuerzos, se establece una regla de “se rompe - no se rompe”, en el cual se contabilizan las probetas que se rompen antes  $N_g$  y las que sobrepasan a los ciclos  $N_g$  sin romperse. A cada nivel de esfuerzos se le asigna una probabilidad de fractura ( $P_f$ ).

$$P_f = 100 \frac{3r-1}{3N+1} \text{ si } r \neq 0 \quad (11)$$

$$P_f(R = 0) = 0.5P_f(R = 1) = \frac{100}{3N+1} \text{ si } r = 0 \quad (12)$$

Siendo  $r$  el número de probetas rotas y  $N$  el número total de probetas de cada nivel  $S_i$ . Con la pareja de puntos  $(S_a, P_f^a)$  y  $(S_b, P_f^b)$  se puede representar la probabilidad de fractura  $P_f$  frente a  $S$  (MPa), y se obtiene una curva en forma de S como se puede observar en la Figura 1.16.

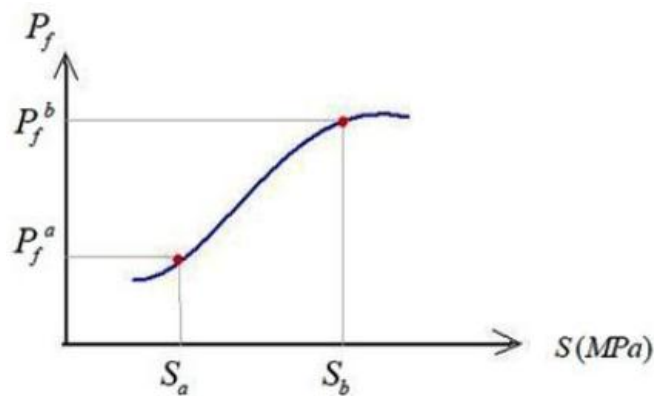


FIG. 1.16 GRÁFICA  $P_f$ - $S$  [4]

## Analytical and Experimental Studies on Fatigue Life Prediction of Steel and Composite Multi-leaf Spring for Light Passenger Vehicles Using Life Data Analysis

Mouleeswaran SENTHIL KUMAR<sup>1\*</sup>, Sabapathy VIJAYARANGAN<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Mechanical Engineering Department, PSG College of Technology, Coimbatore-641004, India

<sup>2</sup>Mechanical Engineering Department, Dr.Mahalingam College of Engineering & Technology, Pollachi-642103, India

Received 13 January 2007; accepted 06 May 2007

This paper describes static and fatigue analysis of steel leaf spring and composite multi leaf spring made up of glass fibre reinforced polymer using life data analysis. The dimensions of an existing conventional steel leaf spring of a light commercial vehicle are taken and are verified by design calculations. Static analysis of 2-D model of conventional leaf spring is also performed using ANSYS 7.1 and compared with experimental results. Same dimensions of conventional leaf spring are used to fabricate a composite multi leaf spring using E-glass/Epoxy unidirectional laminates. The load carrying capacity, stiffness and weight of composite leaf spring are compared with that of steel leaf spring analytically and experimentally. The design constraints are stresses and deflections. Finite element analysis with full bump load on 3-D model of composite multi leaf spring is done using ANSYS 7.1 and the analytical results are compared with experimental results. Fatigue life of steel leaf spring and composite leaf is also predicted. Compared to steel spring, the composite leaf spring is found to have 67.35 % lesser stress, 64.95 % higher stiffness and 126.98 % higher natural frequency than that of existing steel leaf spring. A weight reduction of 68.15 % is also achieved by using composite leaf spring. It is also concluded that fatigue life of composite is more than that of conventional steel leaf spring.

*Keywords:* composite multi leaf spring, E-glass/Epoxy, static analysis and fatigue life, ride comfort.

### 1. INTRODUCTION

In the present scenario, weight reduction has been the main focus of automobile manufactures. The suspension leaf spring is one of the potential items for weight reduction in automobiles as it accounts for ten to twenty percent of the unsprung weight, which is considered to be the mass not supported by the leaf spring. The introduction of composite materials made it possible to reduce the weight of the leaf spring without any reduction on the load carrying capacity and stiffness. Studies were conducted on the application of composite structures for automobile suspension system [1, 2]. A double tapered beam for automotive suspension leaf spring has been designed and optimized [3]. Composite mono leaf spring has also been analyzed and optimized [4].

The leaf spring should absorb the vertical vibrations and impacts due to road irregularities by means of variations in the spring deflection so that the potential energy is stored in spring as strain energy and then released slowly. So, increasing the energy storage capability of a leaf spring ensures a more compliant suspension system. According to the studies made [3, 4], a material with maximum strength and minimum modulus of elasticity in the longitudinal direction is the most suitable material for a leaf spring. Fortunately, composites have these characteristics [5].

Fatigue failure is the predominant mode of in-service failure of many automobile components. This is due to the

fact that the automobile components are subjected to variety of fatigue loads like shocks caused due to road irregularities traced by the road wheels, the sudden loads due to the wheel travelling over the bumps etc. The leaf springs are more affected due to fatigue loads, as they are a part of the unsprung mass of the automobile.

The fatigue behavior of Glass Fiber Reinforced Plastic (GFRP) epoxy composite materials has been studied in the past [6]. Theoretical equation for predicting fatigue life is formulated using fatigue modulus and its degrading rate. This relation is simplified by strain failure criterion for practical application. A prediction method for the fatigue strength of composite structures at an arbitrary combination of frequency, stress ratio and temperature has been presented [7]. These studies are limited to mono-leaf springs only.

In the present work, a seven-leaf steel spring used in passenger cars is replaced with a composite multi leaf spring made of glass/epoxy composites. The dimensions and the number of leaves for both steel leaf spring and composite leaf springs are considered to be the same. The primary objective is to compare their load carrying capacity, stiffness and weight savings of composite leaf spring. Finally, fatigue life of steel and composite leaf spring is also predicted using life data.

### 2. EXISTING STEEL LEAF SPRING

Design parameters of the existing seven-leaf steel spring used in this work includes: total length (eye-to-eye), 1150 mm; arc height at axle seat (camber), 175 mm; spring rate, 20 N/mm; number of full length leaves, 2; number of graduated leaves, 5; width of the leaves, 34 mm; thickness

\*Corresponding author. Tel.: +91-0422-2572177; fax: +91-422-2573833. E-mail address: [msenthil\\_kumar@hotmail.com](mailto:msenthil_kumar@hotmail.com) (M. Senthil kumar)

of the leaves, 5.5 mm; full bump loading, 3250 N; spring weight, 13.5 kg. This spring is symmetrical, so only one half is considered for the analysis to save the calculation time.

Experimental results from testing the steel leaf spring under full bump loading containing the stresses and deflections are listed in the Table 1.

**Table 1.** Stress analysis of steel leaf spring using experimental, analytical and FEM

Parameters	Experiment	Analytical	FEM
Load (N)	3250	3250	3250
Maximum stress (MPa)	680.05	982.05	744.32
Maximum deflection (mm)	155	133.03	134.67
Maximum stiffness (N/mm)	20.96	24.43	24.13

### 2.1 Finite element analysis of steel leaf spring

A stress analysis is performed using finite element method (FEM). All the calculations are done using the version 7.1 of ANSYS [8]. The finite element model for the leaf spring is two-dimensional [9]. A plane strain solution is obtained because of the high ratio of width to thickness of a leaf. The model is restrained to the right half part only because the spring is symmetric. The contact between leaves is emulated by interface elements. Nodes are created based on the values of co-ordinates calculated and each pair of coincident nodes is joined by the interface elements that simulate the action between the neighboring leaves. The element that is selected for this analysis is SOLID 42 [9], which behaves as the spring, and the interface elements CONTA174 and TARGE170 are used to represent contact and sliding between adjacent surfaces of leaves. An average coefficient of friction 0.03 is taken between surfaces [10].

The axle seat is assumed to be fixed and loading is applied at eye end. A finite element stress analysis is performed under full bump loading. Also, analytical solution is obtained out using the SAE standard design formulas for leaf springs [10]. The results of experimental, analytical and finite element methods are shown and compared in Table 1. Maximum normal stress  $\sigma_{11}$  from finite element analysis is compared to the experimental solution under full bump loading and has 8.63 % error. There is a good correlation for stiffness in all three methods.

### 3. COMPOSITE LEAF SPRING

The theoretical design details of composite mono-leaf spring are explained in many literatures. In some designs, width is fixed and in each section the thickness is varied hyperbolically so that it has minimum thickness at two edges and maximum thickness at the middle [3]. Another design in which the width and thickness are fixed from eyes to the middle of spring and towards the axle seat the width decreases hyperbolically and thickness increases

linearly has been presented [4]. In their design the curvature of spring and fiber misalignment in the width and thickness direction are neglected. A double tapered composite leaf spring has been designed and tested and optimized its size for minimum weight [11]. The mono-leaf spring is not easily replaceable on its catastrophic failure. Hence, in this work, a composite multi leaf spring is designed, fabricated and tested for its load carrying capacity and stiffness using a more realistic situation. Fatigue life is also predicted.

### 3.1. Material selection

Based on the specific strain energy of steel spring and some composite materials [4], the E-glass/epoxy is selected as the spring material. Many attempts have been made to substitute more economic resins for the epoxy but all attempts to use polyester or vinyl ester resins have been unsuccessful to date [1]. The stored elastic strain energy in a leaf spring varies directly with the square of maximum allowable stress and inversely with the modulus of elasticity both in the longitudinal and transverse directions according to:

$$S = \frac{1}{2} \frac{\sigma_a^2}{\rho E}, \quad (1)$$

where  $S$  is the strain energy,  $\sigma_a$  is the allowable stress,  $E$  is the modulus of elasticity and  $\rho$  is the density. E-glass/epoxy in the direction of fibers has good characteristics for storing strain energy. So, the unidirectional lay up along the longitudinal direction of the spring is selected which also helped in fabricating process using filament-winding machine. E-glass/epoxy is selected as the spring material having following mechanical properties: modulus of elasticity,  $E_{11}$ , 38.6 GPa and  $E_{22}$ , 8.27 GPa; modulus of shear,  $G_{12}$ , 4.14 GPa; Poisson ratio, 0.26; tensile strength,  $\sigma_{t11}$ , 1062 MPa; tensile strength,  $\sigma_{t22}$ , 31 MPa; compressive strength,  $\sigma_{c11}$ , 610 MPa; compressive strength,  $\sigma_{c22}$ , 118 MPa; and shear strength,  $\tau_{12}$ , 71 MPa.

### 3.2. Design and finite element analysis of composite leaf spring

The dimensions of the composite leaf spring are taken as that of the conventional steel leaf spring. The number of leaves is also the same for composite leaf spring. The design parameters selected are as follows: each composite leaf consists of 20 layers; thickness of a single layer is 0.275 mm; width of each leaf, fiber and resin is kept at 34 mm; thickness of each leaf, fiber and resin are 5.5 mm, 0.2 mm and 0.075 mm respectively. Since the properties of the composite leaf spring vary with the directions of the fiber, a 3-D model of the leaf spring (Fig. 1) is used for the analysis in ANSYS 7.1. The loading conditions are assumed to be static. The element chosen is SOLID46, which is a layered version of the 8-node structural solid element to model layered thick shells or solids [8]. The element allows up to 250 different material layers. To establish contact between the leaves, the interface elements CONTACT174 and TARGET170 are chosen.

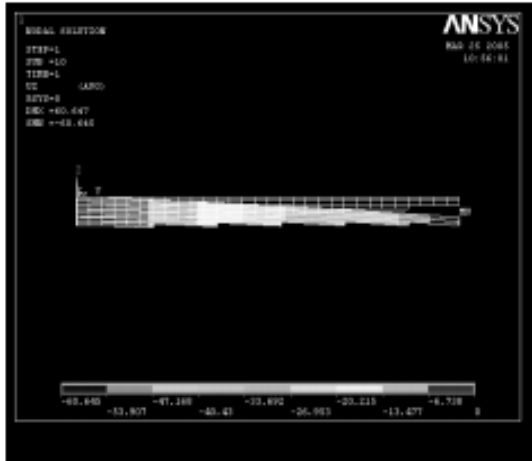


Fig. 1. FEM model of composite leaf spring

#### 4. STATIC TESTING AND RESULTS

The individual leaves are fabricated using a filament-winding machine. A fiber volume fraction of 0.6 is used. All individual leaves are assembled together using a center bolt and four side clamps. Also metal spring eyes are fixed at both the ends.

After the fabrication, the composite multi leaf spring was tested with the help of an electro-hydraulic leaf spring test rig. Steel leaf spring weighs 13.5 kg whereas composite leaf spring weighs only 4.3 kg. For a light passenger vehicle with a camber height of 175 mm, the static load to flatten the leaf spring is theoretically estimated to be 3250 N. Therefore a static vertical force of 3250 N is applied to determine the load-deflection curves (Fig. 2).

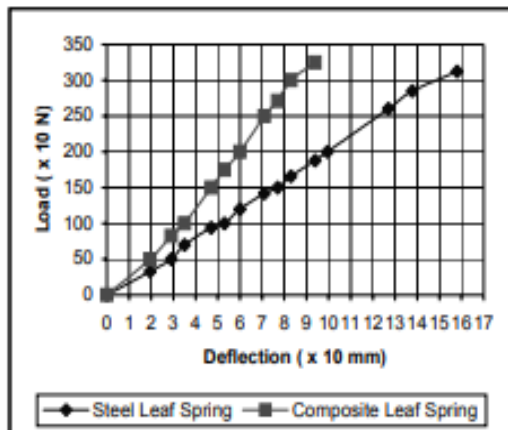


Fig. 2. Load-deflection curves for steel and composite leaf springs

During the full bump load test, the experimental stress measurement is carried out to verify the result of FEM analysis. The experimental results are shown in Fig. 3 and the maximum stress developed was found to be 222 MPa. FEM results show that the maximum stress developed is 217 MPa. It is found that the experimental results and FEM

results showed good agreement. E-glass/epoxy composite leaf spring has spring constants 34.57 N/mm - 53.59 N/mm. Thus, all the data of spring constants for composite leaf springs are greater than the design value, 20 N/mm.

The leaf spring is analysed under bending loading condition and the normal stresses are important. The longitudinal compression strength of composite used in this analysis is less than its longitudinal tensile strength, so failure criterion stress is longitudinal compression stress. Fig. 3 shows that the maximum longitudinal compression stress is about 222 MPa. At a same loading, the maximum stress developed in the steel leaf spring is about 680.05 MPa from Table 1. The compression strength of fiber glass/epoxy is 610 MPa and the yielding stress of the steel is 1175 MPa. So, the factor of safety in steel spring is 1.73 while in the composite spring it is 2.75. The deflection of spring under full bump loading is 94 mm (Fig. 2), which is less than the maximum value 175 mm, which shows 64.95 % increase in stiffness. Figs. 4 and 5 show the variation of longitudinal stress of experimental and FEM results for steel and composite leaf spring respectively. FEM and experimental results showed good agreement.

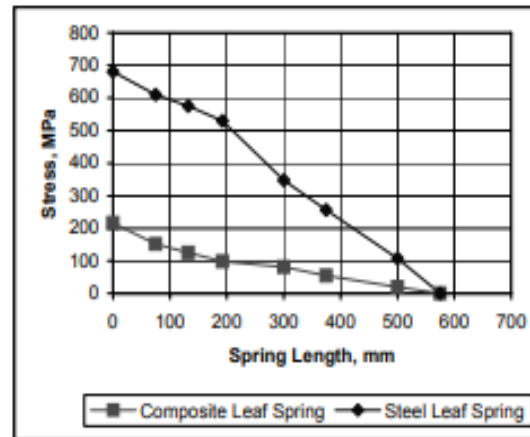


Fig. 3. Variation of experimental stress of steel and composite springs

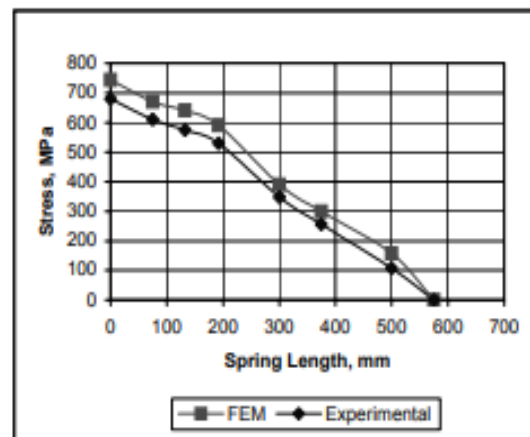


Fig. 4. Variation of longitudinal stress of steel leaf spring

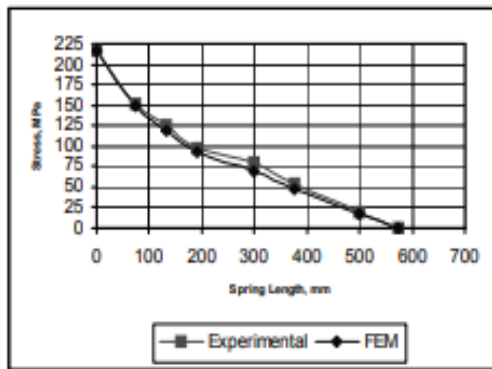


Fig. 5. Variation of longitudinal stress of composite leaf spring

## 5. PASSENGER RIDE COMFORT

The leaf spring of light passenger vehicles has to be designed in such a way that its natural frequency is maintained to avoid resonance condition with respect to road frequency to provide good ride comfort. The road irregularities usually have the maximum frequency of 12 Hz [3]. Therefore the leaf spring should be designed to have a natural frequency, which is away from 12 Hz to avoid the resonance (poor ride comfort zone). The first natural frequency of the steel leaf spring is found to be 6.3 Hz whereas that of composite leaf spring is 14.3 Hz. It is found that the first natural frequency of composite leaf spring is nearly 1.2 times the maximum road frequency and therefore resonance will not occur. Therefore it is obvious that composite leaf spring provides improved ride comfort.

## 6. FATIGUE ANALYSIS

The main factors that contribute to fatigue failures include number of load cycles experienced, range of stress and mean stress experienced in each load cycle and presence of local stress concentrations. Testing of leaf springs using the regular procedure consumes a lot of time. Hence SAE [10] suggests a procedure for accelerated tests, which give quick results, particularly for steel leaf springs. The results of the accelerated tests can be extrapolated to get the actual fatigue life under normal working conditions. Following the procedure outlined by the references [10, 12], fatigue tests were conducted on steel and composite leaf springs.

### 6.1. Fatigue life of steel leaf spring

Fatigue life calculation of steel leaf spring is given as follows: stroke available in fatigue testing machine, 0 mm – 200 mm; initial deflection of the spring, 100 mm; initial stress (measured by experiment), 420 MPa; final deflection of the spring (camber), 175 mm; maximum stress in the final position (measured by experiment), 805 MPa. Fatigue life cycles predicted for steel leaf spring is less than 1000,000 cycles by the procedure outlined in [10].

### 6.2. Fatigue life of composite leaf spring

A load is applied further from the static load to maximum load with the help of the electro-hydraulic test

rig, up to 3250 N (175 mm deflection), which is already obtained in static analysis. The test rig is set to operate for a deflection of 75 mm. This is the amplitude of loading cycle, which is very high. The frequency of load cycle is fixed at 33 mHz, as only 20 strokes/min is available in the test rig used. This leads to high amplitude low frequency fatigue test.

The maximum and minimum stress values obtained at the first cycle of the composite leaf spring are 222 MPa and 133 MPa respectively. As the cycles go on increasing, the stress settling is happening only after 25000 cycles. These maximum and minimum operating stress values are 240 MPa and 140 MPa respectively. Because of very low stress level, the fatigue life of the composite leaf spring is very high under simulated conditions.

### 6.2.1. Life data analysis

Life data analysis [13] which is a statistical approach is used to make predictions about the life of composite leaf springs by fitting a statistical distribution to life data from representative sample units. For the GFRP leaf spring, the life data is measured in terms of the number of cycles to fail for the four leaf springs and are presented in Table 2.

Table 2. Number of cycles to failure for composite leaf spring

Leaf spring No.	Cycles to fail	Stress level
1	10,800	0.65
2	6,950	0.65
3	19,240	0.65
4	14,350	0.65

### 6.2.2. Life time distribution

Weibull life distribution model is selected which has previously been used successfully for the same or a similar failure mechanism. The Weibull distribution is used to find the reliability of the life data and it helps in selecting the particular data that is to be used in life prediction model. The Weibull distribution uses two parameters 'b' and 'θ' to estimate the reliability of the life data. 'b' is referred to as shape parameter and 'θ' is referred to as scale parameter.

The reliability of Weibull distribution is given by

$$R(t) = 1 - \exp(-x/\theta)^b, \quad (2)$$

where,  $x$  is the life;  $b$  is the Weibull slope or 'shape' parameter and  $\theta$  is the characteristic life or 'scale' parameter.

The parameters of the Weibull distribution are calculated using probability plotting [13]. The life cycles of leaf spring are arranged in increasing order and the median rank is calculated using the Equation (3) and are shown in Table 3.

$$\text{Mediarank} = 100 \cdot (j - 0.3) / (N + 0.4), \quad (3)$$

where,  $j$  is the order number and  $N$  is the total quantity of sample.

The value of  $\theta$  is found to be 14,600 cycles. The reliability of the life data is calculated and shown in Table 4. It is found that the reliability of 3<sup>rd</sup> GFRP spring is higher than that of other leaf springs and the fatigue life

data of 3<sup>rd</sup> GFRP spring has been considered for fatigue life prediction.

**Table 3.** Median rank of composite leaf springs

Order No.	Cycles to fail	Median rank
1	6,950	15.9
2	10,800	38.5
3	14,350	61.4
4	19,240	84.1

**Table 4.** Reliability of fatigue life data

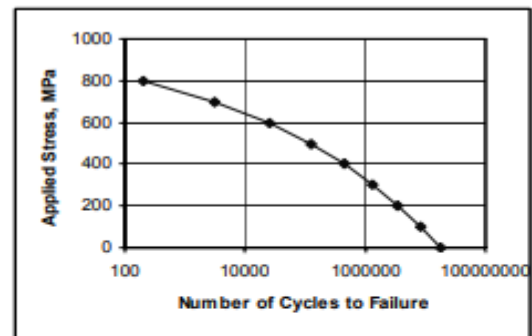
Leaf spring No.	Life (cycles)	Median rank	Reliability (%)
1	10,800	38.5	43
2	6,950	15.9	39
3	19,240	84.1	73
4	14,350	61.4	62.7

The fatigue test is conducted up to 20000 cycles and it is examined that no crack initiation is visible. The details of test results at 0 and 20000 cycles are as follows: maximum load cycle range, 1850 N – 3250 N; amplitude, 75 mm; frequency, 33 mHz; spring rate, 27.66 N/mm; maximum operating stress, 240 MPa; minimum operating stress, 140 MPa and time taken 17 h. The experimental results are available only up to 20000 cycles. With no crack initiation, there is a necessity to go for analytical model for finding number of cycles to failure from analytical results. Hwang and Han [6] have developed an analytical fatigue model to predict the number of fatigue cycles to failure for the components made up of composite material. They have proposed two constants in their relation on the basis of experimental results. It is proved that the analytical formula predicts the fatigue life of component with E-glass/epoxy composite material. Hwang and Han relation:

$$N = \{B(1-r)\}^C, \quad (4)$$

where,  $N$  is the number of cycles to failure;  $B = 10.33$ ;  $C = 0.14012$ ;  $r = \sigma_{\max}/\sigma_u$ ;  $\sigma_{\max}$  is the maximum stress;  $\sigma_u$  is the ultimate tensile strength and  $r$  is the applied stress level. Equation (4) is applied for different stress levels and fatigue life is calculated for the composite leaf spring. The results are obtained based on the analytical results and the resulting S-N graph is shown in Fig. 6. From Fig. 6, it is observed that the composite leaf spring, which is made up of E-glass/epoxy is withstanding more than 10 Lakh cycles under the stress level of 0.24.

The test is conducted for nearly 17 hours to complete 20000 cycles. The variations in stress level are reduced to very low level after 20000 cycles. There is no crack initiation up to 20000 cycles. The stress level of 0.24 is obtained from experimental analysis. This is very much helpful for the determination of remaining number of cycles to failure using fatigue model [6]. According to this fatigue model, the failure of the composite leaf spring



**Fig. 6.** S-N curve for composite leaf spring

takes place only after 10 Lakh cycles. Since the composite leaf spring is expected to crack only after 10 Lakh cycles, it is required to conduct the leaf spring fatigue test up to 10 Lakh cycles for finding type and place of crack initiation and propagation. For completing full fatigue test up to crack initiation with the same frequency, nearly 830 hours of fatigue test is required.

## 7. CONCLUSIONS

Design and experimental fatigue analysis of composite multi leaf spring using glass fibre reinforced polymer are carried out using life data analysis. Compared to steel spring, the composite leaf spring is found to have 67.35 % lesser stress, 64.95 % higher stiffness and 126.98 % higher natural frequency than that of existing steel leaf spring. The conventional multi leaf spring weighs about 13.5 kg whereas the E-glass/epoxy multi leaf spring weighs only 4.3 kg. Thus the weight reduction of 68.15 % is achieved. Besides the reduction of weight, the fatigue life of composite leaf spring is predicted to be higher than that of steel leaf spring. Life data analysis is found to be a tool to predict the fatigue life of composite multi leaf spring. It is found that the life of composite leaf spring is much higher than that of steel leaf spring.

## Acknowledgments

This work is carried out as part of the research project sponsored by Defense Research and Development Organisation (DRDO), India. The authors are grateful for the financial support by DRDO.

## REFERENCES

1. **Breadmore, P., Johnson, C. F.** The Potential for Composites in Structural Automotive Applications *Composite Science and Technology* 26 1986: pp. 251 – 281.
2. **Daugherty, R. L.** Composite Leaf Springs in Heavy Truck Applications *International Conference on Composite Materials. Proceedings of Japan – US Conference, Tokyo* 1981: pp. 529 – 538.
3. **Yu, W. J., Kim, H. C.** Double Tapered FRP Beam from Automotive-Suspensions Leaf Spring *Composite Structures* 9 1988: pp. 279 – 300.



**Anexo 13**

**V. Chacón Hernando**, *Diseño de una suspensión para un vehículo automóvil basada en amortiguadores magneto-reológicos*, Bachelor's thesis, Escuela Politécnica Superior de la Universidad Carlos III de Madrid 2010

**ESCUELA POLITECNICA SUPERIOR DE LA UNIVERSIDAD  
CARLOS III DE MADRID**



**DISEÑO DE UNA SUSPENSIÓN PARA UN  
VEHÍCULO  
AUTOMÓVIL BASADA EN  
AMORTIGUADORES MAGNETO-  
REOLÓGICOS**

**INGENIERIA TÉCNICA INDUSTRIAL ESPECIALIDAD MECÁNICA  
PROYECTO FIN DE CARRERA  
DPTO. DE INGENIERIA MECÁNICA**

**Autor: Víctor Chacón Hernando**

**Tutora: Dra. Dña. M<sup>o</sup>Jesús Lopez Boada**

**Directora: Dra. Dña. Beatriz Lopez Boada**

### **5.1. Introducción a los elementos finitos**

El método de los elementos finitos ha adquirido una gran importancia en la solución de problemas ingenieriles, físicos, etc., debido a que permite resolver casos que hasta hace poco tiempo eran prácticamente imposibles de resolver por métodos matemáticos tradicionales. Esta circunstancia obligaba a realizar prototipos, ensayarlos e ir realizando mejoras de forma iterativa, lo que traía consigo un elevado coste tanto económico como en tiempo de desarrollo [32, 33, 34, 35, 36].

El MEF es una herramienta de cálculo muy potente que permite al ingeniero resolver infinidad de problemas. Sin embargo, es un método que no proporciona la solución "exacta" a un problema dado, sino que, en realidad, posibilita obtener una solución aproximada que, desde el punto de vista ingenieril, puede ser suficiente para la resolución de un problema práctico.

La idea general del método de los elementos finitos es la división de un "sólido" sometido a un sistema de cargas y coaccionado por unas ligaduras, en un conjunto de pequeños elementos interconectados por una serie de puntos llamados nodos. De manera que se supone que, el campo de desplazamientos en el interior de cada elemento, puede expresarse en función de los desplazamientos que sufren los nodos del elemento (desplazamientos nodales).

El método de los elementos finitos supone, para solucionar el problema, el dominio discretizado en subdominios denominados elementos. El dominio se divide mediante puntos (en el caso lineal), mediante líneas (en el caso bidimensional) o superficies (en el caso tridimensional) imaginarias, de forma que el dominio total en estudio se aproxime mediante el conjunto de porciones (elementos) en que se subdivide. Los elementos se definen por un número discreto de puntos, llamados nodos, que conectan entre sí los elementos. Sobre estos nodos se materializan las incógnitas fundamentales del problema.

El sistema, debido a las condiciones de contorno: empotramiento, fuerza puntual y temperatura, evoluciona hasta un estado final. En este estado final, conocidos los valores de los grados de libertad de los nodos del sistema se puede determinar cualquier otra incógnita deseada: tensiones, deformaciones.

Planteando la ecuación diferencial que rige el comportamiento del continuo para el elemento, se llega a fórmulas que relacionan el comportamiento en el interior del mismo con el valor que tomen los grados de libertad nodales. Este paso se realiza por medio de unas funciones llamadas de interpolación, que realizan la interpolación del valor de la variable nodal dentro del elemento.

Actualmente el método se encuentra en una fase de gran expansión; es ampliamente utilizado en la industria y continúan apareciendo cientos de trabajos de investigación en este campo. Los ordenadores han aportado el medio eficaz de resolver la multitud de ecuaciones que se plantean en el método de elementos finitos, cuyo desarrollo práctico ha ido caminando parejo de las innovaciones obtenidas en el campo de la arquitectura de los ordenadores. Entre éstas, además de permitir la descentralización de los programas de elementos finitos, ha contribuido a favorecer su uso a través de sofisticados paquetes gráficos que facilitan el modelado y la síntesis de resultados. Hoy en día ya se concibe la conexión inteligente entre las técnicas de análisis estructural, las técnicas de diseño (CAD), y las técnicas de fabricación.

En la figura 5-4 se muestra la estructura modelizada una vez que se ha realizado todo el proceso de mallado.

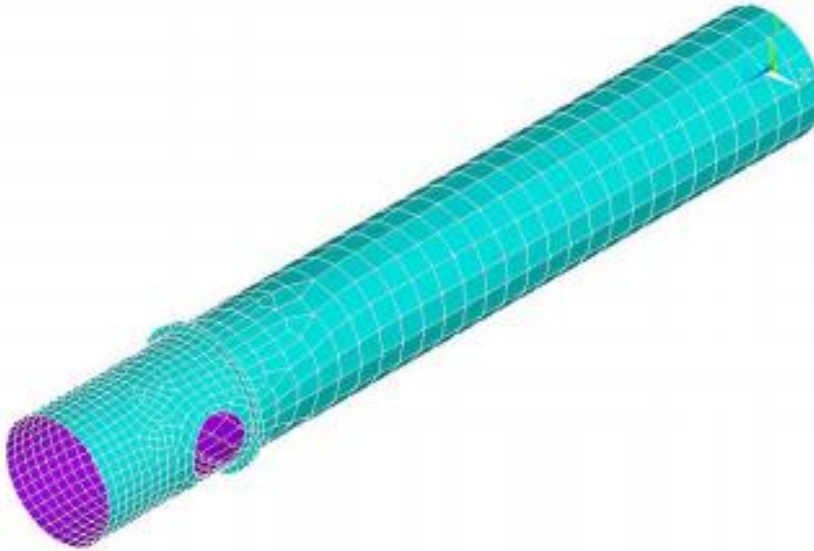


Figura 5-4. Vista de la estructura mallada

Con esta forma de mallado, se consigue que solo 43 de 1233 elementos de la malla tengan que cambiar la geometría indicada al programa. Esto supone un error de un 3,487%, que se considera aceptable en este tipo de análisis mediante elementos finitos.

En la figura 5-5 se muestra un detalle de la zona donde no se ha podido utilizar una malla cuadrada debido a la geometría de la pieza.

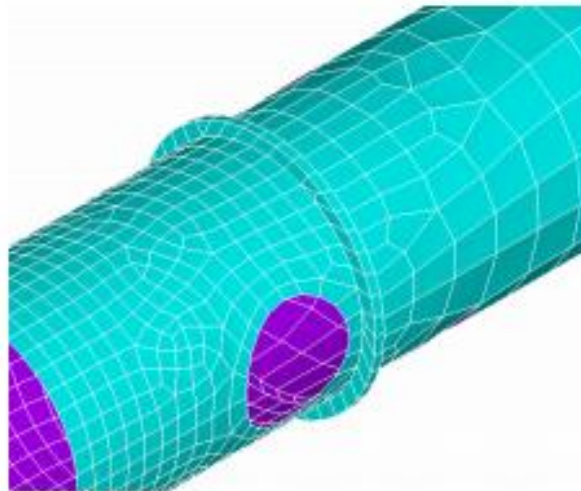


Figura 5-5. Detalle de la zona mallada no cuadrada

#### 5.2.4. Condiciones de contorno

Las condiciones de contorno son las variables conocidas del problema y que condicionan al mismo. Estas variables pueden ser: cargas, desplazamientos, temperaturas, voltaje, focos de calor, etc. Dichas variables permiten evolucionar al sistema hasta un estado final.

En este estado final, conocidos los valores de los grados de libertad de los nodos del sistema, se puede determinar cualquier otra incógnita deseada: tensiones, deformaciones, etc. También es posible obtener la evolución temporal de cualquiera de los grados de libertad.

Antes de obtener la solución al sistema de ecuaciones planteado es necesario imponer las condiciones de desplazamientos nodales que sean conocidas. El sistema resultante se puede subdividir en dos términos: uno que contenga los desplazamientos impuestos y otro las incógnitas. Resolviendo este sistema se tiene la solución.

En los programas de elementos finitos es tanto igual de importante, una vez decididas las condiciones de contorno, estudiar la forma de aplicar las mismas, para que se representen las condiciones reales del problema.

Todo ello hace que la imposición de las condiciones de contorno apropiadas sea una de las decisiones más complejas a la hora de realizar este tipo de análisis mediante elementos finitos.

#### Desplazamientos

Al estudiar la funcionalidad de la pieza, se puede comprobar que el extremo inferior no tiene ningún tipo de movimiento, al estar sujeta en la maneta de la rueda. Esto hace que se pueda considerar que la pieza está empotrada en dicho extremo.

En el extremo opuesto, parte superior de la estructura, el amortiguador magneto-reológico es introducido dentro de la propia estructura, lo que impide el desplazamiento en las direcciones "x" e "y".

En Ansys, hay que definir en qué elemento se aplica la condición de contorno. Como se trabaja con elementos tipo placa, la condición de contorno se debe aplicar en la línea donde se quiere restringir el movimiento.

Los pasos para crear el empotramiento y las restricciones de movimiento en los ejes "x" e "y" se expresan a continuación:

- Define load ->Apply -> Structural ->Displacement ->ON line -> Señalar las líneas -> señalar la coacción deseada.

Para realizar el empotramiento se debe elegir la opción "ALL DOF", mientras que para impedir los desplazamientos hay que escoger las opciones "UX" y "UY", estas opciones impiden el desplazamiento en el eje "x" y en el eje "y", respectivamente.

En la figura 5-6 se muestra las condiciones de contorno impuestas a la pieza. En el lado izquierdo se muestra las coacciones impuestas en la parte superior y en el lado derecho se muestra el empotramiento impuesto en la parte inferior de la pieza.

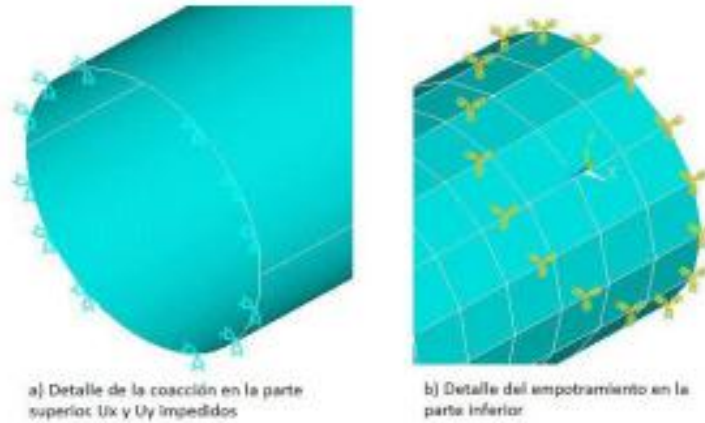


Figura 5-6. Coacciones impuestas en la pieza

### Fuerzas y cargas

Al estudiar las cargas que se producen en el prototipo, se observan dos cargas totalmente distintas. Por un lado, está la fuerza ejercida por el amortiguador magneto-reológico, esta fuerza es transmitida por el tornillo inferior del conjunto a la estructura que se está estudiando.

La carga ejercida por el tornillo pasante se modeliza con una fuerza sobre los nodos 641 y 692, ver figura 5-7, teniendo en cuenta que las fuerzas se definen positivas cuando van en la misma dirección de los ejes coordenados.

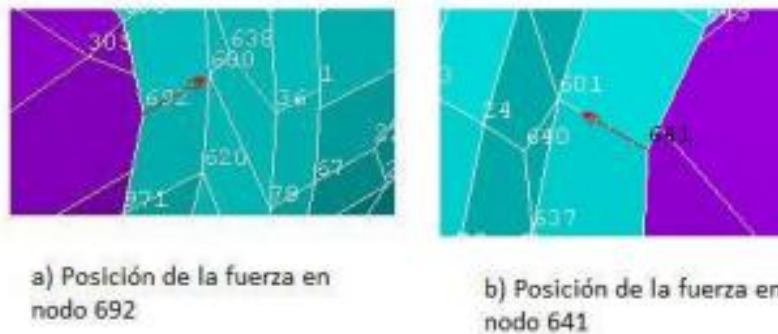


Figura 5-7. Detalle de la posición de las fuerzas en los nodos

Para introducir las cargas en la estructura hay que seguir los pasos siguientes:

- Define load -> Apply -> Structural -> Force/momento -> Nodos -> introducir valor de la carga.

Anexo 14

**D. J. L. H Ezeta,, D. A Mandow & D. A. J. G Cerezo.** *Modelado analítico y control inteligente de un sistema de suspensión activa para un cuarto de vehículo.* Tesis Doctoral, Universidad de Málaga 2013



DPTO. INGENIERÍA DE SISTEMAS Y AUTOMÁTICA

TESIS DOCTORAL

MODELADO ANALÍTICO Y CONTROL  
INTELIGENTE DE UN SISTEMA DE  
SUSPENSIÓN ACTIVA PARA UN  
CUARTO DE VEHÍCULO

PRESENTADA POR:

D. JORGE L. HUREL EZETA

DIRIGIDA POR:

DR. D. ANTHONY MANDOW

DR. D. ALFONSO J. GARCÍA CEREZO

2013

# 4

---

## DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS EQUIVALENTES PARA UN MODELO DE UN CUARTO DE VEHÍCULO DE LA SUSPENSIÓN MCPHERSON

---

### Índice

---

4.1	Introducción . . . . .	71
4.2	Los modelos de un cuarto de vehículo . . . . .	73
4.2.1	El modelo lineal de un cuarto de vehículo . . . . .	73
4.2.2	El modelo de un cuarto de vehículo de la suspensión McPherson . . . . .	74
4.3	Determinación de los parámetros equivalentes para una suspensión McPherson . . . . .	77
4.3.1	Determinación de la rigidez equivalente del resorte . . . . .	77
4.3.2	Determinación del coeficiente equivalente de amortiguamiento . . . . .	80
4.4	El caso de estudio . . . . .	82
4.4.1	Discusión sobre los parámetros equivalentes . . . . .	83
4.4.2	Análisis comparativo . . . . .	85
4.5	Conclusiones . . . . .	91

---

4.1 introducción El diseño del control en un sistema de suspensión activa y semiactiva requiere de un modelo analítico simple pero eficaz [66, 71, 170]. La obtención de dicho modelo para la suspensión McPherson es relevante por su amplia presencia en los vehículos comerciales [37, 111]. Sin menoscabo de que los modelos analíticos para el análisis cinemático y dinámico, como el propuesto en el capítulo 3, permiten una simulación en tiempo real sustancialmente más rápida que los modelos multicuerpo, aún pueden considerarse demasiado complejos para aplicaciones donde sea suficiente un análisis dinámico, como en el diseño del sistema de control. Por este motivo, el modelo lineal o convencional constituye, a pesar de su simplicidad, una representación adecuada para analizar la dinámica vertical [5, 7, 78]. Además, su formulación analítica es conveniente para el diseño del controlador [3, 15, 32, 42, 66, 81, 170]. No obstante, un modelo confiable de la suspensión McPherson tiene como problema incorporar los efectos de su geometría [39, 110, 135, 166]. En consecuencia, se han propuesto modelos con parámetros equivalentes para mejorar el modelo lineal incorporando las características

geométricas a través de la rigidez del resorte y del coeficiente de amortiguamiento [11, 41, 161, 202]. Así, el modelo de Matschinsky utiliza los conceptos de razón reducida del resorte y del amortiguador, para una suspensión independiente tipo “eje oscilante”[114]. Estos parámetros son determinados gráficamente en base a un diagrama de velocidades que considera la geometría del mecanismo. Por otra parte, para identificar los parámetros equivalentes de sistemas multicuerpo se han aplicado técnicas de reducción de modelos más complejas [31, 45, 84]. Adicionalmente, el método analítico propuesto por Balike et al. [12] para analizar una suspensión de doble brazo oscilante, utiliza el concepto de la razón de instalación, relacionando ya sea la deflexión del resorte con el desplazamiento de la rueda o sus correspondientes fuerzas, considerando únicamente el caso de una rigidez lineal del resorte de la suspensión. Este capítulo propone una determinación analítica de los parámetros equivalentes en un modelo de un cuarto de vehículo para una suspensión McPherson. Las ecuaciones matemáticas están basadas en los conceptos de la razón de instalación y el centro instantáneo de rotación, para considerar resortes con una rigidez lineal y no lineal. Así mismo, con este desarrollo se determinan los cambios en la rigidez equivalente del resorte y en el coeficiente equivalente de amortiguamiento, que el sistema de suspensión experimenta durante los movimientos de impacto y rebote de la rueda. Además, mediante el programa

Adams/View se genera un modelo bidimensional de referencia para analizar el comportamiento dinámico de los modelos equivalente y lineal. El resto del capítulo se organiza de la siguiente manera: Los modelos de un cuarto de vehículo y las ecuaciones correspondientes del movimiento se realizan en la sección 4.2. La determinación de los parámetros equivalentes para una suspensión McPherson se desarrolla en la sección 4.3. Un análisis comparativo de los modelos equivalente, lineal (convencional) y Adams/View para una suspensión McPherson se efectúa en la sección 4.4. Las conclusiones se discuten en la sección 4.5.

#### 4.2 los modelos de un cuarto de vehículo

En este apartado, se revisa el sistema de suspensión para un cuarto de vehículo representado por los modelos lineales, McPherson y equivalente. A partir del centro instantáneo de rotación del mecanismo, se establecen las relaciones geométricas que permiten la determinación de los parámetros equivalentes.

##### 4.2.1 El modelo lineal de un cuarto de vehículo

La figura 4.1a muestra el modelo lineal de un cuarto de vehículo, el cual representa la suspensión como un sistema dual de masa-resorte-amortiguador con dos grados de libertad, como es descrito en el apéndice A [66, 78]. Las leyes de Newton aplicadas al diagrama de fuerzas de este modelo simplificado (Figura 4.1b), genera un sistema de dos ecuaciones diferenciales acopladas de segundo orden dado por:



$$M_2 \ddot{Z}_2 + B_2(\dot{Z}_2 - \dot{Z}_1) + K_2(Z_2 - Z_1) = 0, \quad (4.1)$$

$$M_1 \ddot{Z}_1 - B_2(\dot{Z}_2 - \dot{Z}_1) - K_2(Z_2 - Z_1) + K_1(Z_1 - Z_r) = 0. \quad (4.2)$$

Este modelo lineal se utiliza bajo las siguientes consideraciones [78]:

- Las masas suspendida y no suspendida experimentan un movimiento vertical.
- Todos los elementos del sistema de suspensión son rígidos, excepto el neumático.

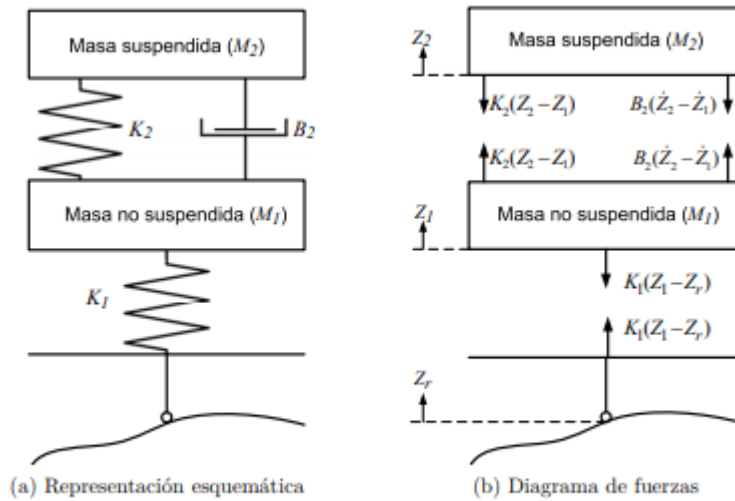


Figura 4.1: El modelo lineal de un cuarto de vehículo.

- Todas las uniones se consideran ideales.
- Los resortes y amortiguadores tienen un comportamiento lineal.

#### 4.2.2 El modelo de un cuarto de vehículo de la suspensión McPherson

La figura 4.2 muestra una variante del modelo presentado en el capítulo 3 para la suspensión McPherson y el modelo equivalente respectivo. Las masas suspendida y no suspendida son consideradas masas puntuales y están localizadas en los puntos M y C. Otros puntos claves en la geometría de la suspensión son la unión Q entre el chasis y el brazo de control y la unión P entre el brazo de control y el puntal McPherson. El sistema cartesiano de referencia global tiene su origen en Q, con sus ejes Y y Z alineados con las direcciones horizontal y vertical, respectivamente. Por lo tanto, los puntos Q y M son fijos, mientras que C y P cambian con respecto a sus coordenadas de equilibrio  $(Y_{C0}, Z_{C0})$  y  $(Y_{P0}, Z_{P0})$ , respectivamente. En consecuencia, el segmento MP experimenta una deflexión  $\delta l$  con respecto al estado de equilibrio.

#### 4.2 LOS MODELOS DE UN CUARTO DE VEHÍCULO

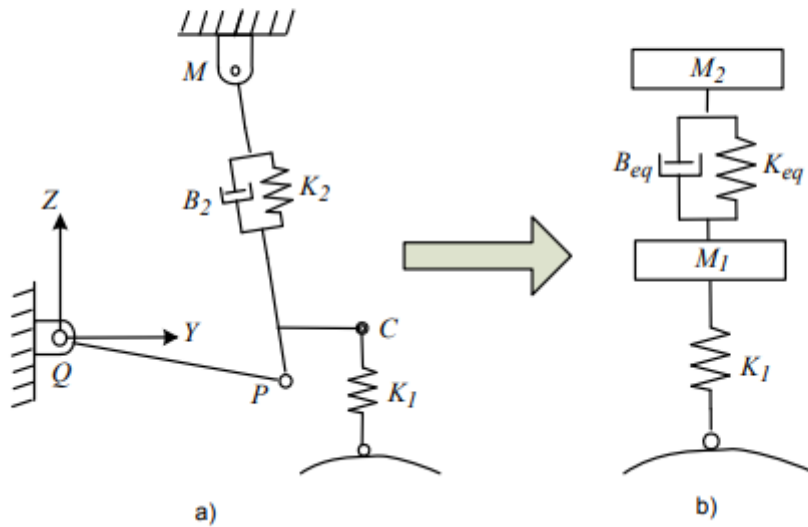


Figura 4.2: Representación esquemática de los modelos de un cuarto de vehículo: a) La suspensión McPherson; b) El modelo equivalente.

Como resultado de la configuración McPherson, el movimiento de la masa no suspendida es una composición de movimientos de traslación y rotación. Esta rotación no puede ser considerada en el modelo lineal. En una suspensión McPherson el cambio en la posición y orientación del brazo de control, determina el movimiento relativo entre el conjunto de la rueda y el chasis. Este movimiento de la rueda está caracterizado por su centro instantáneo de rotación R (ver figura 4.3), el cual se determina por la intersección de una línea perpendicular al puntal pasando a través del punto M y otra línea a lo largo del brazo de control. Las ecuaciones de estas rectas son:

$$Z_R - Z_M = \frac{Z_P - Z_M}{Y_P - Y_M} (Y_R - Y_M), \quad (4.3)$$

$$Z_R - Z_M = \frac{Y_P - Y_M}{Z_P - Z_M} (Y_R - Y_M), \quad (4.4)$$

Donde  $(Y_i, Z_i)$  denotan las coordenadas globales de un punto dado  $i$ . Entonces, la solución de las ecuaciones (4.3) y (4.4) proporciona las coordenadas globales de R:

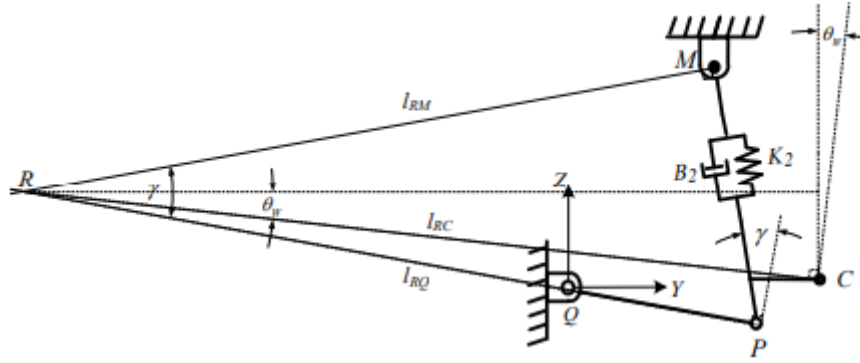


Figura 4.3: Centro instantáneo de rotación para una suspensión McPherson

$$Y_R = \frac{Y_P[(Z_P - Z_M)Z_M + (Y_P - Y_M)Y_M]}{(Z_P - Z_M)Z_P + (Y_P - Y_M)Y_P}, \quad (4.5)$$

$$Z_R = \frac{Z_P[(Z_P - Z_M)Z_M + (Y_P - Y_M)Y_M]}{(Z_P - Z_M)Z_P + (Y_P - Y_M)Y_P}. \quad (4.6)$$

El ángulo  $\gamma$  entre las líneas establecidas por las ecuaciones (4.3) y (4.4), se determina usando la definición del producto punto de dos vectores:

$$\gamma = \cos^{-1} \left( \frac{(Y_P - Y_R)(Y_M - Y_R) + (Z_P - Z_R)(Z_M - Z_R)}{l_{RM} l_{RP}} \right), \quad (4.7)$$

donde  $l_{RM}$  y  $l_{RP}$  representan las longitudes de los segmentos  $RM$  y  $RP$ , respectivamente. Además, el ángulo de la perpendicular a  $RC$  con respecto al eje vertical  $\theta_W$  está relacionado geoméricamente a  $R$  con:

$$\theta_W = \tan^{-1} \left( \frac{Z_C - Z_R}{Y_C - Y_R} \right). \quad (4.8)$$

### 4.3 determinación de los parámetros equivalentes para una suspensión mc pherson

La incorporación de parámetros mecánicos que tienen en cuenta la estructura geométrica de la suspensión mejoran el modelo lineal de un cuarto de vehículo. En esta sección se realiza un desarrollo analítico para determinar la rigidez equivalente del resorte  $K_{eq}$  y el coeficiente equivalente de amortiguamiento  $B_{eq}$ , que actúan verticalmente en el centro de la rueda [114, 161]. Las expresiones para el modelo equivalente, se obtienen mediante la sustitución de estos parámetros en el modelo lineal de un cuarto de vehículo (ver figura 4.2). Así, las ecuaciones (4.1) y (4.2) se pueden escribir como:

$$M_2 \ddot{Z}_2 + B_{eq}(\dot{Z}_2 - \dot{Z}_1) + K_{eq}(Z_2 - Z_1) = 0 \quad (4.9)$$

$$M_1 \ddot{Z}_1 - B_{eq}(\dot{Z}_2 - \dot{Z}_1) - K_{eq}(Z_2 - Z_1) + K_1(Z_1 - Z_r) = 0. \quad (4.10)$$

El método propuesto para el cálculo de  $K_{eq}$  y  $B_{eq}$  para un modelo lineal de un cuarto de vehículo se basa en el concepto de la razón de instalación, que relaciona la deflexión de la suspensión con el desplazamiento de la rueda o la fuerza en la suspensión con la fuerza en la rueda [41].

#### 4.3.1 Determinación de la rigidez equivalente del resorte

El centro instantáneo de rotación R actúa como un punto virtual de reacción para las fuerzas de la suspensión (véase la figura 4.4). El sistema en un instante dado experimenta una rotación pura alrededor de este punto. En consecuencia, la fuerza tangencial  $F_{PT}^s$  actuando sobre el brazo de control en P y la fuerza del resorte  $F_{SP}$  están relacionadas por:

$$F_{PT}^s = F_{SP}^s \cos(\phi_1 + \phi_2) = F_{SP}^s \cos \gamma. \quad (4.11)$$

Asimismo, en el punto C actúa la fuerza equivalente del resorte  $F_{SC}$  y la fuerza tangencial correspondiente  $F_{CT}^s$ , vinculadas por

$$F_{CT}^s = F_{SC}^s \cos \theta_w. \quad (4.12)$$

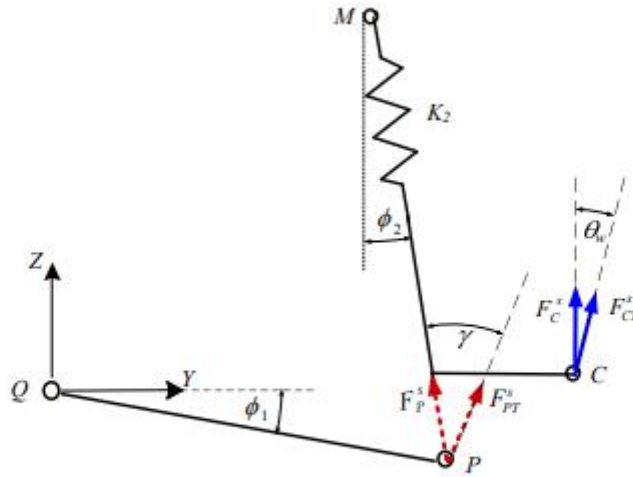


Figura 4.4: Esquema de fuerzas en la suspensión para determinar la fuerza equivalente del resorte  $F_C^s$

Además, igualando los momentos con respecto al centro instantáneo se obtiene la siguiente relación:

$$F_{CT}^s l_{RC} = F_{PT}^s l_{RP} \Rightarrow \frac{F_{CT}^s}{F_{PT}^s} = \frac{l_{RP}}{l_{RC}}. \quad (4.13)$$

Un movimiento diferencial alrededor del punto R implica una trayectoria circular para los puntos P y C. Entonces, los desplazamientos respectivos  $\delta s_{PT}$  y  $\delta s_{CT}$  se definen en términos de la deflexión de la suspensión  $\delta l$  y del desplazamiento vertical de la rueda  $Z_1$ :

$$\frac{l_{RP}}{l_{RC}} = \frac{\delta s_{PT}}{\delta s_{CT}} = \frac{\delta l \cos \gamma}{Z_1 \cos \theta_W}. \quad (4.14)$$

La combinación de las ecuaciones (4.11)–(4.14) permite determinar la relación entre las fuerzas del resorte y la rueda mediante:

$$F_C^s = \frac{\delta l}{Z_1} \left( \frac{\cos \gamma}{\cos \theta_W} \right)^2 F_P^s = \rho_s F_P^s, \quad (4.15)$$

Donde  $\rho_s$  se define como el factor de geometría del resorte:

$$\rho_s = \frac{\delta l}{Z_1} \left( \frac{\cos \gamma}{\cos \theta_W} \right)^2. \quad (4.16)$$

En un resorte lineal la deformación producida es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza aplicada, por lo que:

$$F_C^s = K_{eq} Z_1, \quad y \quad F_P^s = K_2 \delta l. \quad (4.17)$$

La sustitución de la ecuación (4.17) en la ecuación (4.15) proporciona la expresión para la rigidez equivalente de un resorte lineal:

$$K_{eq} = \left( \frac{\delta l \cos \gamma}{Z_1 \cos \theta_W} \right)^2 K_2. \quad (4.18)$$

La ecuación (4.18) indica que la geometría del sistema determina el valor de  $K_{eq}$  en función del cuadrado de la razón de instalación del resorte  $i_s$  [114]:

$$i_s = \frac{\delta l \cos \gamma}{Z_1 \cos \theta_W}. \quad (4.20)$$

Así, para una suspensión McPherson con un resorte lineal,  $i_s$  se expresa como:

$$i_s = \frac{\delta l \cos \gamma}{Z_1 \cos \theta_W}. \quad (4.20)$$

Alternativamente, es posible obtener una solución más general para  $K_{eq}$  al eliminar la restricción de comportamiento lineal del resorte. Ahora, en lugar de la ecuación (4.17), la rigidez del resorte se define en términos de la derivada de la fuerza con respecto al desplazamiento:

$$K_2 = \frac{dF_P^s}{d\delta l}, \quad y \quad K_{eq} = \frac{dF_C^s}{dZ_1}, \quad (4.21)$$

Así, diferenciando la ecuación (4.15) con respecto a  $Z_1$

$$\frac{dF_C^s}{dZ_1} = \rho_s \frac{dF_P^s}{dZ_1} + F_P^s \frac{d\rho_s}{dZ_1}. \quad (4.22)$$

Posteriormente, al reemplazar las definiciones de la ecuación (4.21) en la ecuación (4.22):

$$K_{eq} = \rho_s \frac{dF_P^s}{d\delta l} \frac{d\delta l}{dZ_1} + F_P^s \frac{d\rho_s}{dZ_1}, \quad (4.23)$$

$$K_{eq} = \rho_s K_2 \frac{d\delta l}{dZ_1} + F_P^s \frac{d\rho_s}{dZ_1}. \quad (4.24)$$

El primer término en la ecuación (4.24) corresponde a una relación con la estructura geométrica y el segundo término da la variación del factor de geometría del resorte con respecto al movimiento de las ruedas. La derivada de la ecuación (4.16) con respecto a  $Z_1$  puede ser escrita como:

$$\frac{d\rho_s}{dZ_1} = \left( \frac{\cos \gamma}{\cos \theta_W} \right)^2 \frac{d}{dZ_1} \left( \frac{\delta l}{Z_1} \right) + \frac{\delta l}{Z_1} \frac{d}{dZ_1} \left( \frac{\cos \gamma}{\cos \theta_W} \right)^2, \quad (4.25)$$

$$\frac{d\rho_s}{dZ_1} = \rho_s \left( \frac{1}{\delta l} \frac{d\delta l}{dZ_1} - \frac{1}{Z_1} + 2 \tan \theta_W \frac{d\theta_W}{dZ_1} - 2 \tan \gamma \frac{d\gamma}{dZ_1} \right). \quad (4.26)$$

Entonces, el reemplazo en la ecuación (4.24) de las ecuaciones (4.16) y (4.26), produce la expresión general para la rigidez equivalente del resorte dada por:

$$K_{eq} = \frac{\delta l}{Z_1} \left( \frac{\cos \gamma}{\cos \theta_W} \right)^2 \left[ \frac{d\delta l}{dZ_1} K_2 + F_P^s \left( \frac{1}{\delta l} \frac{d\delta l}{dZ_1} - \frac{1}{Z_1} + 2 \tan \theta_W \frac{d\theta_W}{dZ_1} - 2 \tan \gamma \frac{d\gamma}{dZ_1} \right) \right]. \quad (4.27)$$

### 4.3.2 Determinación del coeficiente equivalente de amortiguamiento

De manera similar, la expresión para  $B_{eq}$  se encuentra considerando R como un punto virtual de reacción (ver figura 4.5). Para este caso, en el punto P sobre el brazo de control actúan la fuerza del amortiguador  $F_{dP}$  y la fuerza tangencial  $F_{dPT}$ . Mientras, en el punto C se tiene la fuerza equivalente de amortiguamiento  $F_{dC}$  y la fuerza tangencial  $F_{dCT}$  correspondiente.

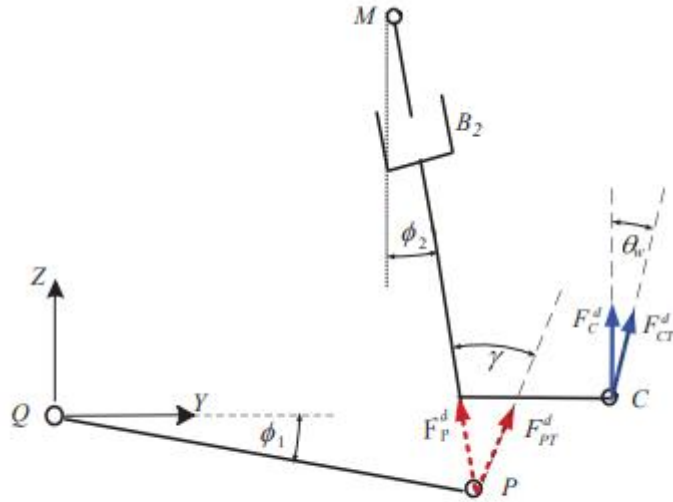


Figura 4.5: Esquema de fuerzas en la suspensión para determinar la fuerza equivalente del amortiguador  $F_C^d$

La velocidad tangencial  $v_{PT}$  del brazo de control en P y la velocidad de deflexión  $\dot{\delta}l$  se relacionan con:

$$v_{PT} = \dot{\delta}l \cos \gamma. \quad (4.28)$$

Por otra parte, la velocidad tangencial  $v_{CT}$  en C está en función de la velocidad vertical de la rueda  $\dot{Z}_1$  por:

$$v_{CT} = \dot{Z}_1 \cos \theta_W. \quad (4.29)$$

El balance de potencias entre el amortiguador de la suspensión y el correspondiente amortiguador equivalente en el punto C da:

$$F_{CT}^d v_{CT} = F_{PT}^d v_{PT}. \quad (4.30)$$

Por consiguiente, la sustitución de las ecuaciones (4.28) y (4.29) en la ecuación (4.30), proporciona la fuerza equivalente de amortiguamiento:

$$F_C^d = \frac{\dot{\delta}l}{\dot{Z}_1} \left( \frac{\cos \gamma}{\cos \theta_W} \right)^2 F_P^d = \rho_d F_P^d, \quad (4.31)$$

donde  $\rho_d$  es el factor de geometría del amortiguador. Además, la fuerza es proporcional a la velocidad relativa en amortiguadores lineales:

$$F_P^d = B_2 \dot{\delta}l, \quad \text{y} \quad F_C^d = B_{eq} \dot{Z}_1. \quad (4.32)$$

Las definiciones de la ecuación (4.32) son reemplazadas en la ecuación (4.31), para obtener la expresión de  $B_{eq}$ :

$$B_{eq} = \left( \frac{\delta l \cos \gamma}{Z_1 \cos \theta_W} \right)^2 B_2 \quad (4.33)$$

$$B_{eq} = i_d^2 B_2. \quad (4.34)$$

La ecuación (4.34) indica que el coeficiente equivalente de amortiguamiento depende de la geometría del sistema, en términos del cuadrado de la razón de instalación del amortiguador  $i_d$ .

#### 4.4 el caso de estudio

En esta sección se presenta un caso de estudio representativo, donde se determinan los parámetros equivalentes para una suspensión McPherson. Además, el comportamiento dinámico de los modelos equivalente, lineal y Adams es analizado para una misma perturbación del camino. Un conjunto representativo de los parámetros mecánicos para el modelo de un cuarto de vehículo se da en [12]:  $M_2 = 439.4$  kg,  $M_1 = 42.3$  kg,  $K_2 = 38\,404.0$  N m<sup>-1</sup>,  $B_2 = 3593.4$  N s m<sup>-1</sup> y  $K_1 = 310\,000$  N m<sup>-1</sup>. Por otra parte, los valores de los puntos claves de la suspensión McPherson (ver tabla 4.1) se han tomado de [50].

Tabla 4.1: Los puntos claves de una suspensión McPherson para la posición de equilibrio [m].

$Y_{C0} = 0,4279$	$Z_{C0} = 0,0388$	$Y_Q = 0,0000$	$Z_Q = 0,0000$
$Y_M = 0,2049$	$Z_M = 0,5249$	$Y_{P0} = 0,2490$	$Z_{P0} = -0,0608$

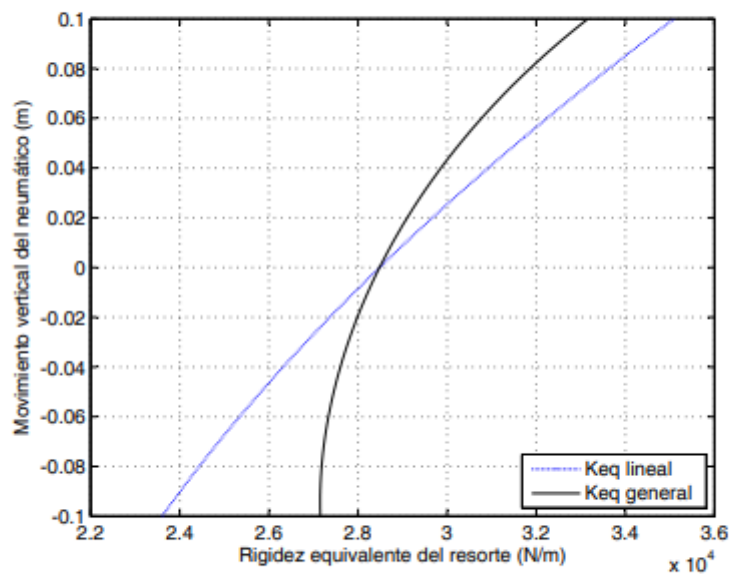


Figura 4.6: Variación de la rigidez equivalente del resorte con el movimiento del neumático

##### 4.4.1 Discusión sobre los parámetros equivalentes

La figura 4.6 muestra la rigidez equivalente del resorte con respecto al desplazamiento vertical de la rueda. Estos valores son calculados utilizando las ecuaciones (4.18) y (4.27) considerando la definición lineal y diferencial para la rigidez del resorte, respectivamente. En ambos casos, la variación de los parámetros geométricos provoca cambios en la rigidez del resorte con respecto



a  $Z_1$ . Además, las curvas muestran la asimetría del resorte durante las fases de compresión y tracción y sugieren una dependencia significativa del factor de

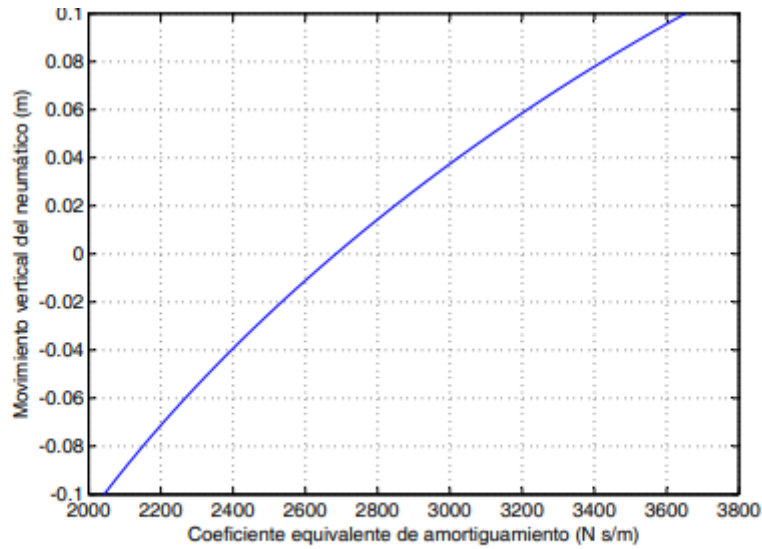


Figura 4.7: Variación del coeficiente equivalente de amortiguamiento con el movimiento del neumático

geometría del resorte con los cambios en la posición de la rueda. También, la rigidez equivalente exhibe una diferencia máxima del 13,1 % entre la definición lineal y diferencial para la rigidez del resorte. Comúnmente, el modelo lineal de un cuarto de vehículo se linealiza alrededor de la posición de equilibrio  $Z_1 = 0$  m. Entonces, este punto proporciona los valores de los parámetros para el modelo equivalente [12]. Para la rigidez equivalente del resorte, la figura 4.6 muestra en esta posición un valor único de  $K_{eq} = 28\,484.65$  N m<sup>-1</sup>. Además, en la figura 4.7 generada a partir de la ecuación (4.33), se aprecia el efecto del desplazamiento vertical en el coeficiente equivalente de amortiguamiento. El valor para la posición de equilibrio es  $B_{eq} = 2684.62$  N s m<sup>-1</sup> y nuevamente es notable la asimetría del sistema.

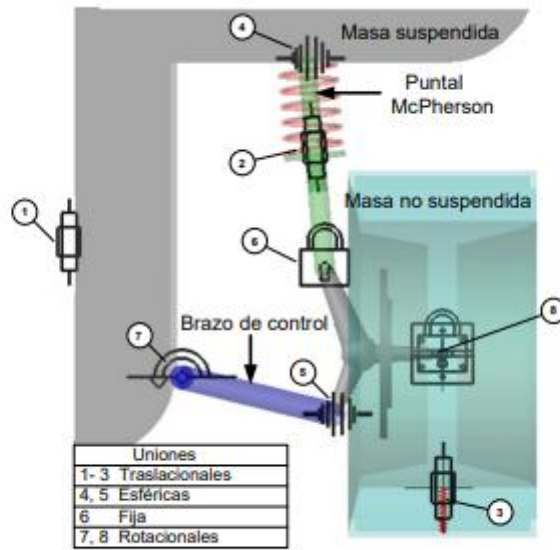


Figura 4.8: Modelo en Adams de la suspensión McPherson.

$$e_1 = |Z_{2_{Adams}} - Z_{2_{eq}}|, \quad y \quad e_2 = |Z_{2_{Adams}} - Z_{2_{lineal}}|, \quad (4.35)$$

$$e_3 = |Z_{2_{Adams}} - Z_{2_{eq}}|, \quad y \quad e_4 = |Z_{2_{Adams}} - Z_{2_{lineal}}|. \quad (4.36)$$

Donde  $e_1$  y  $e_3$  representan los errores del modelo equivalente y  $e_2$  y  $e_4$  corresponden a los errores del modelo lineal.

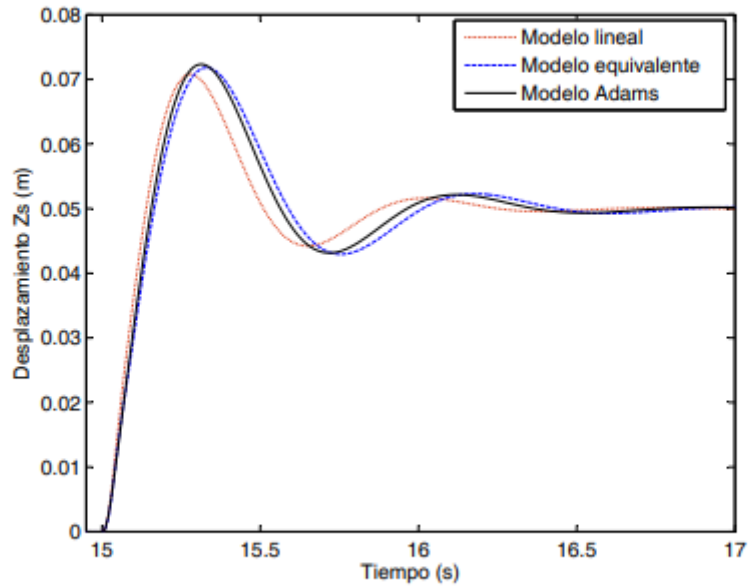


Figura 4.9: Desplazamiento de la masa suspendida en los modelos lineal, equivalente y Adams, para un obstáculo al tiempo  $t = 15$  s.

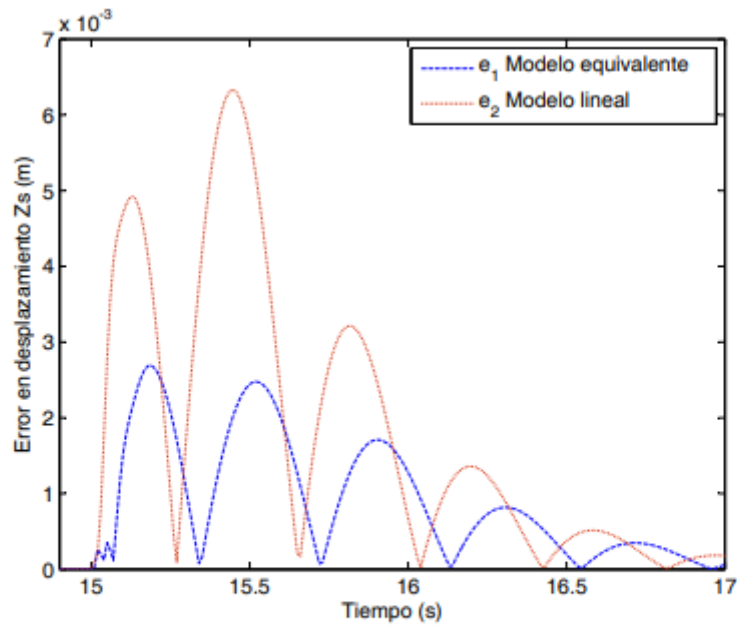


Figura 4.10: Error del desplazamiento de la masa suspendida en los modelos lineal y equivalente, para un obstáculo al tiempo  $t = 15$  s.

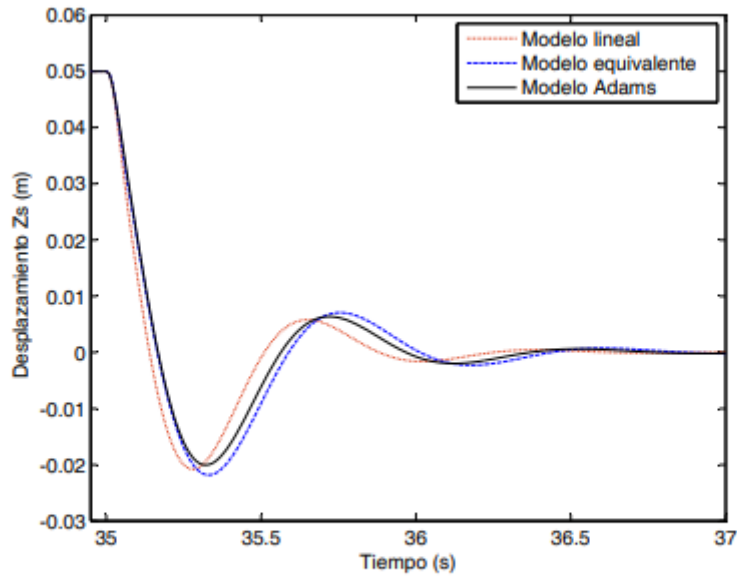


Figura 4.11: Desplazamiento de la masa suspendida en los modelos lineal, equivalente y Adams, para un bache al tiempo  $t = 35$  s.

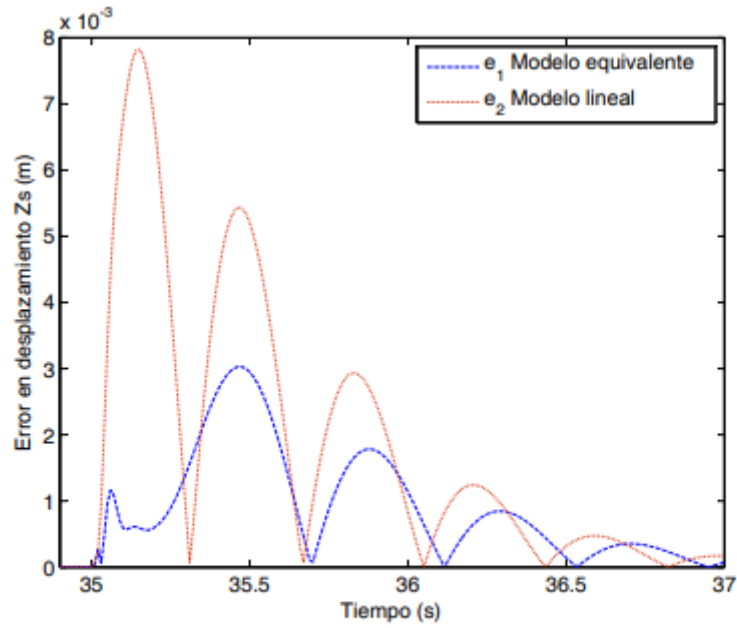


Figura 4.12: Error del desplazamiento de la masa suspendida en los modelos lineal y equivalente, para un bache al tiempo  $t = 35$  s.

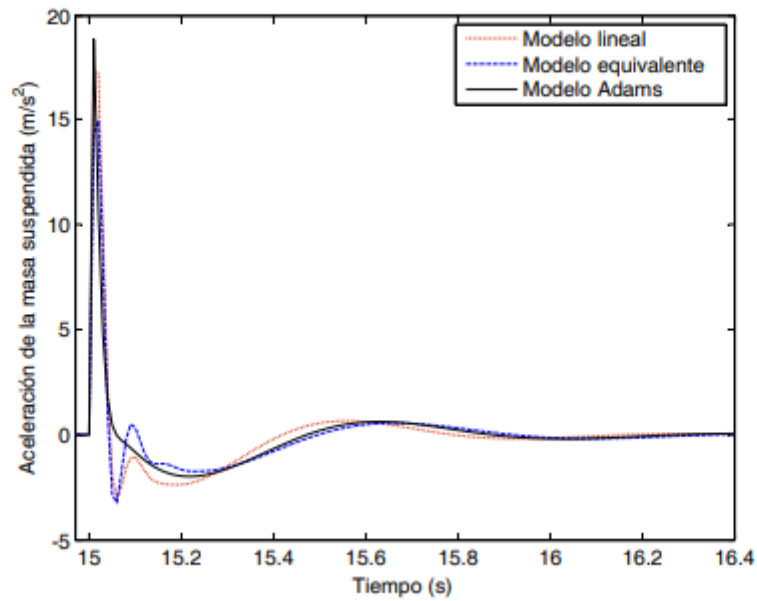


Figura 4.13: Aceleración de la masa suspendida en los modelos lineal, equivalente y Adams, para un obstáculo al tiempo  $t = 15$  s.

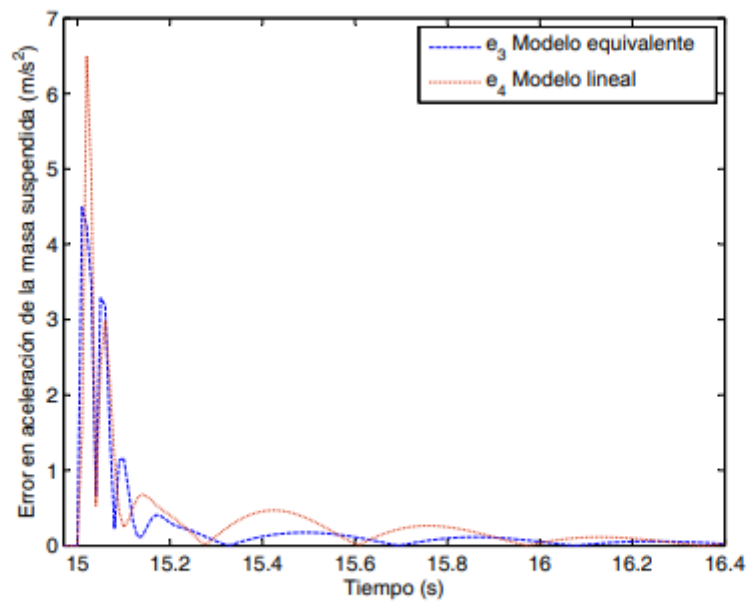


Figura 4.14: Error en la aceleración de la masa suspendida en los modelos lineal, equivalente y Adams, para un obstáculo al tiempo  $t = 15$  s.

DETERMINACIÓN DE LOS PARÁMETROS EQUIVALENTES PARA UN  
MODELO DE UN CUARTO DE VEHÍCULO DE LA SUSPENSIÓN MCPHERSON

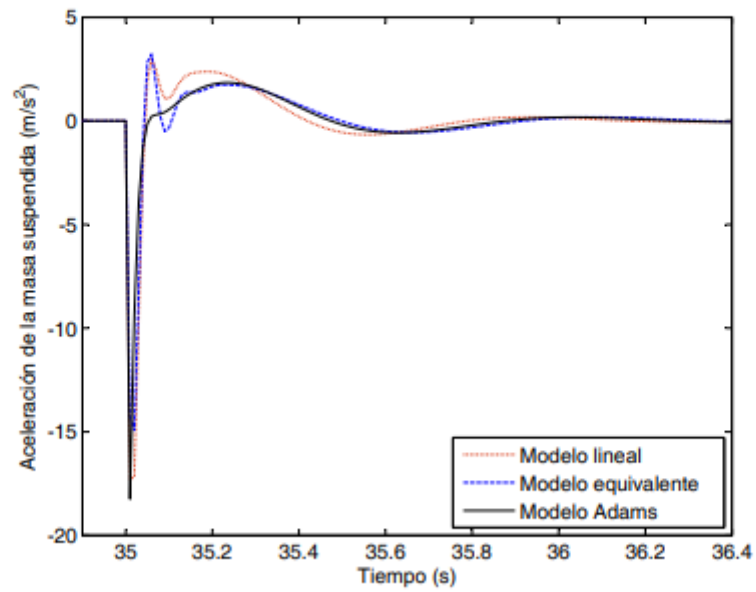


Figura 4.15: Aceleración de la masa suspendida en los modelos lineal, equivalente y Adams, para un bache al tiempo  $t = 35$  s

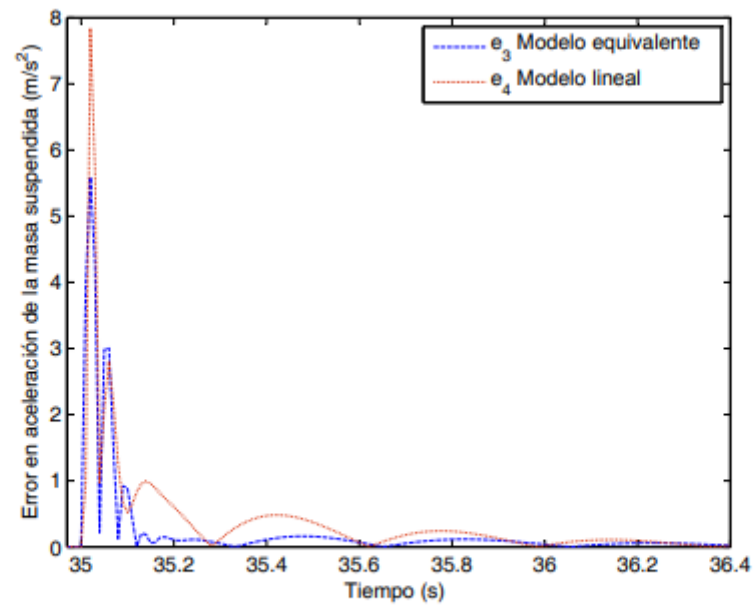


Figura 4.16: Error en la aceleración de la masa suspendida en los modelos lineal, equivalente y Adams, para un bache al tiempo  $t = 35$  s.

Tabla 4.2: Resumen de las diferencias en el desplazamiento y la aceleración de la masa suspendida.

		$P_{max}$			$e_{max}$		$RMSE$	
		Adams	Equiv.	lineal	Equiv.	lineal	Equiv.	Lineal
$Z_2$ (m)	Obstáculo	0.0723	0.0718	0.0708	0.0027	0.063	0.0010	0.0021
	Bache	-0.0201	-0.0218	-0.0208	0.0036	0.078	0.0010	0.0023
$\ddot{Z}_2$ (m/s <sup>2</sup> )	Obstáculo	18.80	14.93	17.29	4.49	6.50	0.18	0.51
	Bache	-18.24	-14.93	-17.29	5.59	7.85	0.52	0.63

variable  $X_2$  se utiliza para representar ya sea el desplazamiento o la aceleración de la masa suspendida, siendo  $n$  el número de muestras en la simulación:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_{2_{Adams,i}} - X_{2_{Model,i}})^2}{n}} \quad (4.37)$$

Los valores menores de RMSE y  $e_{max}$  demuestran las ventajas de utilizar el modelo propuesto en lugar del modelo lineal de un cuarto de vehículo.

#### 4.5 Conclusiones

El capítulo ha presentado un desarrollo analítico para la determinación de los parámetros equivalentes en un modelo de un cuarto de vehículo de la suspensión McPherson. El modelo desarrollado tiene en cuenta las características geométricas para parametrizar este tipo de sistema de suspensión, el cual es ampliamente utilizado en el diseño del control. El método analítico está basado en el concepto de la razón de instalación aplicado a un modelo bidimensional de la suspensión McPherson. Se ha ofrecido un desarrollo completo considerando una rigidez lineal del resorte y usando la definición más generalizado de rigidez del resorte. Por otra parte, el método permite el cálculo de la rigidez equivalente del resorte y del coeficiente equivalente de amortiguamiento como una función del desplazamiento vertical de la masa no suspendida. Además, se pueden comprobar los valores únicos para la rigidez y el amortiguamiento equivalente en la posición de equilibrio, dado que el modelo de cuarto de vehículo comúnmente se linealiza alrededor de este punto. La solución propuesta ha sido validada en un caso de estudio frente a un modelo multicuerpo desarrollado en Adams/View. Las respuestas transitorias para el desplazamiento y la aceleración de la masa suspendida se han analizado para los movimientos de impacto y rebote de la rueda. En la comparación con el modelo de referencia, los resultados muestran el mejor desempeño del modelo propuesto frente al modelo lineal de cuarto de vehículo.

## Anexo 15

**M. Jacas, M., Rodríguez, & U. Ordoñez.** *Modelación por Elementos Finitos como Método para la Sustitución de Piezas de Acero por Hierro Nodular.* Ingeniería Mecánica. Insituto Superior Politécnico Jesá Antonio Echeverría. La Habana 2005.



1

### **Modelación por Elementos Finitos como Método para la Sustitución de Piezas de Acero por Hierro Nodular.**

**Autores:** Dr. Mario Jacas, Dr. Melchor Rodríguez, Dr. Urbano Ordoñez.

Instituto Superior Politécnico Jesá Antonio Echeverría. CUJAE. Marianao, Ciudad de La Habana.  
urbano@mecanica.cujae.edu.cu

#### **Resumen:**

Dado el nivel de aplicación que ha tenido en los últimos años la sustitución de piezas de acero por hierro fundido nodular, en este trabajo se establece una vía de análisis con el empleo de un software de Elementos Finitos que justifique desde el punto de vista de las propiedades mecánicas de los elementos las posibilidades de sustitución.

El objetivo del presente trabajo es la sustitución de un tope de maquina hormigonera originalmente fabricado de componentes soldados de material AISI 1020 por uno rediseñado con hierro nodular austemplado (ADI), utilizando la modelación por elementos finitos, sobre la base de un análisis lineal estático.

Finalmente, al comparar las tensiones de Von Mises y los desplazamientos originados por la acción de la carga, se pudo observar un mejor comportamiento mecánico en el modelo rediseñado del tope de hierro nodular austemplado (ADI).

#### **Introducción.**

El problema de la conversión de piezas originalmente fabricadas de acero en piezas de hierro nodular ha adquirido desde hace años una gran importancia considerando la economía y la funcionabilidad. Desde el punto de vista de las propiedades mecánicas, el hierro nodular o dúctil se ha ido acercando paulatinamente al acero hasta tal punto que actualmente los valores de resistencia alcanzado por ciertos tipos de hierros nodulares (ADI) sobrepasan ampliamente a muchos tipos de aceros de bajo y medio carbono y son incluso comparables a los aceros aleados considerados como de alta resistencia. Los costos de producción del hierro nodular son casi un 40% inferior al del acero fundido en la condición "as cast", todo lo cual explica la tendencia creciente al empleo del hierro nodular en lugar del acero en muchas ramas de la construcción de máquinas.

Por otra parte en ciertas aplicaciones como son por ejemplo los vehículos automotrices de casi cualquier tipo abundan las estructuras resueltas muchas veces a través de la soldadura y generalmente a base de unir una serie de elementos hasta formar la pieza soldada. La desventaja en este caso reside en el hecho de que la unión por soldadura de un número dado de elementos implica generalmente complicaciones en el flujo tecnológico de fabricación, problemas relacionados con el surgimiento de tensiones internas etc., sin mencionar la necesidad de tener siempre en cuenta que el acero empleado debe poseer buena soldabilidad.

Se acepta generalmente que la conversión de una pieza soldada en su equivalente fundido brinda ahorros globales en los costos del orden del 40% de aquí que, desde este punto de vista la sustitución es siempre una vía a considerar.



El cambio de una pieza obtenida mediante soldaduras por una fundida se justifica en general cuando se cumplen adicionalmente las siguientes condiciones:

-La variante soldada es tecnológicamente muy compleja

-Su geometría puede obtenerse por fundición

-Las propiedades de ingeniería se pueden garantizar o mejorar con el material sustituto y la solución se justifica por razones económicas.

Normalmente los componentes se diseñan considerando los esfuerzos de fluencia teniendo en cuenta además un factor de seguridad. Generalmente la resistencia a la tracción de la pieza soldada es solo una fracción de la del material sustituto.

Esto es una consecuencia de las alteraciones geométricas introducidas por el proceso de soldadura, y que producen efectos adicionales como lo son la presencia excesiva de concentradores de tensiones con la consiguiente disminución de la resistencia a la fatiga, la aparición de tensiones internas etc.

Por estas razones puede esperarse el fallo del elemento soldado a cargas incluso inferiores al límite de fluencia. Adicionalmente los esfuerzos residuales son comunes en las piezas soldadas, pudiendo inclusive sobrepasar la tensión de fluencia del material.

Esto puede originar pandeos en las piezas al disminuir los espesores durante el maquinado.

En la variante obtenida por fundición los problemas mencionados están bastante minimizados. Las tensiones internas en las piezas fundidas son despreciables siempre que se enfríen adecuadamente.

#### **Bases para la selección de los materiales.**

La selección de los materiales consiste en última instancia en la combinación más adecuada de factores como el comportamiento durante el servicio, la facilidad de fabricación, el costo y la disponibilidad. No obstante estos factores cambian constantemente e incluso varían en dependencia del área de uso del material.

Por ejemplo en algunas aplicaciones claves como la industria aeronáutica y la aeroespacial, la variable peso es decisiva cuando se comparan materiales de similar comportamiento mecánico.

En cualquier caso la sustitución de un material por otro lleva siempre implícito un proceso de revisión sistemática del acoplamiento más ventajoso entre los materiales y su aplicación específica. En ciertos casos la sustitución implica encontrar el mejor material para una aplicación dada; en otros el problema consiste en rediseñar o desarrollar la aplicación para hacer un mejor uso de los materiales disponibles.

Una vez resueltos los problemas de funcionalidad tecnológica inherentes al cambio de un material por otro, queda entonces el problema básico de garantizar la igualdad en el comportamiento mecánico.

La ventaja del uso de las técnicas de elementos finitos en este caso consiste en que es posible, a partir del rediseño de la pieza fundida simular el comportamiento mecánico de esta para cualquier condición de carga si se cuenta con un Software adecuado.

El requerimiento básico es conocer de la forma mas completa posible las propiedades mecánicas del material para cualquier condición requerida de tratamiento térmico.

El ejemplo que se presenta para mostrar el método de solución es el de un tope de un camión-hormigonera, originalmente fabricado a partir de elementos soldados [1] de acero AISI 1020 el cual se intenta sustituir por uno fabricado de hierro nodular austemplado (ADI).

Es por lo anteriormente planteado que el Grupo de Modelación e Ingeniería de Materiales del Departamento de TCM de la CUJAE se dio a la tarea de diseñar modelos de tope con materiales diferentes y comprobar su comportamiento bajo las mismas condiciones de carga usando el programa de Elementos Finitos ALGOR [2] en un análisis lineal estático valorando el comportamiento y valores de esfuerzos equivalentes de Von Mises y desplazamientos. En nuestro caso tomaremos como ejemplos de estudio la pieza soldada de AISI 1020, así como la pieza rediseñada de hierro fundido nodular austemplado figura 1.



**Fig. 1 Tope soldado y fundido respectivamente**

#### **Objetivos:**

El objetivo del presente trabajo es la sustitución de un tope de maquina hormigonera originalmente fabricado de componentes soldados de material AISI 1020 por otro rediseñado con hierro nodular austemplado, utilizando la modelación por elementos finitos.

Para el análisis por elementos finitos serán empleados; el concepto de mecánica del continuo para definir los estados tensionales, deformacionales y su relación, y el principio de los trabajos virtuales para derivar las ecuaciones de elementos finitos.

#### **Modelo de Elementos Finitos.**

En el modelo de elementos finitos la pieza será discretizada empleando elementos tipo "brick", los cuales son elementos 3D de 8 nodos. El análisis para evaluar el comportamiento de la pieza sometida a cargas estáticas será lineal y se asume que el material es elástico. Para el sistema de carga y los materiales analizados se considerará la tensión de fluencia como punto crítico de carga.

Para el análisis por elemento finito se definió para cada elemento:

- Las relaciones de los desplazamientos en el interior del elemento con los desplazamientos en los nodos, definiendo las funciones de forma del elemento N.

- Las relaciones entre las deformaciones y los desplazamientos, estableciendo la matriz de relación deformación-desplazamiento B.
- La relación tensión-deformación de acuerdo con la ley constitutiva del modelo material, en este caso lineal elástico.
- Por último se aplica el principio de los trabajos virtuales para dar solución a la condición de equilibrio en cada elemento y en el conjunto de elementos de la pieza discretizada.

Las tensiones y las deformaciones del elemento son relacionadas mediante la relación de estado, para análisis lineal y material isotrópico como

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} \quad (1)$$

En la anterior expresión  $\{\sigma\}$  es el tensor de tensiones y  $\{\varepsilon\}$  el tensor de deformaciones, la matriz [D] es la matriz constitutiva o de relación tensión-deformación, la cual para un material isotrópico depende del módulo de elasticidad del material E y del coeficiente de Poisson  $\nu$ . [D] es una matriz simétrica de 6x6 para un elemento.

La matriz de rigidez K para el elemento 3D de 8 nodos se deriva por el método de mínima energía potencial y el principio de los trabajos virtuales,

Aquí la energía potencial es dada por

$$\pi_p = U + \Omega_p \quad (2)$$

Donde:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV \quad (3)$$

La energía potencial de las fuerzas nodales es

$$\Omega_p = -\{d\}^T \{P\} \quad (4)$$

El principio de los trabajos virtuales establece que:

$$W_{int} = W_{ext} \quad (5)$$

donde

$W_{int}$  es el trabajo de las fuerzas internas

$W_{ext}$  es el trabajo de las fuerzas externas

Sustituyendo obtenemos

$$\int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = f \quad (6)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior por las relaciones deformación desplazamiento y por la relación tensión deformación obtenemos

$$\int_V [B]^T [D][B] dV \{d\} = \{f\} \quad (7)$$

De la anterior ecuación se obtiene la matriz de rigidez



$$[k] = \int_V [B]^T [D] [B] dV \quad (8)$$

La ecuación (8) es la matriz de rigidez, la cual contiene toda la información geométrica del elemento y de las propiedades del material. Sustituyendo (8) en (7) se obtiene la ecuación de elementos finitos para el análisis lineal elástico en forma abreviada

$$[K]\{d\} = \{f\} \quad (9)$$

Donde:

$[K]$  es la matriz de rigidez

$\{d\}$  es el vector de los desplazamientos

$\{f\}$  es el vector de fuerzas

#### Propiedades Mecánicas de los Materiales:

En la tabla I se presentan los valores de las propiedades mecánicas de los materiales analizados. [4]

**Tabla I Propiedades Mecánicas de los Materiales**

Propiedades	Acero AISI 1020	H F Nodular Austemplado (ADI)
Módulo de Elasticidad [N/mm <sup>2</sup> ]	200000	169000
Densidad de Masa [N s <sup>2</sup> /mm <sup>4</sup> ]	0.00000381	0.0000074
Coefficiente de Poisson	0.3	0.275
Límite de Fluencia [N/mm <sup>2</sup> ]	380	480

#### Creación del Modelo de Elementos Finitos:

Como primer paso, y debido a la geometría del tope, se realizaron los modelos digitales en el programa CAD: *Mechanical Desktop*5. los que fueron exportados con extensión .IGES para el software ALGOR

#### Análisis de Convergencia:

En cualquier tipo de análisis realizado mediante elementos finitos, la precisión de los valores a obtener está en una relación directa con la discretización (cantidad de elementos) en que ha sido dividido el modelo. Este análisis de incremento de precisión de los valores a obtener se lleva a cabo a través de las pruebas de convergencia. [2; 3]

Para el análisis de convergencia se tomó el modelo correspondiente al de la pieza fundida de hierro nodular austemplado (ADI), al que se le aplicó la carga distribuida de 4000 N y se consideró restringido de rotación y traslación de los tres ejes coordenados, en los bordes, de las superficies superior e inferior de los agujeros de fijación.

Se realizaron siete mallados con diferentes concentraciones de elementos cuyos números varían desde los rangos de 3000 hasta 9000 y cuyos datos se muestran en la tabla II y Fig.2. El material fue considerado con comportamiento isotrópico y elementos

Tipo "brick".

Tabla II: Resultados experimentales hierro fundido nodular austemplado (ADI) con esfuerzos de Von Mises.

Prueba	No. Elem.	Esfuerzo de Von Mises (Mpa)	Nodo	Tiempo (min)
1	3324	148.64	29	0.615
2	3932	140.82	249	1.214
3	7064	152.62	326	1.403
4	7985	171.78	432	1.417
5	8263	138.94	427	2.283
6	8874	163.96	450	2.642
7	9246	169.72	58	2.457

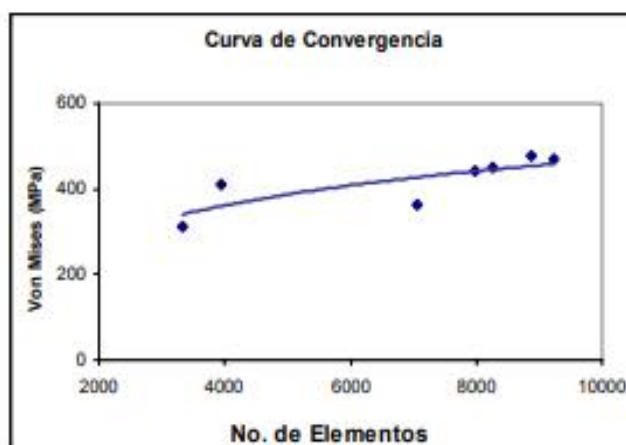


Fig. 2 Gráfico del comportamiento de los esfuerzos de Von Mises contra el Número de Elementos

De la prueba de convergencia se determina que la discretización óptima del modelo para garantizar una mayor precisión de los resultados es de 9000 o más elementos, o sea la zona del gráfico donde un incremento del número de elementos no implica una variación significativa de los valores de tensiones.

En la tabla III y figura 3; 4, se presentan los resultados de los análisis de tensiones de Von Mises y desplazamientos máximos obtenidos de la corrida de los modelos soldados de acero AISI 1020 y hierro fundido nodular austemplado respectivamente (ADI) bajo las mismas condiciones de carga.

Tabla III: Resultados experimentales del modelo de acero AISI 1020 y Hierro Fundido (ADI).

Análisis	No. Elem.	Tensiones de Von Mises (MPa)	Desplazamientos Máximos (mm)
AISI 1020	10391	298.11	0.3762
H. F. ADI	9246	169.72	0.1077

Anexo 16

R. Cedeño Madera *Análisis de suspensión de Autobús mediante elemento finito*. Tesis de grado Universidad Nacional Autónoma De México 2013



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA  
DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

ANÁLISIS Y MODELADO DEL SISTEMA  
DE SUSPENSIÓN DE UN AUTOBÚS DE  
TRES EJES MEDIANTE PAQUETERÍA  
DE ELEMENTO FINITO

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:  
INGENIERO MECÁNICO

P R E S E N T A:

REBECA CEDEÑO MADERA

DIRECTOR DE TESIS

M. en C. EDGAR ISAAC RAMÍREZ DÍAZ



CD. UNIVERSITARIA

2013

### 3.2. Condiciones a simular y cálculo de cargas de cada eje

Una parte de este proyecto, como se ha mencionado anteriormente, consiste en el cálculo de las cargas en cada eje bajo distintas condiciones de funcionamiento. Para ello se parte de datos experimentales, con los cuales se realizaron los modelos que se describirán más adelante. Como primer paso se calcula el centro de masa del autobús a partir de los valores experimentales mostrados en la tabla 3.1 de la carga por cada eje, con éstos se calcula la distancia B (figura 1.29). La altura C es de 0.8 [m] (dato proporcionado por la compañía).

**Tabla 3.1. Cargas experimentales y distancias en planos**

Carga eje delantero	18000 [lb]	8164.7 [kg]
Carga eje motriz	26000 [lb]	11793 [kg]
Carga eje auxiliar	10000 [lb]	4535 [kg]
Peso Bruto del Vehículo (PBV, sin pasajeros)	54000 [lb]	24494 [kg]
Peso del vehículo (PV)	43588.6 [lb]	19771 [kg]
Peso no suspendido	6127 [lb]	2783.7 [kg]
Peso de la carrocería	37451.6 [lb]	16988 [kg]
Distancia entre ejes A (delantero a equivalente)	6.794 [m]	
Distancia entre ejes (delantero a auxiliar)	8.164 [m]	
Altura centro de masa C	0.8 [m]	

A los ejes motriz y auxiliar se les considera como uno solo, sumándose la carga de ambos (36,000 [N]), por lo que la proporción que debe mantenerse entre éstos y el eje equivalente es:

$$0.7223W_e = W_m \quad (3.1)$$

$$0.2778W_e = W_a \quad (3.2)$$

Así mismo, la coordenada horizontal del centro de masa medida desde el eje equivalente es:

$$B = 2.2633[m] \quad (3.3)$$

Para todas las condiciones a simular se considera la capacidad máxima del autobús esto es:

$$48 \text{ pasajeros} \times 70 \text{ kg} = 3360 \text{ kg}$$

$$48 \text{ piezas de equipaje} \times 25 \text{ kg} = 1200 \text{ kg}$$

$$W_{max} = 16988 \text{ kg} + 3360 \text{ kg} + 1200 \text{ kg} = 21548 \text{ kg}$$

$$W_{max} = 211385.88 [N] \quad (3.4)$$

#### 3.2.1. Peso suspendido

La condición inicial que se considera es el efecto del peso suspendido sobre el sistema de suspensión, esto es aplicar el peso del vehículo máximo (3.4). El peso actúa en el centro de masa del autobús, sin embargo, el objetivo del análisis es obtener las fuerzas de reacción de los

puntos de unión de la suspensión con el chasis, por lo que la fuerza es aplicada en los puntos de referencia de las llantas y los puntos de unión con el chasis son empotrados.

De las ecuaciones 1.10 y 1.11, se obtienen las cargas estáticas que se aplican a las condiciones de peso suspendido en horizontal, pendiente negativa 10° y 20° (Tabla 3.2).

**Tabla 3.2. Cargas obtenidas para la condición de peso suspendido**

<i>Eje</i>	<i>Horizontal</i>	<i>Pendiente 10°</i>	<i>Pendiente 20°</i>
<b>Delantero</b>	70420 N	74482 N	76419 N
<b>Motriz</b>	101820 N	96566 N	88377 N
<b>Auxiliar</b>	39160 N	37140 N	33990 N

Se puede observar que al incrementar la pendiente la carga en el eje delantero aumenta, lo que indica que el autobús se encuentra en una pendiente negativa (la parte delantera del autobús en la parte más baja), al mismo tiempo, la carga en los ejes traseros disminuye. Por el contrario, si la pendiente fuese positiva, observaríamos el efecto contrario.

### 3.2.2. Aceleración y frenado

Como segunda condición se tiene el frenado, para este caso se considera una desaceleración de 0.5g que, de acuerdo con la Norma FMVSS 121 (NHTSA, 2010), es la desaceleración máxima a la que se evalúan los sistemas de frenado en un vehículo. De las ecuaciones 1.13 y 1.14 y con los datos de la tabla 3.1, se obtienen las cargas con las cuales se somete a análisis los modelos de las suspensiones bajo la condición de frenado (Tabla 3.3) y aceleración (Tabla 3.4).

**Tabla 3.3. Cargas obtenidas para la condición de frenado**

<i>Eje</i>	<i>Horizontal</i>	<i>Pendiente 10°</i>	<i>Pendiente 20°</i>
<b>Delantero</b>	84532 N	88595 N	90395 N
<b>Motriz</b>	91616 N	86363 N	78176 N
<b>Auxiliar</b>	35240 N	43218 N	30070 N

**Tabla 3.4. Cargas obtenidas para la condición de aceleración**

<i>Eje</i>	<i>Horizontal</i>	<i>Pendiente 10°</i>	<i>Pendiente 20°</i>
<b>Delantero</b>	56305 N	60368 N	62169 N
<b>Motriz</b>	112000 N	106750 N	98562 N
<b>Auxiliar</b>	43080 N	41060 N	37911 N



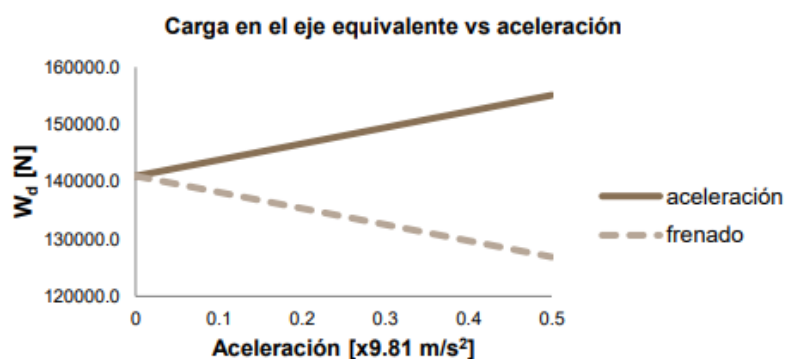


Figura 3.4. Carga en el eje equivalente vs. aceleración

### 3.2.3. Curveo

En curveo se considera una curva de 14 m de radio y una velocidad de 40 km/h. Para la evaluación de esta condición se introducen los valores mencionados a las ecuaciones obtenidas de donde se pueden conocer las cargas para cada uno de los ejes así como para cada costado. De las ecuaciones 1.17, 1.18 y 1.19 se obtiene las fuerzas horizontales y de las ecuaciones 1.21, 1.22 y 1.23 se obtienen los momentos de los ejes delantero, motriz y auxiliar respectivamente (Tabla 3.5). Con estas últimas ecuaciones se obtiene la diferencia de fuerzas y usando las relaciones 1.24, 1.25 y 1.26 se obtuvieron la fuerza vertical derecha e izquierda de cada eje (Tabla 3.6)

Tabla 3.5. Fuerzas laterales y momentos obtenidos para la condición de curveo

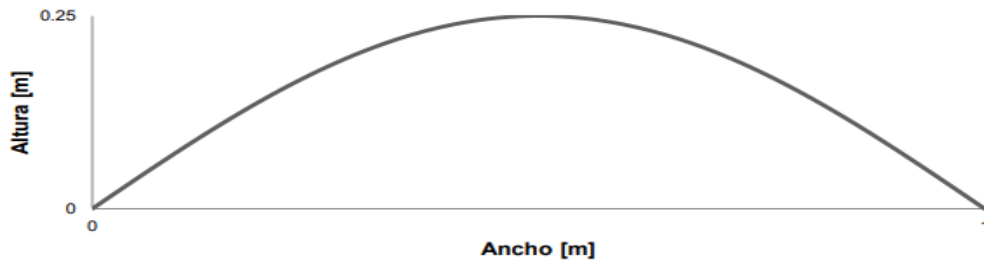
Eje	Momento (Fuerza vertical)	Fuerza horizontal
<b>Delantero</b>	28438 Nm	62555 N
<b>Motriz</b>	64643 Nm	90782 N
<b>Auxiliar</b>	24521 Nm	34784 N

Tabla 3.6. Fuerzas verticales y horizontales para la condición de curveo

Eje	Fuerza Vertical der.	Fuerza Vertical izq.	Fuerza Horizontal
<b>Delantero</b>	48560 N	21089 N	62555 N
<b>Motriz</b>	81537 N	19110 N	90782 N
<b>Auxiliar</b>	31187 N	7508 N	34784 N

### 3.2.4. Curveo con frenado

Para esta condición se usan las ecuaciones para calcular las cargas verticales derecha e izquierda durante el curveo, mencionadas anteriormente. En esta ocasión se toma el valor de la carga de frenado en pendiente negativa de 20° (Tabla 3.3) como la carga del eje en las ecuaciones de curveo. En la tabla 3.7 se encuentran los datos obtenidos para cada eje.



**Figura 3.5. Perfil del tope**

En el modelo de la suspensión el desplazamiento se aplica en los dos puntos de referencia de las llantas, agregando una amplitud que representa el movimiento senooidal de la figura 3.5. Es importante mencionar que debido a que las condiciones son cuasi-estáticas, el paso para la simulación se reduce a 2 segundos, de tal manera que las fuerzas de reacción sean obtenidas.

Con esto último se concluye las condiciones a simular, habiendo calculado los valores iniciales para los análisis en elemento finito en Abaqus®. En cuanto para los elementos elásticos y de amortiguación se siguió un método de selección y para la elaboración del modelo se creó una metodología, ambas se describirán a continuación.

**Anexo 17**

F.J. García *Diseño de suspensión hidráulica para un vehículo todo terreno*. Dep. De Ingeniería Ciencia de los Materiales y del Transporte Escuela Técnica Superior de Ingeniería. Sevilla, 2016

**Proyecto Fin de Carrera  
Ingeniero Industrial**

**Diseño de suspensión hidráulica para un  
vehículo todo terreno**

Autor: Francisco Javier García  
Pablo

Tutor: Johan Wideberg

Dep. de Ingeniería y Ciencia de los Materiales y  
del Transporte  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería  
Sevilla, 2016



### 2.3.4 Elementos de unión o y estructurales

Cualquier suspensión además de contar con unas masas suspendidas y no suspendidas, amortiguador y elemento elástico, necesita unos elementos de unión entre los mismos. Dichos elementos son de gran importancia en el funcionamiento de la suspensión porque su geometría define el movimiento, y por consiguiente el comportamiento del vehículo. Estos elementos que, como se ha indicado, unen los elementos suspendidos con los no suspendidos. Normalmente se consideran parcialmente suspendidos, y dependiendo del movimiento relativo con respecto a ruedas y chasis, se le asigna un valor, por ejemplo, un buje tiene un 100% de masa suspendida, Manguetas La mangueta de la suspensión es una pieza fabricada en un metal o aleación que une el buje de la rueda y la rueda a los elementos de la suspensión, tirantes, trapecios, amortiguador, etc. Por lo tanto, es una pieza de cierta complejidad y debe de tener buena capacidad mecánica a la vez que bajo peso. También debe permitir el movimiento relativo entre varias piezas. Su geometría tiene gran influencia en el diseño de la suspensión y dirección. Brazos Un brazo de suspensión es un elemento de unión entre chasis y ruedas, suelen estar en las suspensiones independientes. Cada uno de los brazos permite un giro alrededor de sus extremos e impide un movimiento longitudinal. La cantidad de brazos que componen una suspensión suele determinar su complejidad y el comportamiento del vehículo durante su funcionamiento. Bujes El buje es el elemento que contiene al eje de la rueda, por lo tanto, es la unión entre los elementos que dan vueltas (rueda y disco de freno) y los que no (brazos, pinza de freno, elemento elástico, etc, contiene un rodamiento un rodamiento que permite dicho giro. 2.3.5 Neumáticos. El neumático es una parte fundamental de la suspensión. Su construcción y materiales hacen que éste funcione como elemento elástico y amortiguador simultáneamente. Influye en el comportamiento general del vehículo ruido, confort, agarre en distintas condiciones, consumo, capacidad de frenado, etc. Su construcción y materiales determinan el comportamiento del mismo, en la Figura 2.9, podemos ver las distintas capas que tiene un neumático, cables de acero, lonas, caucho, etc.



Figura 2.9. Componentes estructurales de un neumático.

Este elemento, además, es muy sensible a diversos factores, como es la temperatura, estado del terreno que pisa, presión, etc.

**Anexo 18**

**A. S. Marcial Rodriguez**, *Análisis mediante MEF del sistema de suspensión de un auto liviano*  
Escuela Politécnica Nacional, Tesis de Grado Quito 2012

# **ESCUELA POLITECNICA NACIONAL**

**FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA**

**ANÁLISIS MEDIANTE ELEMENTOS FINITOS DEL SISTEMA DE  
SUSPENSIÓN DE UN AUTOMÓVIL LIVIANO**

**PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE INGENIERO  
MECÁNICO**

**ALEJANDRO SEBASTIAN MARCIAL RODRIGUEZ**

**alexm\_00@hotmail.com**

**DIEGO FELIPE ROSERO FLORES**

**diegopro87@hotmail.com**

**DIRECTOR: ING. IVÁN ZAMBRANO**

**ivan.zambrano@epn.edu.ec**

**Quito, Agosto 2012**

## **CAPITULO II**

### **SIMULACION DINAMICA A TRAVÉS DEL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS**

#### **2.1 INTRODUCCIÓN AL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

El Método de Elementos Finitos (MEF) es en la actualidad el procedimiento más utilizado en varios campos de la ingeniería, consiguiendo resolver problemas que hasta hace poco era casi imposibles de hacerlo con métodos matemáticos tradicionales.

Aunque el MEF es conocido a partir de los años 50, el progreso de éste empieza a darse por medio del avance informático que a través softwares computacionales permiten un análisis rápido y eficiente.

##### **2.1.1 CONCEPTOS GENERALES DEL MÉTODO**

La idea general del MEF es la división de un mecanismo en un conjunto de elementos más pequeños, los cuales se encuentran unidos a través de una serie de puntos denominados nodos.

Las ecuaciones que rigen el conjunto de elementos, rigen también el mecanismo, permitiendo así pasar de un sistema que se encuentra regido por una ecuación diferencial o varias ecuaciones diferenciales a un sistema con un número de grados de libertad finitos modelado por un sistema de ecuaciones lineales o no.

Los sistemas a analizar presentan las siguientes partes:

- Dominio: Espacio geométrico donde se va a analizar el sistema.
- Condiciones de contorno: Variables conocidas, que condicionan el cambio del sistema, por ejemplo restricciones de movimiento, cargas, desplazamientos, temperaturas, voltaje, etc.

- **Incógnitas:** Variables del sistema que se desea conocer, posterior a la intervención de las condiciones de contorno sobre el sistema, por ejemplo: desplazamientos, tensiones, temperaturas, entre otros.

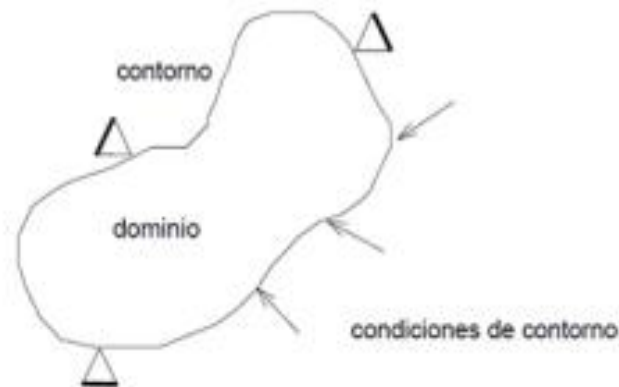


Figura 2.1. Condiciones iniciales para un análisis con MEF

Fuente: Propia

La discretización o división del dominio en el MEF puede ser representada mediante puntos (en el caso lineal), mediante líneas (en el caso bidimensional) o superficies (en el tridimensional) imaginarias, de forma que el dominio total sea aproximado a partir del conjunto de elementos en que se subdivide.

Los elementos se definen por un número discreto de puntos, denominados nodos, que sirven de conexión entre los elementos y sobre los cuales se materializan los resultados fundamentales del problema.

En las siguientes gráficas se puede observar un elemento viga con una carga puntual en el extremo y el mismo elemento viga discretizado para el análisis.



Figura 2.2. Viga con carga puntual en el extremo  
Fuente: [http://web.usal.es/~ferragut/apuntes/introduccion\\_MEF.pdf](http://web.usal.es/~ferragut/apuntes/introduccion_MEF.pdf)

El discretizado del dominio puede ser:

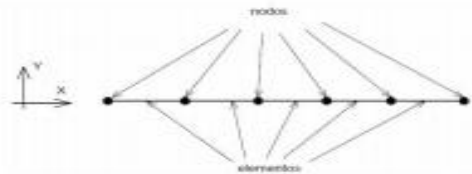


Figura 2.3. Elemento viga discretizado para análisis con MEF  
Fuente: [http://web.usal.es/~ferragut/apuntes/introduccion\\_MEF.pdf](http://web.usal.es/~ferragut/apuntes/introduccion_MEF.pdf)

Esta discretización o división del dominio se la puede realizar a través de la utilización de varios tipos de elementos que pueden ser tetraédricos, hexaédricos, prismas, etc.



Figura 2.4. Elementos para malla tridimensional en ANSYS  
Fuente: ANSYS training manual. Introducción a la aplicación de malla

## 2.2 FUNDAMENTOS DE LA SIMULACIÓN DINÁMICA

En el método de los elementos finitos un análisis dinámico es una técnica que se utiliza para determinar el comportamiento dinámico de una estructura o componente. Es un tipo de estudio que involucra al tiempo, en donde la inercia y el posible amortiguamiento de la estructura juegan un papel importante.

El comportamiento dinámico de un objeto puede ser definido como uno de los siguientes casos:

- Comportamiento vibratorio: cómo vibra la estructura y a qué frecuencias lo hace.
- Efectos producidos por cargas armónicas.
- Efectos producidos por cargas sísmicas o cargas de impacto.
- Efectos producidos por cargas que varían con el tiempo.
- Efectos producidos por cargas al azar.



### 2.2.1 MÓDULOS DE ANÁLISIS DINÁMICO EN ANSYS

En el software de elementos finitos Ansys cada uno de los anteriores casos de carga es estudiado por un módulo específico de análisis dinámico.

Por ejemplo, el tubo de escape de un automóvil puede presentar un movimiento vibratorio que lo desacople de la carrocería si su frecuencia natural coincide con la frecuencia de vibración del motor. En este caso se realiza un análisis modal que permite estudiar las frecuencias y modos de vibración.

Las máquinas rotativas ejercen fuerzas alternantes sobre soportes y rodamientos, estas fuerzas pueden causar diferentes deformaciones y esfuerzos dependiendo de su velocidad de rotación. El análisis armónico se puede utilizar para determinar la respuesta de la estructura a cargas armónicas.

Los componentes de aviones y naves espaciales durante su funcionamiento deben resistir cargas aleatorias de diferentes frecuencias por grandes periodos de tiempo. Un análisis de vibraciones aleatorias permite determinar cómo reacciona un elemento a estas fuerzas al azar.

Los rascacielos, torres de enfriamiento y otras edificaciones deben estar diseñados para soportar cargas de impacto de corta duración que se presentan durante los terremotos y eventos sísmicos. El análisis del espectro de respuesta se utiliza para determinar los efectos de estas cargas sobre las estructuras.

El parachoques de un vehículo debe ser capaz de soportar impactos a baja velocidad, pero también debe deformarse bajo los efectos de un impacto a alta velocidad. El análisis transiente permite calcular la respuesta de una estructura frente a cargas que varían con el tiempo.

### 2.2.2 ECUACIÓN GENERAL DE MOVIMIENTO.

La ecuación general de movimiento utilizada para resolver los problemas dentro de un análisis dinámico es la siguiente<sup>5</sup>:

$$[M]\{\ddot{u}\} + [C]\{\dot{u}\} + [K]\{u\} = \{F\}$$

Donde:

- $[M]$  es la matriz de masa.
- $[C]$  es la matriz de amortiguamiento.
- $[K]$  es la matriz de rigidez.
- $\{\ddot{u}\}$  es el vector nodal de aceleración.
- $\{\dot{u}\}$  es el vector nodal de velocidad.
- $\{u\}$  es el vector nodal de desplazamiento.
- $\{F\}$  es el vector de fuerza aplicada.

Esta ecuación representa un balance de fuerzas:

$$\overset{F_{inercial}}{[M]\{\ddot{u}\}} + \overset{F_{amortiguación}}{[C]\{\dot{u}\}} + \overset{F_{rigidez}}{[K]\{u\}} = \overset{F_{aplicada}}{\{F\}}$$

Para cada uno de los diferentes tipos de análisis dinámico se resuelve la ecuación general de movimiento con ciertas variaciones.

- En el análisis modal la fuerza aplicada es nula y generalmente se ignora la matriz de amortiguación.
- Dentro de un análisis armónico tanto la fuerza aplicada  $F(t)$  como el desplazamiento  $u(t)$  son funciones sinusoidales.

## CAPÍTULO IV

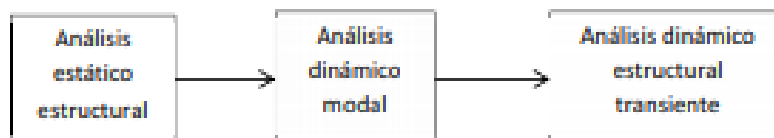
### ANÁLISIS DINÁMICO DEL SISTEMA MEDIANTE EL SOFTWARE DE ELEMENTOS FINITOS ANSYS

Como se mencionó en el Capítulo II, el software de elementos finitos Ansys permite realizar varios tipos de análisis, los cuales se encuentran divididos en distintos módulos.

El sistema de suspensión de un automóvil durante su funcionamiento está sometido a cargas que varían en el transcurso del tiempo, que son consecuencia de las irregularidades del terreno por el que circula el vehículo.

Debido a esta razón el tipo de análisis dinámico más adecuado para estudiar el sistema de suspensión es un análisis transiente. Es necesario también, previo al análisis transiente, conocer los distintos modos principales de vibración del sistema, por lo cual se debe realizar un análisis modal que permita determinar las formas y frecuencias de vibración de la suspensión. Para el análisis modal se debe tomar en cuenta el peso del vehículo que ejerce una fuerza sobre la suspensión del mismo, este estado de carga se establece mediante un análisis estático estructural.

El análisis dinámico del sistema de suspensión entonces constará de tres módulos en el siguiente orden:



*Figura 4.1. Diagrama descriptivo del análisis*

*Fuente: Propia*

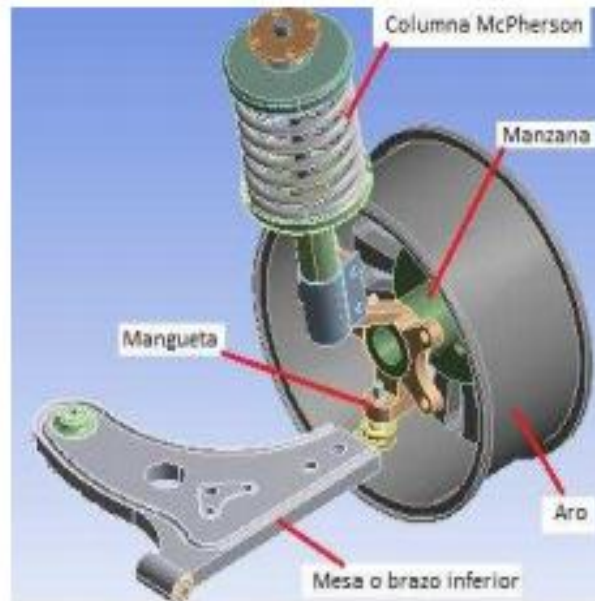


Figura 4.4. Modelo del sistema de suspensión

Fuente: Propia

A continuación se detallan cada una de las piezas que fueron modeladas

#### 4.1.1.1 Columna McPherson

La columna McPherson está conformada por el resorte, el amortiguador y los soportes para los mismos. En la parte superior de la tapa del resorte se encuentra una placa que sujeta la suspensión al chasis del automóvil mediante pernos, esta unión está acoplada a la tapa mediante un rodamiento que permite el movimiento del sistema de suspensión al momento de girar el neumático.

El soporte inferior de la columna McPherson se sujeta a la mangueta mediante una junta empernada.

#### 4.1.2 MATERIALES

La mayoría de los elementos del sistema de suspensión están fabricados con un acero al carbono común. Sin embargo, existen otros componentes que necesitan materiales especiales como es el caso del resorte que usa un acero aleado especial y la llanta que es de caucho.

El acero al carbono que se utiliza para los componentes es el acero SAE 1020 que tiene las siguientes propiedades:

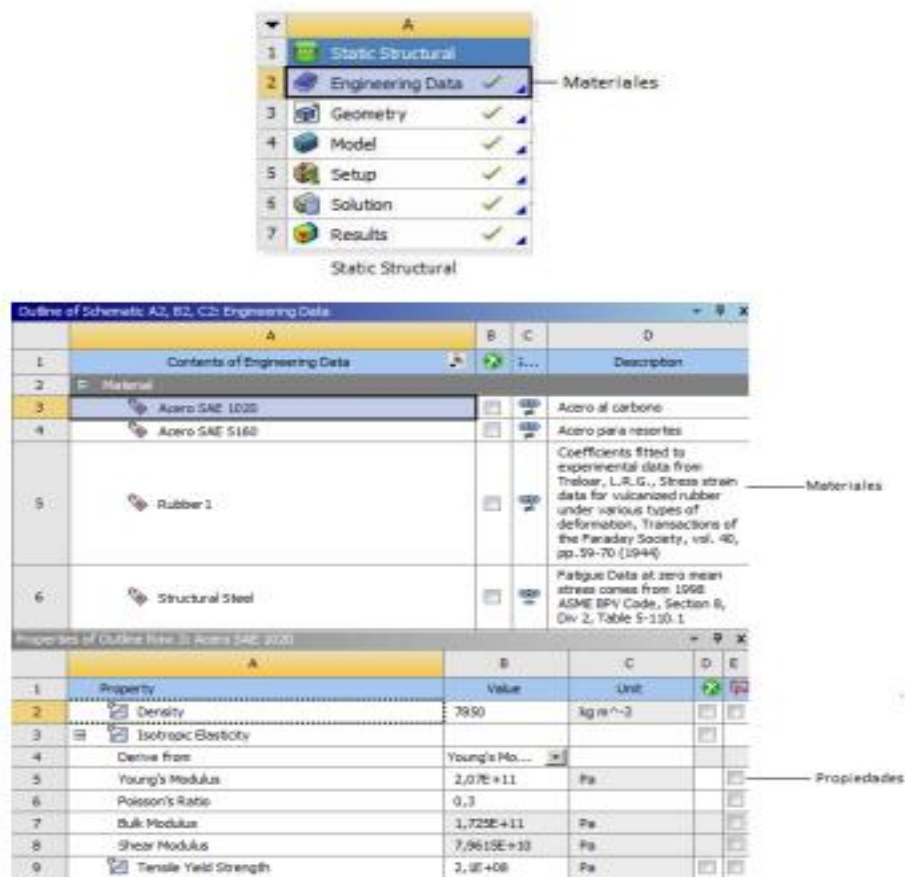


Figura 4.10. Definición de materiales en Ansys

Fuente: Propia

Una vez definidos los materiales a utilizar se procede a asignarlos a cada elemento. Para ello, dentro del ambiente Mechanical, en la ventana Outline se selecciona la opción Geometry, donde se encuentran detalladas todas las

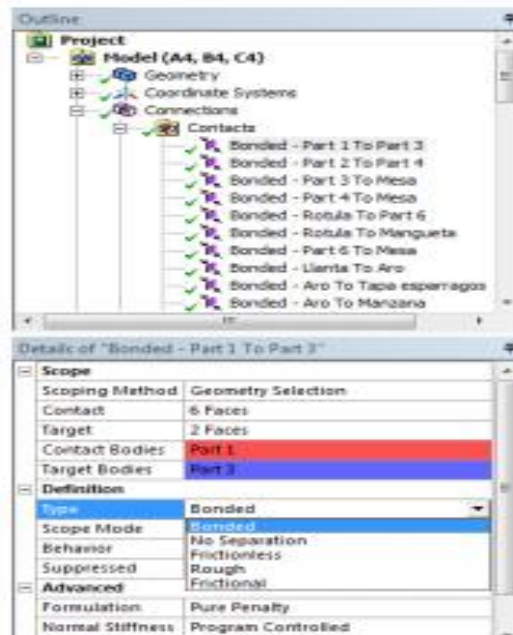


Figura 4.12. Asignación de contactos en Ansys  
Fuente: Propia

# ACEROS AL CARBONO

## SUMINISTRO LAMINADO Y TREFILADO

### SAE 1020

**Descripción:** Acero de bajo carbono, blando, responde bien al trabajo en frío y al tratamiento térmico de cementación. Tiene un alto índice de soldabilidad, y por su alta tenacidad y baja resistencia mecánica es adecuado para elementos de maquinaria y usos convencionales de baja exigencia.

**Usos:** Se utiliza en ejes, cadenas, remaches, tornillos, pernos, sujetadores, engranajes, piñones, piezas de maquinaria, pasadores de baja resistencia, prensas y levas.

### SAE 1020

Composición química (%)	
C	0,18 - 0,23
Mn	0,30 - 0,60
P	0,04 Máx.
S	0,05 Máx.

Tratamiento térmico		
Valores en °C		
Forjado		820 - 1100
Normalizado		870 - 890
Revenido		150 - 180
Recocido		650 - 700
Templado	Agua	820 - 850
Cementación		900 - 950

Propiedades mecánicas	
Laminado en caliente	
Resistencia a la tracción	40 - 45 kgf/mm <sup>2</sup>
Límite de fluencia	27 kgf/mm <sup>2</sup>
Elongación	20%
Reducción de área	50%
Maquinabilidad	72%
Dureza (HB)	110 - 140

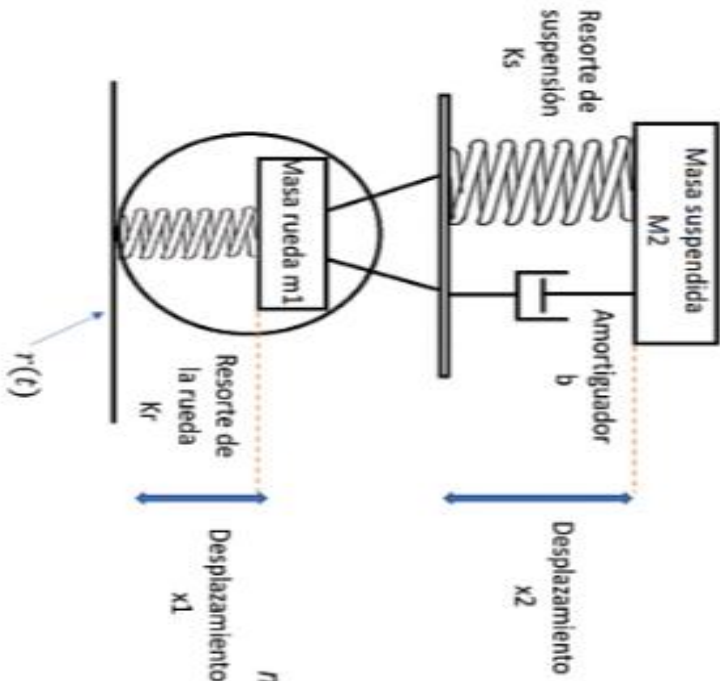


## Anexo 19

J.D Valladolid [J. Diego Valladolid](#) 2018 Marzo 1. Modelado y simulación de un sistema de suspensión de ¼ de vehículo.

Recuperado de: <https://www.youtube.com/watch?v=zUZVFXHh3vs>

# MODELO MATEMÁTICO DE SISTEMA DE SUSPENSIÓN DE CUARTO DE VEHÍCULO



Analizando los diagramas de cuerpo libre de M1 y m2 se obtiene las siguientes ecuaciones:

$$M2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \frac{d(x_2 - x_1)}{dt} + Ks(x_2 - x_1) = 0$$

$$m1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \frac{bdx_1}{dt} + x1(Ks - Kr) - \frac{bdx_2}{dt} - Ksx_2 = Kr$$

### **Objetivo General**

- Determinar la influencia del tamaño de las ruedas sobre el brazo de la suspensión McPherson.

### **Objetivos Específicos**

- Representar el brazo de suspensión de un vehículo SUV de acuerdo a las condiciones de análisis y las posibilidades de simulación numérica
- Estimar los esfuerzos que se soporta el brazo de suspensión por la variación del tamaño de ruedas
- Comparar los esfuerzos obtenidos con el límite de elasticidad del material
- Elaborar el estudio numérico computacional y predecir los esfuerzos máximos que soporta el brazo de suspensión